ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p419-437

Generalização de padrões algébricos no ensino via resolução de problemas: compreensão de licenciandos em Matemática

Generalization of algebraic patterns in teaching via problem solving: understanding of undergraduate students in Mathematics

MARCELO CARLOS DE PROENÇA [1]

Resumo

O objetivo do artigo é analisar a compreensão de licenciandos em Matemática no processo de generalização de padrões algébricos, voltado ao trabalho que envolve o ensino via resolução de problemas. Realizamos um estudo exploratório e descritivo no contexto de aulas de uma disciplina do curso de licenciatura em Matemática, frequentadas por 18 estudantes do quarto ano, os quais vivenciaram o processo de generalização de padrões de conteúdos do Ensino Médio. Os resultados mostraram que 12 participantes desenvolveram corretamente o processo de generalização para obter a expressão matemática do conteúdo proposto. Ao contrário disso, verificamos que seis participantes não conseguiram fazer uso adequado de casos particulares. Concluímos que a maioria dos participantes construíram compreensão adequada sobre o processo de generalização de padrões para abordar um conteúdo algébrico no ensino via resolução de problemas. Apesar de seis participantes apresentarem dificuldades, é possível ampliar seus conhecimentos em atividades posteriores de sua formação.

Palavras-chave: *Formação Inicial, Resolução de Problemas, Generalização, Padrões.*

Abstract

The purpose of this article is to analyze the understanding of undergraduate students in Mathematics in the process of generalization of algebraic patterns, focused on the work that involves teaching via problem solving. We conducted an exploratory and descriptive study in the context of classes in a discipline of the degree course in Mathematics attended by 18 students of the fourth year, who experienced the process of generalization of patterns of contents of High School. The results showed that 12 participants correctly developed the generalization process to obtain the mathematical expression of the proposed content. In contrast, we found that six participants failed to make adequate use of particular cases. We conclude that most participants constructed an adequate understanding of the process of generalization of patterns to address algebraic content in teaching via problem solving. Although six participants present difficulties, it is possible to increase knowledge in later activities of their formation.

Keywords: *Initial Formation, Problem Solving, Generalization, Patterns.*

[1] Doutor na área de Ensino de Ciências e Matemática pela UNESP, *campus* de Bauru-SP, professor do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM), Maringá-PR – mcproenca@uem.br

Introdução

Um dos objetivos do ensino da Matemática escolar da Educação Básica é o de levar nossos alunos a desenvolverem o pensamento algébrico (BRASIL, 2017, 2018). Apesar disso, no que se refere aos direcionamentos ao ensino de álgebra na escola, necessárias à formação de professores, Araújo (2008), tendo em vista o panorama que deu sobre um cenário atual de diferentes concepções de álgebra e da necessidade do desenvolvimento do pensamento algébrico, enfatizou que:

> O enfoque a partir da observação, da regularidade de ocorrência dos fenômenos e de generalizações, muitas vezes não faz parte do ensino da álgebra na sala de aula. Atividades como procurar padrões em seqüências, procurar a regularidade de um fenômeno, trabalhos com proporcionalidades e generalizações podem auxiliar o desenvolvimento do pensamento algébrico. (ARAÚJO, 2008, p. 341).

Concordamos com Araújo (2008), que a ausência do enfoque do trabalho que direcione o aluno à observação, à busca de regularidades e de generalizações pode prejudicar o desenvolvimento do seu pensamento algébrico. Tal ausência pode estar relacionada à formação de professores, pois estudos mostraram, por exemplo, que professores não utilizavam em suas aulas, o trabalho envolvendo a observação e a generalização de padrões (SANTOS, 2008; SILVA, 2009). Já sobre conhecimentos de professores e de futuros professores na resolução de atividades que exigiam a obtenção de padrões algébricos, estudos mostraram que ainda há lacunas para seguir o processo de generalização de padrões (AMÉRICO, 2016; BAQUEIRO et al., 2016).

