ISSN (versão *online*): 2317-5125
95 Amazônia 243
Revista de Educação em Ciências e Matemáticas

Uma conexão geométrica: imagens mentais, visualização e registros matemáticos

A geometric connection: mental images, visualization and mathematical register

Anne Desconsi Hasselmann Bettin[1]
José Carlos Pinto Leivas[2]
Carmen Vieira Mathias[3]

Resumo

No presente artigo, apresenta-se o resultado de uma pesquisa qualitativa que teve o objetivo de investigar se existe conexão entre imagens mentais, visualização e notações matemáticas convencionais. O trabalho foi realizado com um grupo de estudos e pesquisas em geometria, constituído por futuros professores e professores em ação continuada, no primeiro semestre do ano de 2019, no sul do país. Na investigação, foram realizadas duas atividades que partiram da imaginação individual de cada participante do grupo para criar visualização como construto mental. Posteriormente, foram produzidas representações semióticas, tanto em linguagem natural quanto em linguagem simbólica geométrica. A coleta de dados foi realizada por meio de registros escritos dos participantes, e a respectiva análise foi feita à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, Criatividade, Visualização e Imaginação, levando em consideração aportes de diferentes estudiosos sobre esses temas. Isso possibilitou aos investigadores concluírem que é possível uma conexão que permita levantar hipóteses e, após, comprová-las por meio do uso de recursos materiais adequados.

Palavras chave: representação; visualização; geometria.

Abstract

This article presents the result of a qualitative research that aimed to investigate whether there is a connection between mental images, visualization and conventional mathematical notations. The work was carried out with a group of studies and research in geometry, made up of future teachers and professors in continuous action, in the first semester of 2019, in the south of the country. In the investigation, two activities were carried out that started from the individual imagination of each group participant to create visualization as a mental construct. Subsequently, semiotic representations were produced, both in natural language and in geometric symbolic language. Data collection was carried out through written records of the participants, and the respective analysis was made in the light of the TTheory of Register of Semiotic Representation, Creativity, Visualization and Imagination, taking into account contributions from different scholars on these themes. This made it possible for

[1] Secretaria de Educação do Estado do Rio Grande do Sul | nanydh@yahoo.com.br
[2] Universidade Franciscana | leivasjc@ufn.edu.br
[3] Universidade Federal de Santa Maria | carmen@ufsm.br

researchers to conclude that a connection is possible that allows hypotheses to be raised and, afterwards, to prove them through the use of adequate material resources.Tradução em inglês do resumo original, com formato análogo .
Keywords: representation; visualization; geometry.

Introdução

Em Conway *et al.* (2010), são propostos 26 problemas do tipo "imagine em sua mente", ou seja, atividades que proporcionam visualizar uma imagem mentalmente antes de colocar essa representação no papel. O visual é uma das representações que se pode utilizar ao estudar matemática, mas essa ciência também utiliza outras representações, como algarismos, símbolos etc. Segundo Duval (2012a), tais representações matemáticas nunca devem ser confundidas com um objeto matemático. Embora o contraste entre representações mentais e físicas possa ser importante para a aprendizagem de outras ciências, como a física ou a biologia, esse não é o caso da matemática.

Em geral, os objetos matemáticos são abstratos, ou seja, não podem ser percebidos de forma física e direta. Assim, acredita-se que o contraste entre objetos e representações é muito relevante, pois representações matemáticas de qualquer tipo são sinais puramente semióticos e, como tal, veículos para transmitir informações sobre os objetos (DUVAL, 2006). As visualizações nem sempre são auto explicávies, em vez disso, elas podem exigir que um indivíduo realize uma atividade cognitiva que não seja nem mental nem física, mas semiótica: é necessário saber a qual objeto matemático uma visualização específica se refere, ou seja, qual o significado da visualização.

Essa busca de significado para as imagens não é algo novo. Presmeg (1986) realizou um estudo empírico, no qual investigou os tipos de imagens produzidas por estudantes ao resolverem problemas. Como resultado, foram determinadas cinco classes de imagens (concretas, padrão, de memória, cinestésicas e dinâmicas), cuja eficácia foi investigada *a posteriori*. Acredita-se que a percepção semiótica das visualizações pode permitir uma perspectiva diferente, mais objetiva, com relação às tarefas do tipo proposto por Conway *et al.* (2010). Nesse caso, espera-se não ser necessário uma imagem clara, mas a produção de representações descritas a partir de imaginações, ou seja, visualizações. A investigação não reside em saber se um indivíduo imagina um fato descrito exatamente como tal, mas se ele cria visualizações que poderão ser úteis, no sentido de responder a uma tarefa ou a um problema.

Nesse contexto, apresentam-se, neste artigo, resultados de uma investigação realizada no âmbito de um grupo de estudos e pesquisas em geometria. A investigação foi baseada em um instrumento de ensino que pode ser referido como "tarefas de imagens mentais em matemática" ou "problemas em visualização matemática". Na busca de desenvolver a imaginação geométrica dos integrantes do grupo, definiu-se o objetivo da pesquisa: investigar se existe conexão entre imagens mentais, visualização e notações matemáticas convencionais. Afinal, como afirma Conway *et al.* (2010, p. 19), "imaginar geometricamente não é algo que nasceu ou não com você. Como qualquer outra habilidade é algo que precisa ser desenvolvido com a prática".