Nesse sentido, é importante que na formação de professores e, especificamente para este artigo, na formação inicial de professores que ensinam Matemática, seja abordado o trabalho para favorecer conhecimentos direcionados ao ensino e à aprendizagem para tratar do processo de generalização de padrões algébricos. Para tal, além de aprender a estrutura que faz parte desse processo, é importante que o futuro professor também aprenda sobre como conduzi-lo em sala de aula. Uma alternativa pedagógica é o uso do problema como ponto de partida para introduzir determinado conteúdo matemático, entendida por alguns autores como abordagem de ‘ensino via resolução de problemas’ (SCHROEDER; LESTER, 1989; PROENÇA, 2018).

Diante disso, tivemos como objetivo no presente artigo, analisar a compreensão de licenciandos em Matemática no processo de generalização de padrões algébricos voltado ao trabalho que envolve o ensino via resolução de problemas de conteúdos relativos ao Ensino Médio. Tal compreensão está relacionada à formação de professores no que se refere à constituição de conhecimentos necessários ao trabalho docente. Neste caso, envolve *conhecimento do assunto da matéria*, segundo Shulman (1986), uma vez que se refere a conhecimentos sobre o processo de generalização de padrões, bem como envolve *conhecimento pedagógico do conteúdo*, pois se refere às escolhas dos problemas, no ensino via resolução de problemas, para poder tratar desse processo de generalização e, assim, abordar o novo conteúdo.

A generalização de padrões no ensino via resolução de problemas

Na perspectiva de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 87), o pensamento algébrico é aquele que envolve “[...] percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização”.

Especificamente a respeito do processo de generalização, Dreyfus (1991) enfatizou que a generalização é um processo mental, constituinte de parte do pensamento matemático avançado e que auxilia a construir estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas. Na visão desse autor, o processo de generalização é entendido no sentido de que “generalizar é derivar ou induzir a partir de elementos, para identificar pontos em comum, para expandir os domínios de validade.” (DREYFUS, 1991, p. 35, tradução nossa).

Uma explicação semelhante e mais detalhada sobre esse processo pode ser constatada na perspectiva apontada por Radford (2006), o qual inferiu a seguinte definição para uma generalização algébrica:

> Generalizar um padrão *algebricamente* reside na capacidade de *apreender* uma regularidade, percebida em alguns elementos de uma sequência S, sabendo que esta regularidade se aplica a *todos* os termos de S e sendo capaz de usá-la para fornecer uma *expressão* direta de qualquer termo de S. Em outras palavras, a generalização algébrica de um padrão repousa na percepção de uma regularidade local que é então *generalizada* para todos os termos da sequência e que serve como uma garantia para construir expressões de elementos da sequência que permanecem além do campo perceptivo. (RADFORD, 2006, p. 5, tradução nossa, grifos do autor).

Esses ‘elementos’ mencionados por Dreyfus (1991) e Radford (2006) podem ser entendidos como os casos particulares, obtidos a partir da estrutura matemática que deriva das situações de Matemática que são analisadas. Assim, esses casos particulares, quando estão relacionados à obtenção de um padrão algébrico, ajudam a expandir para as respectivas expressões/fórmulas.

Na situação apresentada por Proença (2018, p. 68) para ilustrar a generalização de um padrão, *"O restaurante de Toni tem 30 mesas quadradas pequenas para serem usadas em um banquete. Cada mesa pode acomodar somente uma pessoa em cada lado. Se as mesas forem colocadas juntas para fazer uma mesa mais longa, quantas pessoas podem se sentar à mesa?",* a estrutura matemática que se pode organizar é proveniente, em ordem crescente, dos seguintes quatro casos particulares: em 1 mesa se sentam 4 pessoas; em 2 mesas, 6 pessoas; em 3 mesas, 8 pessoas; em 4 mesas, 10 pessoas. Dessa forma, a partir da apreensão de regularidades, conforme mencionou Radford (2006), é possível obter o domínio de validade, ou seja, generalizar para o padrão, neste caso, para a expressão 'P = 2n + 2', em que P representa o total de pessoas que podem se sentar à mesa e n, a quantidade de mesas a serem consideradas.