Imaginar mentalmente, formando e manipulando imagens, é algo pessoal, o que significa que essa abordagem pode capacitar àquele que estuda matemática a experimentá-la, iniciando esse processo em sua própria mente. Por sua vez, é possível investigar os processos de pensamento de quem executa as atividades, por meio de tal enfoque.

Fundamentação teórica

Inicialmente, constam, nesta seção, algumas considerações a respeito da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2009) para, posteriormente, abordar-se a aprendizagem em geometria. Pretende-se, assim, investigar se existe conexão entre imagens mentais, visualizações e notações matemáticas nas atividades propostas, as quais envolvem, em um primeiro momento, a imaginação e, depois, a construção, experimentação e exploração das visualizações imaginadas.

Duval (2009) elaborou um modelo para estudar o funcionamento cognitivo no ensino e na aprendizagem da matemática a partir de registros de representação semiótica. O autor ressalta que só há acesso a um objeto matemático (como um número ou uma função) por meio de suas representações (escrita fracionária, símbolo, traçado de figuras) e não se deve confundir o objeto com sua representação, pois provoca perda de compreensão com o tempo. Assim, "a diversidade de tipos de representação semiótica e o modo de funcionamento próprio de cada tipo são as questões cruciais para a análise cognitiva da atividade matemática, e, portanto, dos processos de compreensão e incompreensão na aprendizagem" (DUVAL, 2011, p. 68).

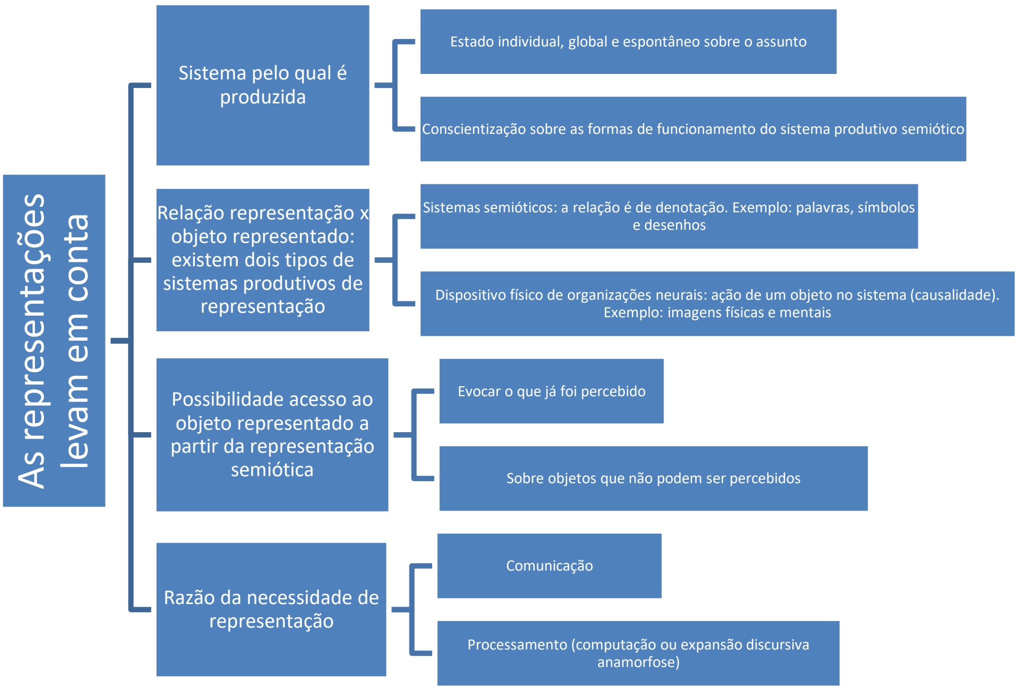


Diagrama 1 – Representações. Fonte: adaptado de Duval (2000, p. 5)

Portanto, ao analisar cada situação proposta em determinada atividade, o aluno a visualiza mentalmente, ou a materializa e simula a resposta. Dessa forma, ele obtém inspiração ao pensar na visualização de um objeto matemático, o que o leva a refletir sobre a forma de representação mais apropriada para cada sistema semiótico, pois "o conteúdo de qualquer representação depende de seu sistema produtivo e não apenas do objeto representado. Nesse sentido, Neres, Miguel e Guterres (2016, p.35) reconhecem "que as representações semióticas facilitam a aprendizagem matemática e contribuem para o desenvolvimento cognitivo do sujeito". Os registros semióticos permitem acesso aos objetos matemáticos por meio das representações, as quais levam em conta quatro itens, conforme o diagrama 1.

É necessário que o aluno consiga transitar entre os diferentes registros de representação semiótica, pois, para que o aprendizado ocorra, "O pensamento humano exige a mobilização de vários sistemas produtivos heterogêneos de representação e sua coordenação" (DUVAL, 2000, p. 6).

Na apreensão do conhecimento, ocorrem duas operações cognitivas, a saber: tratamentos e conversões, que são os dois tipos de transformações que ocorrem nos registros de representação. Os registros de representação são classificados, conforme Duval (2008, p. 14), "em língua natural, escrita algébrica/formal, representações gráficas e figuras geométricas".

Duval (2009, p. 30) destaca que "a noção de representação se achou introduzida em três retomadas, cada vez com uma determinação totalmente diferente da natureza do fenômeno designado". Entre os anos de 1924-1926, surge como representação mental para evocar um objeto ausente. Por volta de 1955-1960, surge como representação interna ou computacional (privilegiando o tratamento e a codificação da informação) e, depois como representação semiótica (privilegiando as conversões, significações diferentes).

Conforme citado por Duval (2009, p. 30), Piaget usou essa noção de "evocação dos objetos ausentes" para caracterizar a novidade do último estágio da inteligência sensorial-motora. Assim, a representação mental é a interiorização e a percepção que se desenvolvem e se efetuam como uma interiorização das representações semióticas.

Conforme Duval (2003), as representações semióticas não são internas nem externas, pois

> [...] muitas vezes, as representações "mentais" não passam de representações semióticas interiorizadas. As representações mentais úteis ou pertinentes em matemática são sempre representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representações semióticas. Pois, em produção externa, pode-se tratar e controlar um número consideravelmente mais elevado de informações do que em produção interna, estando a vantagem de uma produção interna em sua maior rapidez e seus "atalhos" (p. 31).

Assim, para imaginar geometricamente, é necessário desenvolver essa prática interna ou mental, conforme já citado por Conway *et al.* (2010), aliada à importância de se transitar entre os diferentes registros de representação semiótica (DUVAL, 2003). Em outras palavras, a partir desse processo, a aprendizagem matemática provavelmente ocorrerá.

Aprendizagem em geometria

Para Duval (1995), o processo cognitivo no ensino e na aprendizagem de geometria envolve funções epistemológicas específicas, como a visualização, a construção e o raciocínio:

- Visualização: processo pelo qual a afirmação ou ilustração tem seu espaço de representação examinado. Ocorre a exploração heurística de uma situação, seja ela subjetiva ou só uma olhada.
- Construção: utiliza configurações como um modelo em que as ações representadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados.
- Raciocínio: relação entre o discurso e o conhecimento, entre a prova e a demonstração.

Outros autores também definem e salientam a importância da visualização na aprendizagem da geometria. Leivas (2009, p. 22) define a visualização como "um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos". Para Arcavi (1999),

> [...] visualização é a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e comentário sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de desenhar e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias não conhecidas e avançar na compreensão (ARCAVI, 1999, p. 217).

Ainda, segundo Duval (1988, p. 58), "[...] a resolução de problemas em geometria e a entrada na forma de raciocínio que essa resolução exige dependem da conscientização e da distinção das formas de apreensão das figuras". O autor destaca quatro tipos de apreensão (Quadro 1).

Tipos de apreensões	Função
Perceptiva ou gestáltica	Identificação ou reconhecimento, interpretação das formas das figuras.
Discursiva	Interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados.
Operatória	Modificações geométricas possíveis.
Sequencial	Construção geométrica, descrição com objetivo de construir a figura.

Quadro 1 – Tipos de apreensões em geometria. Fonte: adaptado do Duval (2012b, p. 23).

Para Duval (2011), a figura é a propriedade do objeto representado que define o desenho, sendo a apreensão deste artefato apenas por meio do conceito. Assim, quando se olha uma figura, há a tendência, pela apreensão perceptiva da figura, de usar determinada fórmula ou algoritmo para resolver, mas o que a ela representa está no enunciado.

Não importa qual a figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, isto é, a apreensão perceptiva de formas, e outra controlada que torna possível a aprendizagem, ou seja, a interpretação discursiva de elementos figurais (DUVAL, 2012b, p. 120).

Duval (1997) conceitua, ainda, a visualização como a fusão entre as percepções perceptiva e operatória; a figura geométrica como resultado das apreensões perceptiva e discursiva; a heurística e a demonstração como resultado da operatória x discursiva e a construção geométrica gerada pela fórmula discursiva x sequencial + perceptiva. Essas combinações estão muito presentes em vários problemas da geometria.

Moretti e Brandt (2015) trazem a evolução dos olhares em geometria: do olhar botanista (reconhece formas e as diferencia, observando semelhanças e diferenças) ao agrimensor (faz medições e as utiliza). Ambas sendo olhares icônicos e mais: o olhar construtor (usa instrumentos de medida) e o olhar inventor (adiciona traços e modificações na figura para buscar procedimentos de resolução) como olhares não icônicos.

Segundo Almouloud (2019, p. 163), "A apreensão operatória das figuras depende das modificações que a figura pode sofrer". Assim, a apreensão operatória, apresenta vários tipos de modificação figural (Quadro 2).