Dessa forma, referente ao ensino de álgebra em sala de aula, identifica-se na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017, 2018), que a construção, o aprofundamento e a ampliação do pensamento algébrico dos alunos, especialmente sobre a generalização de padrões, podem ser conduzidos por meio do desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas. Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) já apontavam esse trabalho como foco da Educação Algébrica na escola, os quais destacaram que a primeira etapa para direcionar os alunos a desenvolverem o pensamento algébrico é o uso de situações-problema, uma vez que, ao buscar resolvê-las, é possível expressar como pensamos e, assim, construir e desenvolver a linguagem algébrica.

O uso de situações-problema já era incentivado nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998) como estratégia de ensino de Matemática, no sentido de que o problema deve ser o ponto de partida. Autores como Schroeder e Lester (1989) já defendiam o uso do problema como ponto de partida no ensino, bem como autores como Allevato e Onuchic (2014) e Proença (2018) sustentam suas propostas para a condução do ensino de Matemática no viés de que o problema deve ser o ponto de partida para introduzir novos conteúdos de Matemática.

De forma específica, Schroeder e Lester (1998) destacaram que o uso de problemas como primeiro passo para se ensinar e aprender Matemática é uma abordagem de ensino que denominaram de *ensinar via resolução de problemas*, a qual permite aos alunos relacionarem suas ideias às ideias presentes no problema, bem como ampliarem suas compreensões de Matemática. Nessa abordagem:

> O ensino de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas são desenvolvidas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. [...]. A aprendizagem da matemática, desse modo, pode ser vista como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica matemática) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com esses símbolos). (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 33, tradução nossa).

Essa mesma perspectiva do 'ensino via resolução de problemas' foi considerada por Proença (2018) em sua proposta de condução de ensino, denominada de *Ensino-aprendizagem de Matemática via resolução de problemas.* Nesta proposta, o autor sugere uma sequência de cinco ações de ensino para que o professor possa organizar e conduzir aulas em que o estudo do novo conteúdo ocorra pela introdução de uma situação da Matemática (possível problema), a saber: escolha do problema, introdução do problema, auxílio aos alunos durante a resolução, discussão das estratégias dos alunos, articulação das estratégias dos alunos ao conteúdo.

Dessas cinco ações, vamos tratar aqui da primeira: 'escolha do problema'. Segundo Proença (2018), a *escolha do problema* é a ação principal a ser realizada pelo professor, uma vez que a situação da Matemática escolhida (possível problema) deve permitir atingir os seguintes objetivos:

> O principal consiste em direcionar os alunos a utilizar conceitos, princípios e procedimentos matemáticos aprendidos anteriormente durante a escolarização para resolver a situação de matemática. O segundo é justamente levá-los a construir o conteúdo/conceito/assunto a ser introduzido, *o que envolve a construção* do conceito em si ou *de uma respectiva fórmula/expressão matemática por meio de um processo de generalização*. O terceiro é oriundo dos anteriores e busca propiciar condições para que os alunos estabeleçam relações entre os conhecimentos matemáticos utilizados e entre estes e o novo conhecimento. (PROENÇA, 2018, p. 46, grifos nossos).

Dessa forma, pode-se afirmar que um dos objetivos nesse ensino de Matemática é o de desenvolver o pensamento algébrico dos alunos voltado, especificamente, à construção de expressões/fórmulas matemáticas (relativas ao novo conteúdo) por meio do processo de generalização de padrões. Entendemos que essa construção, na visão de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), faz parte de uma atitude pedagógica que tem como um de seus objetivos a construção da linguagem simbólico-formal do pensamento algébrico.

Para tal, Proença (2018) indica que, nessa ação de escolha do problema, é importante que se faça uma previsão de possíveis estratégias de resolução. No caso de se abordar o processo de generalização de padrões algébricos, seria importante prever como determinada situação da Matemática seria resolvida de modo que fosse possível aos alunos compreender esse processo e, assim, obter a expressão/fórmula matemática. Finalmente, caberia ao professor levar os alunos a entenderem a articulação dessa expressão ao novo conteúdo a ser trabalhado em sala de aula.

Metodologia

O nosso estudo se insere na modalidade pesquisa participante, a qual, segundo Peruzzo (2003, p. 2), "consiste na inserção do pesquisador no ambiente natural de ocorrência do fenômeno e de sua interação com a situação investigada". Essa inserção e interação ocorreu ao longo de aulas frequentadas por 18 licenciandos em Matemática do quarto ano, nossos participantes. Desses estudantes, destaca-se que seis deles (L2, L3, L4, L12, L16 e L17) faltaram em alguma aula.

O ambiente natural do estudo ocorreu no contexto das aulas teóricas, que envolvia assuntos sobre Ensino Médio, de uma disciplina do curso de licenciatura em Matemática de instituição de ensino superior pública do interior do Estado do Paraná. Tais aulas ocorreram às segundas-feiras, período noturno, primeiro semestre de 2019, o que correspondeu ao total de seis dias (12 horas-aula).

Nas primeiras seis horas-aula trabalhamos as cinco ações de ensino do Ensino-aprendizagem de Matemática via resolução de problemas, proposta por Proença (2018), tomando como referência um exemplo proposto por esse autor e, depois, por meio da exploração em livros didáticos para escolher conteúdos e respectivas situações da Matemática para tratar de possíveis estratégias e possibilidades de articulações.

Nas duas horas-aula seguintes trabalhamos o processo de generalização de um padrão. Para tal, elaboramos a seguinte situação: *O Campeonato Brasileiro de 2019 da série A de Futebol inicia-se em 27 de abril e se encerra dia 08 de dezembro. Conta com 20 times, os quais jogam entre si ao longo desse período e o vencedor é o time que somar mais pontos. Como cada time joga duas vezes contra cada adversário, quantos jogos ocorrerão no Campeonato Brasileiro?* Assim, procedemos da seguinte forma para coletar nossos dados:

- Entregamos uma folha aos estudantes com essa situação, sendo pedido que: *'Resolva a situação como quiserem e depois explique o motivo de ter escolhido a forma de resolução adotada. Depois, comente sobre suas dificuldades'*. A princípio, queríamos verificar se os participantes fariam uso de um processo de generalização;

- Em seguida, após resolverem a situação, solicitamos que respondessem a um questionário com as seguintes perguntas: *1) Para você, o que é o pensamento algébrico?; 2) Para você, quando um aluno pensa algebricamente ao tentar resolver um problema?* Buscamos, com essas perguntas, evidenciar se mencionariam o processo de generalização de padrões;
- Logo após responderem ao questionário, entregamos novamente a situação acima, em outra folha, e pedimos: *'Encontre a resposta da situação por meio da determinação de uma expressão matemática. Depois, comente sobre suas dificuldades ou incertezas sobre a estratégia utilizada'*. Neste momento, quisemos verificar se conseguiriam obter uma expressão matemática pelo processo de generalização;
- Por fim, ao final da aula, passamos a discutir sobre as respostas dadas às perguntas do questionário. Nosso foco aqui, foi verificar as respostas inadequadas, discuti-las e formalizar a ideia com a definição sobre o significado de generalização.

Antes das duas horas-aulas seguintes, fizemos uma leitura preliminar das estratégias dos alunos, identificando que ninguém determinou um padrão pelo processo de generalização, conforme solicitado na segunda vez que resolveram a situação sobre o total de jogos. Assim, nas aulas foram feitos, em lousa, com a participação dos estudantes, alguns casos particulares (2 times, então 2 jogos; 3 times, então 6 jogos; 4 times, então 12 jogos; 5 times, então 20 jogos) pelo uso de diagrama (Exemplo: Times A↔B, correspondendo a dois jogos) para representar cada um desses casos. Em seguida, direcionamos os estudantes para colocar essas informações em uma tabela de modo que uma coluna foi a da quantidade de times (2, 3, 4, 5, ... t) e a outra, a respectiva quantidade de jogos (2, 6, 12, 20, ... J). Dessa forma, pedimos para que, a partir disso, e individualmente, encontrassem um padrão.