Tipo de modificação figural	Operações que constituem a produtividade heurística	Fatores que interferem na visibilidade
Modificação mereológica	Reconfiguração intermediária; Imersão	Característica convexa ou não convexa das partes elementares
Modificação ótica	Superpossibilidade Anamorfose	Recobrimento parcial; Orientação
Modificação de posição	Rotação; Translação	- Estabilidade das referências do campo perceptivo para o suporte das figuras

Quadro 2 – Tipos de apreensão operatória de figuras. Fonte: adaptado de Duval (2012b, p. 127)

Conforme Almouloud (2019, p. 163-164),

> [...] são associados a essas apreensões três tipos de problemas:
> Nível 1: aqueles em que há congruência operatória da figura e um tratamento matemático, neste caso uma apreensão discursiva explícita não é necessária.
> Nível 2: aqueles em que a apreensão discursiva é necessária, porque não há mais congruência da figura ou porque é explicitamente pedido como justificativa.
> Nível 3: aqueles que exigem mais que uma apreensão discursiva, o recurso aos esquemas formais lógicos específicos tais como o raciocínio disjuntivo, o raciocínio por contraposição".

Nesta seção do artigo, apresentou-se a fundamentação que norteou a presente pesquisa, especialmente no que diz respeito aos processos de aprendizagem em geometria, à luz de autores que abordaram o assunto. Na sequência, indica-se a metodologia utilizada.

Metodologia

Diferentemente do que acontece com exercícios que tratam de cálculos mentais, as tarefas propostas durante os encontros do grupo não se concentraram no treinamento de uma habilidade específica. Pelo contrário, pretendeu-se, por meio dos problemas propostos, promover uma estratégia na qual os participantes do grupo deveriam: em um primeiro momento, conceber e imaginar uma situação geométrica, descrevendo as implicações desta; posteriormente, com o auxílio de material concreto, construir, experimentar e explorar as visualizações imaginadas para entender suas implicações. Com isso, buscou-se atender ao objetivo da pesquisa: investigar se existe conexão entre imagens mentais, visualização e notações matemáticas convencionais.

A tarefa descrita neste artigo, principal foco da pesquisa, foi realizada no primeiro semestre de 2019, envolvendo os membros do um grupo de estudos e pesquisa em geometria. Os participantes são alunos de graduação, mestrado, doutorado, os quais serão denotados pelas letras do alfabeto (A até G), a fim de não serem identificados. A tarefa foi liderada por um dos autores do artigo, em um único encontro de duas horas.

Conforme Severino (2016, p. 81), "O trabalho científico em geral, do ponto de vista lógico, é um discurso completo. Tal discurso, em suas grandes linhas, pode ser narrativo, descritivo ou dissertativo". Considera-se, aqui, o discurso dissertativo, de modo que o objetivo da pesquisa seja alcançado na medida em que se buscam os argumentos dos participantes na resolução dos dois problemas, os quais foram adaptados de Conway *et al.* (2010). Os dois problemas são:

1. Sem fazer nenhum esboço gráfico, apenas visualizando com sua mente, corte cada "canto" de um quadrado até os pontos médios dos lados, depois responda:

1.1) Qual figura resta? Justifique.

1.2) Como você pode montar os quatro "cantos" para fazer outro quadrado? Faça um registro figural ou em língua natural.

1.3) Utilize o material fornecido para realizar a atividade.

1.4) Suas conjecturas visuais mentais se concretizam a partir do uso do recurso material empregado? Justifique.

2. Sem fazer nenhum esboço gráfico, apenas visualizando com sua mente, "divida" os lados de um triângulo equilátero em três partes. Corte cada "canto" do triângulo até as marcas das divisões.

2.1) O que você obtém? Justifique.

2.2) Utilize o material fornecido para realizar a atividade.

2.3) Suas conjecturas visuais mentais se concretizam a partir do uso do recurso material empregado? Justifique.

No que diz respeito ao procedimento de coleta de dados, Severino (2016) postula que os raciocínios envolvidos em uma pesquisa científica são obtidos a partir dos "dados colhidos nas fontes consultadas e a partir das ideias descobertas pela reflexão dos autores" (p. 161). Para o autor, "a construção lógica do trabalho científico é o arranjo encadeado dos raciocínios utilizados para a demonstração da hipótese formulada no início" (p. 161).

Com tal amparo para a coleta de dados, foi fornecido o problema a ser compreendido e resolvido. Cada um dos indivíduos fez o levantamento da hipótese, incluindo uma justificativa. Para tal, foi distribuída uma ficha para o respectivo registro, com a identificação pela letra designada. Após o término do trabalho, esse documento foi devolvido aos pesquisadores envolvidos (os autores do artigo).

No segundo ponto, os participantes deveriam imaginar possibilidades, fazer os registros em linguagem natural e figural. Após, forneceu-se um material previamente elaborado, a fim de que os indivíduos pudessem estabelecer conexões entre as imagens mentais criadas e o material concreto para, finalmente, comprovar ou não as hipóteses inicialmente construídas.

Na sequência, analisam-se os dados coletados, à luz dos fundamentos teóricos citados.

Análise de dados

Na resolução do primeiro item da atividade, seis participantes responderam que a figura formada era um quadrado, e apenas o participante D afirmou que era um losango. A justificativa apresentada por esse participante consta da Figura 1.