Terminada essa tarefa, fizemos uma discussão sobre as expressões obtidas. Dessa forma apresentamos e discutimos, por meio de *slides*, o significado de generalização segundo nosso referencial teórico. Em seguida, apresentamos uma síntese dos tipos de expressões matemáticas utilizadas pelos próprios participantes. Mostramos-lhes também, imagens das resoluções que utilizaram quando resolveram a situação anteriormente mencionada dos times e jogos. Discutimos sobre as razões que inviabilizavam suas estratégias de serem um processo de generalização. Discutimos, sobretudo, acerca do modo e da importância de abordar esse processo no Ensino-aprendizagem de Matemática via resolução de problemas.

Por fim, para o dia da avaliação da disciplina, solicitamos aos participantes que trouxessem um conteúdo que é ensinado no Ensino Médio e uma respectiva situação da Matemática (possível problema) para tratar da generalização de padrões algébricos. A atividade cobrada nessa avaliação, a qual teve duas horas-aula, e que correspondeu a este estudo, foi a seguinte: *'Indique um conteúdo matemático específico do Ensino Médio (que envolve expressão matemática) e uma situação da Matemática que possa introduzi-lo, conforme a ação de escolha do problema do Ensino-aprendizagem de Matemática via resolução de problemas. Dessa forma: Apresente a resolução dessa situação pela estratégia de se encontrar um padrão'*.

Tendo em vista os dados coletados, a análise dos dados foi feita com base nos pressupostos da pesquisa qualitativa, o que possibilitou explorar os conhecimentos dos participantes e apresentá-los de forma descritiva, baseada na ilustração por meio de imagens e palavras e na apresentação dos significados atribuídos pelos participantes, respeitando a forma como foram registrados (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Para tal, organizamos o eixo de análise denominado de: *Compreensão do processo de generalização de padrões* e, neste eixo, apontamos primeiramente: a) as estratégias iniciais utilizadas pelos participantes; b) o entendimento sobre o pensamento algébrico voltado à generalização de padrões algébricos; c) as estratégias quando tiveram que determinar uma expressão matemática; d) as estratégias utilizadas para dar prosseguimento aos casos particulares elencados. Ilustramos com imagens as resoluções dos participantes. Em seguida, apresentamos um quadro síntese dos conteúdos escolhidos pelos participantes, revelando aqueles que seguiram adequadamente o processo de generalização e os que tiveram dificuldades. Por fim, ilustramos um processo adequado que foi seguido e, ainda, um processo inadequado.

Compreensão do processo de generalização de padrões

As Tabelas 1, 2, 3 e 4 e as Figuras 1, 2 e 3 evidenciam as estratégias dos participantes para resolver a situação do total de times do Campeonato Brasileiro, tendo em vista favorecer-lhes e revelar a compreensão sobre o processo de generalização de um padrão. A Tabela 1 a seguir, mostra se os estudantes tentaram encontrar um padrão na primeira vez que resolveram a situação.

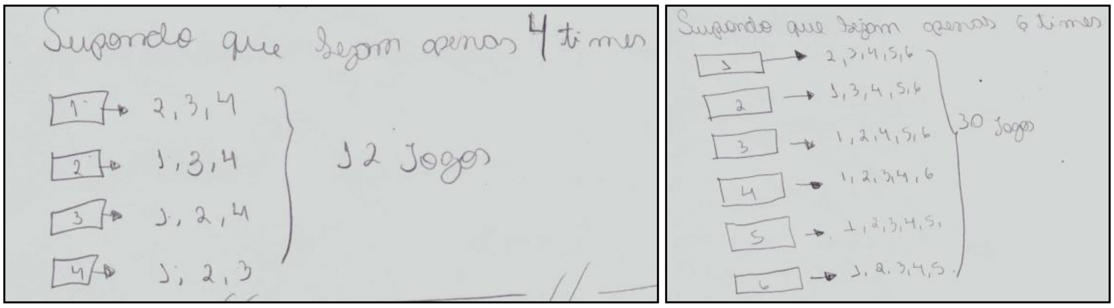
Tabela 1 – Estratégias utilizadas pelos participantes na primeira vez que resolveram a situação.