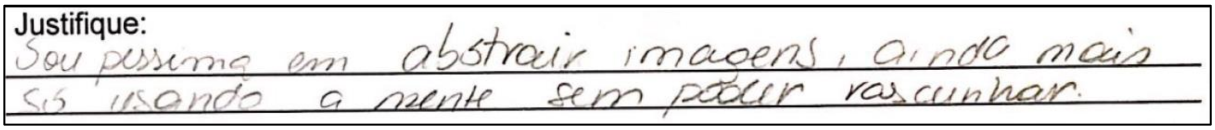

Justifique:
Sou péssima em abstrair imagens, ainda mais só usando a mente sem poder rascunhar.

Figura 1 – Resposta do participante D

Os alunos A, E e F deram justificativas análogas à anterior. Exemplifica-se, aqui, a justificada de F, na Figura 2.

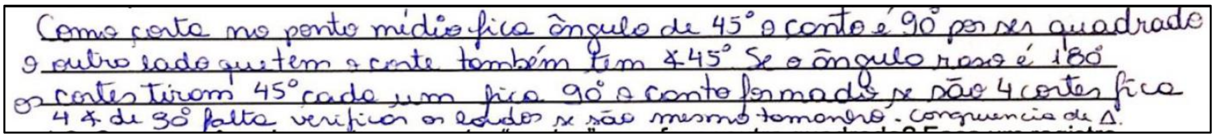

Como corte no ponto médio fica ângulo de 45° o canto é 90° por ser quadrado o outro lado que tem o corte também tem ∢45° Se o ângulo raso é 180° os cortes tiram 45° cada um fica 90° o canto formado se são 4 cortes fica 4 ∢ de 90° falta verificar os lados se são mesmo tamanho. Congruência de Δ.

Figura 2 – Justificativa do participante F

Observa-se que, nesses casos, nas justificativas apresentadas, houve a preocupação em explicitar matematicamente que, de fato, a figura formada era um quadrado. Outros participantes justificaram suas respostas antecipando o item 1.2, como no caso dos participantes B, C e G. A Figura 3 exemplifica.

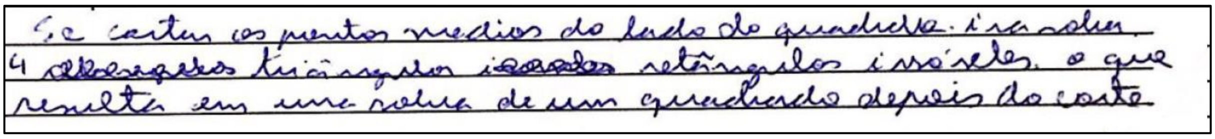

Se cortar os pontos medios do lado do quadrado irá sair 4 triângulos retângulos isósceles, o que resulta em uma sobra de um quadrado depois do corte

Figura 3 – Resposta do participante G

Conforme Duval (2009), a imagem mental foi usada para evocar o objeto ausente e expressá-lo em língua natural, privilegiando os tratamentos com a codificação da informação. Além disso, o referido processo envolve, de acordo com o autor, a representação semiótica durante a conversão, utilizando diferentes significações para justificar a imagem mental por meio da língua natural e da utilização de símbolos matemáticos na escrita algébrica.

Nas justificativas dos participantes, percebe-se, no processo cognitivo da construção, que as ações representadas e os resultados observados estão ligados aos objetos matemáticos em questão, representados em língua natural e escrita algébrica (DUVAL, 1995). Na resolução do segundo item, todos os alunos utilizaram representações figurais para ilustrar a situação solicitada, como na Figura 4.

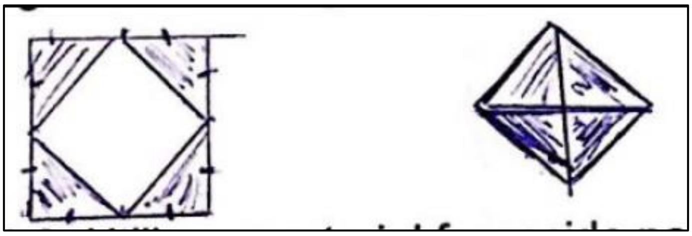


Figura 4 – Resposta do participante F

Na resolução do item 1.2 (Figura 4), ocorre a conversão da língua natural para a figura geométrica, algo que também pode ser vislumbrado nas respostas dos demais participantes, apesar de igualmente trazerem traços imprecisos, devido à falta de instrumentos de desenho como régua e compasso. Esse tipo de tarefa encontra amparo na seguinte afirmação:

> (...) parece fornecer diretamente para ver, mesmo que cada figura seja sempre uma configuração particular. De fato, quando as metas do ensino para reconhecer ou construir formas elementares de cultura, a lacuna entre a percepção da figura e a maneira matemática de ver figuras está se ampliando. A visualização matemática, no caso de figuras geométricas, leva a uma representação não icônica de formas físicas. Diferente de representações icônicas, as figuras não são suficientes para saber quais são os objetos denotados (DUVAL, 2000, p. 62).

Além disso, para o mesmo objeto, é possível haver figuras bastante diferentes: por exemplo, há duas figuras típicas para um paralelogramo e apenas uma é biologicamente a forma de um paralelogramo. Mas, quando se trata de resolver problemas de idade, a complexidade de usar a visualização geométrica aumenta rapidamente para a maioria dos alunos, mesmo nos níveis superiores. Essas dificuldades, que são as mais inibitórias para os estudantes, "devem ser analisadas em relação à exigência conflitante e à lacuna entre os processos de pensamento convencional e os processos matemáticos" (DUVAL, 2000, p. 63).

Assim, a Figura 4 pode ou não representar um quadrado ou um losango, visto que, dentro da apreensão operatória das figuras, a modificação de posição de rotação e translação, que são operações que constituem a produtividade heurística, podem sofrer fatores que interferem na visibilidade, como a estabilidade das referências do campo perceptivo para o suporte das figuras. Pelo desenho apresentado (Figura 4), os lados parecem ter medidas distintas, de modo a ilustrar o fenômeno descrito. Porém, isso ocorre porque foram construídas sem material e sem unidades de medidas apropriadas, sendo, portanto, apenas um esboço da visualização.

Ao solicitar aos participantes que utilizassem o material fornecido para realizar a atividade, observou-se que eles não hesitaram em executar o que foi proposto, mostrando segurança em relação ao objeto que estavam manipulando, como ilustra a Figura 5.

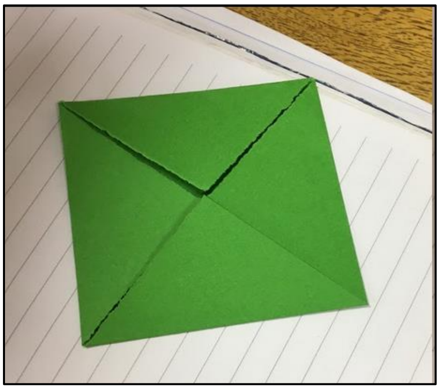


Figura 5 – Manipulação do material fornecido (participante B)

Percebe-se, até esta etapa da análise, dois tipos de apreensão destacadas por Duval (1988): por um lado, a interpretação da forma da figura está presente na apreensão perceptiva; por outro lado, a interpretação dos elementos da figura, descritos em linguagem natural nos itens anteriores, corresponde às modificações geométricas que foram possíveis com o material concreto durante a apreensão operatória. Faltou, apenas, a apreensão sequencial, que possibilitaria a construção a partir da descrição. Em outras palavras, os participantes utilizaram a construção sem a descrição dos passos.

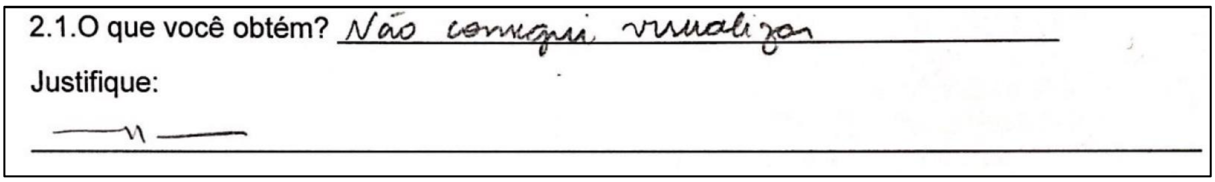
Para finalizar a primeira atividade, foi questionado aos participantes: Suas conjecturas visuais mentais se concretizam a partir do uso do recurso material empregado? Solicitou-se que justificassem suas respostas.

O participante D não realizou o último item dessa atividade. Os demais responderam de forma afirmativa, justificando que, com a utilização do material concreto, foi mais fácil e mais rápido perceber o que estava sendo proposto.

Assim, vindo ao encontro da forma como Leivas (2009) definiu a visualização, percebe-se claramente como o processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar um objeto matemático, auxiliou na resolução do problema geométrico com o material concreto, pois, antes de chegar até ele, passou-se pelas imagens mentais, pela visualização e pelas notações matemáticas.

Partiu-se para a realização da segunda atividade, também adaptada de Conway *et al.* (2010): Sem fazer nenhum esboço gráfico, apenas visualizando com sua mente, "divida" os lados de um triângulo equilátero em três partes. Corte cada "canto" do triângulo até as marcas das divisões.

Na resolução do item 2.1: O que você obtém? Os alunos A e B não conseguiram visualizar qual figura geométrica seria formada, conforme ilustra a Figura 6.



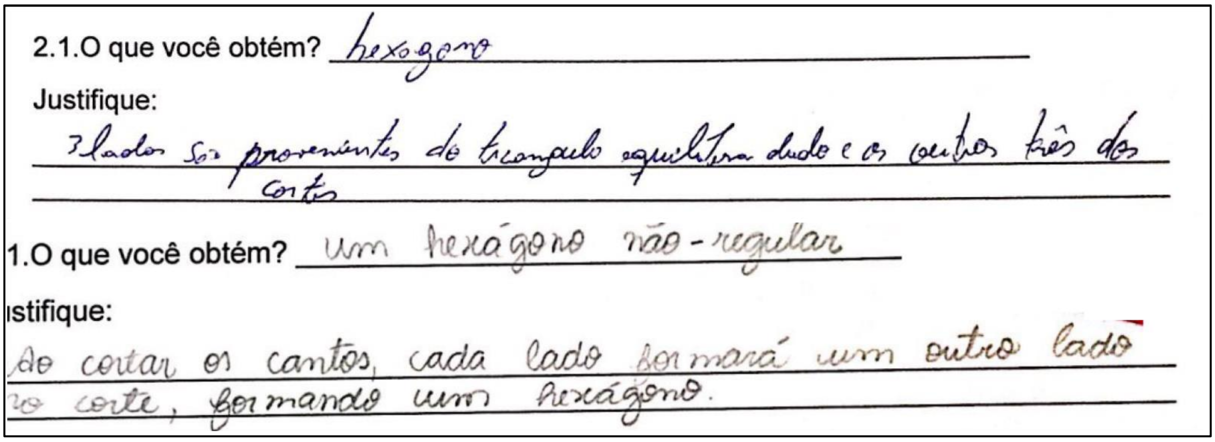
2.1.O que você obtém? Não consegui visualizar