Estratégia utilizada	Participantes	Quantidade (n=16)
Utilizou dois casos particulares e encontrou o padrão	L13	1
Fez uma lista organizada da quantidade de jogos de cada time e depois utilizou a fórmula da soma dos termos de uma P.A.	L6 e L12	2
Fez uma dedução lógica (20 times x19 jogos cada = 380)	L5, L14, L16 e L18	4
Fez uma lista organizada da quantidade de jogos de cada time e depois adicionou os valores	L1, L3, L4, L7, L8, L9, L10, L11 e L15	9

Fonte: O autor.

De acordo com a Tabela1, nesse primeiro momento de resolução da situação, sem exigir encontrar uma expressão, percebe-se que, com exceção de L13, 15 licenciandos se valeram de outras estratégias para encontrar a resposta, porém nenhum destes o fez por meio do processo de generalização – pelo uso de casos particulares – para encontrar uma expressão que caracterizasse o padrão. No caso de L13, verifica-se na Tabela 1, que ele utilizou dois casos particulares e encontrou o padrão envolvido. No entanto, entendemos que L13 não conseguiu seguir pela via do processo de generalização justamente porque não organizou uma sequência de casos particulares que pudessem lhe possibilitar sustentar o padrão obtido, conforme se verifica na figura a seguir.

Figura 1 – Estratégia utilizada para resolver a situação.



Fonte: Resolução de L13.

Observa-se que L13 utilizou apenas os casos particulares para o total de jogos de quatro e de seis times. Segundo sua resolução, a expressão foi obtida somando-se o total de jogos em cada caso (12 jogos e 30 jogos), obtendo-se apenas o total de jogos de cada time para depois adicionar tudo.

Tendo em vista essa primeira resolução pelos participantes de nosso estudo da situação proposta, verificamos que resultado diferente ocorreu na pesquisa de Baqueiro et al. (2016) que, ao se investigar sobre os caracterizadores do pensamento algébrico, as resoluções da primeira atividade de generalização de padrões, a qual não exigia a determinação de uma expressão, mostraram que dos seis licenciandos em Matemática três conseguiram obter uma expressão e a resposta, correspondendo a 50% dos que conseguiram realizar a generalização.

Tendo em vista que nenhum estudante soube realizar generalização para encontrar um padrão, a tabela a seguir mostra como se enquadram as respostas dos participantes sobre o que é o pensamento algébrico, tendo como foco se identificavam o processo de generalização.

Tabela 2 – Categorias das respostas sobre o que é o pensamento algébrico.

categoria	Participantes	Quantidade (n=16)
Generalizar para encontrar um padrão	L1, L5, L8, L10 e L11	5
Resolver problemas de matemática por meio de uso de conteúdos algébricos	L3, L4, L6, L7,L9, L12, L13, L14, L15, L16 e L18	11

Fonte: O autor.

Observa-se na Tabela 2 que cinco participantes apresentaram respostas condizentes sobre a característica importante do pensamento algébrico, entendido como a generalização de um padrão, conforme ilustra-se na seguinte resposta:

> *O pensamento algébrico ocorre quando se consegue analisar situações e encontrar padrões, passando de valores particulares para valores quaisquer, ou seja, generalizar, entender situações abstratas. Explicar a validade de algo para qualquer valor numérico e não apenas para determinado exemplo ou valor particular. Ou seja, tentar encontrar um padrão de resolução, traduzindo de forma mais geral ou abstrata, colocando incógnita. (Resposta de L1).*

Ao contrário disso, a Tabela 2 mostra que as respostas da maioria (11 participantes) indicaram que o pensamento algébrico seria, simplesmente, resolver problemas por meio do uso de conteúdos algébricos, conforme se exemplifica na seguinte resposta:

> *É conseguir relacionar as informações de um problema com entes matemáticos, por exemplo, potência, função, P.A., P.G. etc. É conseguir interpretar matematicamente um problema, conseguindo visualizar e expressar de forma algébrica. (Resposta de L15).*

Entende-se que essa ideia está na direção de uma mera aplicação da álgebra em problemas, ideia essa diferente do apontado por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 87), os quais enfatizaram que o pensamento algébrico está relacionado às percepções de regularidades, de aspectos invariantes, de elucidar a estrutura algébrica do problema, o que envolve, sobretudo, o processo de generalização.