Justifique:

—— " ——

Figura 6 – Resposta do aluno A para o primeiro item da Atividade 2

O aluno C afirmou que se tratava de um hexágono não regular, e os demais responderam que a figura formada era um hexágono (Figura 7).


2.1.O que você obtém? hexágono
Justifique:
3 lados são provenientes do triangulo equilátero dado e os outros três dos cortes

1.O que você obtém? Um hexágono não-regular
ıstifique:
Ao cortar os cantos, cada lado formará um outro lado ao corte, formando um hexágono.

Figura 7 – Resposta dos alunos E (primeira) e C (segunda) para o primeiro item da atividade 2

O segundo item da atividade era: “Utilize o material fornecido para realizar a atividade”. Foi interessante observar a percepção do aluno A, o qual, a princípio, não tinha conseguido visualizar. Como o problema propunha ”Cortar cada “canto” do triângulo até as marcas das divisões”, foi esse o procedimento adotado, obtendo a representação ilustrada na Figura 8.

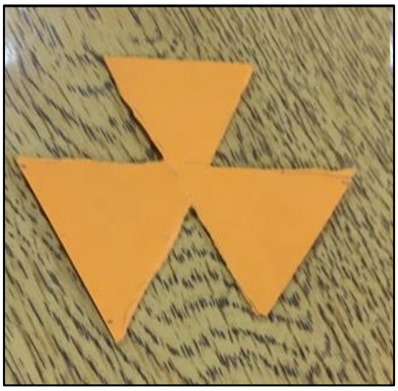


Figura 8 – Representação via material concreto do aluno A

Os demais participantes, ao realizarem a manipulação do material, conseguiram perceber que o polígono resultante poderia ser um hexágono, não necessariamente regular, como ilustra a Figura 9.

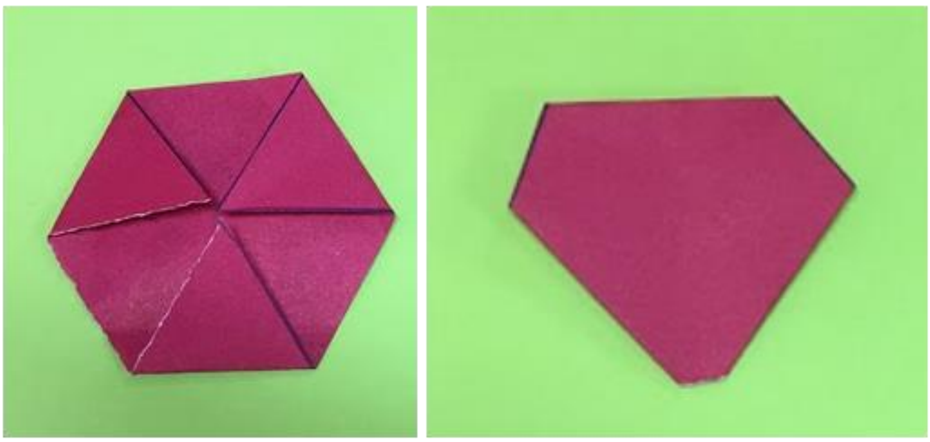


Figura 9 – Manipulação do material fornecido (participante C)

A dificuldade, nesta segunda parte das atividades, está na apreensão operatória das figuras. A modificação ótica permite uma superpossibilidade de operações que constituem a produtividade heurística, a exemplo de quando os participantes perceberam que o polígono resultante poderia ser um hexágono não necessariamente regular, como observa-se na percepção do aluno A, que a princípio não tinha conseguido visualizar na Figura 8.

Nessa atividade, por exemplo, pôde-se perceber que nem sempre um objeto matemático é imaginado e compreendido da mesma forma por pessoas diferentes, visto que o mesmo artefato pode ter um signo e um significado diferente para cada observador.

> A compreensão da matemática requer a coordenação entre pelo menos dois registros, recorrer à linguagem natural como na fala comum e referir-se a figuras geométricas como se fossem tão óbvias quanto outras imagens visuais, não ajuda, mas aumenta a confusão na compreensão e aprendizagem (DUVAL, 2000, p. 67).

Enfatiza-se a importância da visualização, da imaginação e da coordenação entre, pelo menos, dois registros de representação semiótica. Por isso, a importância da imaginação e da visualização na aprendizagem em geometria.

> É somente através da representação semiótica que os números matemáticos podem ser alcançados e usados. O progresso no conhecimento dos números humanos tem estado intimamente ligado ao progresso dos sistemas numéricos. De fato, a oposição entre sistemas mentais e semióticos é enganosa porque é o resultado da confusão entre dois aspectos heterogêneos na produção de representação: o modo fenomenológico e o sistema usado. Além disso, no modo fenomenológico externo, devemos distinguir os modos oral e visual (escrita, desenho). As representações semióticas não são nem mentais como imagens de memória (bl) nem material como peças que podem ser manipuladas fisicamente" (DUVAL, 2000, p. 60).

Conclusão

A partir das análises e observações das atividades propostas, verificou-se que a imagem mental de um objeto matemático leva em consideração suas características e definições, assim como sua representação interna e externa, o que gera a visualização e possíveis registros de representação com notações matemáticas convencionais. Isso mostra uma conexão entre os termos estudados.

> O progresso na matemática envolveu o desenvolvimento de vários sistemas semióticos a partir da primitiva dualidade dos modos cognitivos, imagem e linguagem, que estão ligados aos receptores sensoriais informacionais: visão e audição. Por exemplo, as notações simbólicas originaram-se da linguagem escrita e levaram à escrita algébrica. Para visualização, a construção de figuras planas com ferramentas, e em perspectiva (DUVAL, 2000, p. 59).

Por essa razão, coaduna-se, neste trabalho, com a afirmação de Conway *et al.* (2010): a imaginação geométrica é algo que precisa ser desenvolvido com a prática. Aliando essa concepção à teoria de Duval, percebe-se e comprova-se, nesta pesquisa, que elas estão perfeitamente interligadas, uma vez que ambas foram conectadas em duas atividades envolvendo criatividade, imaginação e visualização matemática. Com isso, acredita-se que o objetivo de "investigar se existe conexão entre imagens mentais, visualização e notações matemáticas convencionais" foi alcançado, na medida em que a análise dos dados dos investigados comprovou que, com o auxílio de materiais concretos adequados ao grupo focal, os alunos puderam levantar e comprovar hipóteses, especialmente na sequência com a segunda atividade. Esta, por ser um tanto similar à primeira, fez com que o que havia sido levantado *a priori* pudesse ser ampliado posteriormente. Assim, ao que tudo indica, essa sequência de atividades possibilitou a aprendizagem geométrica.

Diante do que foi exposto, entende-se que esta investigação pode contribuir com professores de diversos níveis de ensino, sobretudo na replicação das atividades apresentadas e discutidas ao longo destas páginas. Desse modo, presume-se que o presente estudo possa propiciar novas abordagens para o ensino e a aprendizagem de geometria.

Referências

ARCAVI, Abraham. The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, v. 52, n. 3, p. 215-241, 2003.

ALMOULOUD, Saddo Ag. DIÁLOGOS DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA COM OUTRAS TENDÊNCIAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. *Caminhos da Educação Matemática em Revista* (Online), v. 9, n. 1, 2018.

CONWAY, John et al. *Geometry and the Imagination*. Lecture notes published on the WorldWideWeb, 2010.

DUVAL, Raymond. Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. Annales de didactique et de sciences cognitives. *IREM de Strasbourg*, v.1, p.57-74, 1988.

DUVAL, Raymond. *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang, 1995.

DUVAL, Raymond. *La notion de registre de représentation sémiotique et l'analyse du fonctionnement cognitif de la pensée*. In: Curso ministrado na PUC/SP, 1997.

DUVAL, Raymond. Basic Issues for Research in Mathematics Education. In: *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*. 24th, Hiroshima, Japan, 2000.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. MACHADO, S. D. (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.* Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

DUVAL, Raymond. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, v. 61, n. 1-2, p. 103-131, 2006.

DUVAL, Raymond. *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. São Paulo: PROEM, v. 1, 2011.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Trad Méricles Thadeu. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência Écarts sémantiques et cohérence mathématique: introduction aux problèmes de congruence. Revemat: *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012a.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Trad Méricles Thadeu. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência Approche cognitive des problèmes de geométrie en termes de congruence. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012b.

LEIVAS, José Carlos Pinto. *Imaginação, Intuição e Visualização: A riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de Cursos de Licenciatura de Matemática*. Tese (Doutorado em Educação, Universidade Federal do Paraná), Curitiba, PR, 2009, 294p.

MORETTI, Méricles Thadeu; BRANDT, Celia Finck. Construção de um desenho metodológico de Análise Semiótica e Cognitiva de Problemas de Geometria que envolvem Figuras. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 17, n. 3, p. 597-616, 2015.

NERES, Raimundo Luna; MIGUEL, José Carlos; GUTERRES, Camila Everton. Explorando Registros Figurais: implicações para o desenvolvimento do pensamento geométrico. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, v. 13, n. 25, p. 33-45, 2016.

PRESMEG, Norma C. Visualisation in high school mathematics. *For the learning of mathematics*, v. 6, n. 3, p. 42-46, 1986.

SEVERINO, Antônio Joaquim. *Metodologia do trabalho científico*. Cortez editora, 2016.