Apesar de apenas cinco participantes conseguirem descrever corretamente o que envolve o pensamento algébrico, a tabela a seguir mostra as estratégias dos licenciandos quando solicitados a resolver novamente a situação do Campeonato Brasileiro, mas voltados a determinar uma expressão matemática que ajudasse a encontrar o total de jogos.

Tabela 3 – Estratégias dos participantes quando solicitados a determinar uma expressão matemática.

Estratégia utilizada	Participantes	Quantidade (n=16)
Fez uma dedução lógica, obtendo 20x19=380, encontrou o padrão (t(t – 1) = n) e apresentou a resposta com uso desse padrão	L10	1
Utilizou dois casos particulares e encontrou o padrão: T(k) = k(k – 1)	L13	1
Fez uma lista organizada da quantidade de jogos de cada time e encontrou somatórias: $\sum_{n=1}^{20} 2(n-1)$ e $\sum_{n=0}^{19} 2n$	L1, L3, L4, L5, L6, L7, e L8	7
A partir da lista organizada da quantidade de jogos de cada time, utilizaram as expressões de Combinação e de Arranjo Simples	L14, L16 e L18	3
A partir da lista organizada da quantidade de jogos de cada time, utilizaram a expressão da Soma dos termos de uma P.A.	L11, L12 e L15	3
Tentou utilizar soma dos termos de P.A., mas não se lembrava da expressão matemática, por isso não fez	L9	1

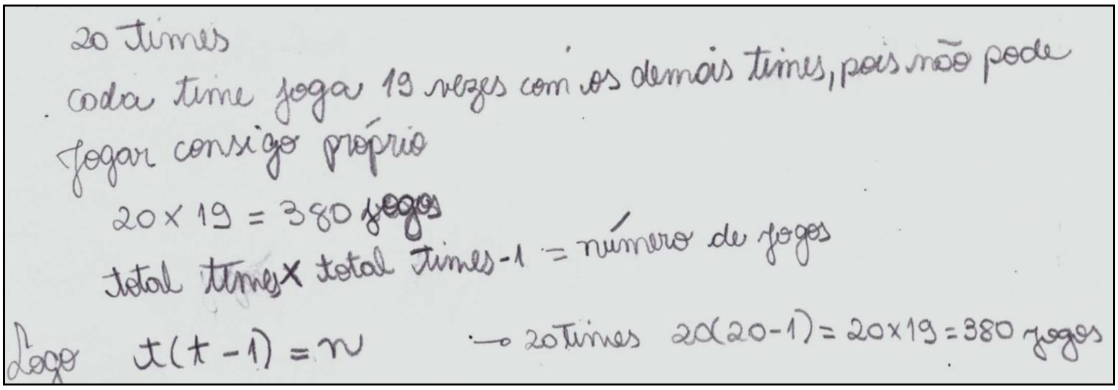
Fonte: O autor.

A Tabela 3 mostra, com exceção das estratégias de L10 e L13, que 14 estudantes se basearam no uso de Somatória de uma expressão e de expressões matemáticas já conhecidas por eles, como a Combinação Simples, Arranjo Simples e Soma dos termos de P.A. O uso de expressões conhecidas, em vez de buscar encontrar um padrão, também foi evidenciado na pesquisa de Américo (2016), a qual mostrou que uma professora, com 38 anos de magistério, ao ter que encontrar uma fórmula para uma primeira atividade que envolvia uma sequência de quantidade de bolinhas, utilizou-se dos termos da expressão do termo geral de uma P.A., porém não conseguiu estabelecer uma generalização para essa expressão.

Sobre a expressão ‘2(n – 1)’, utilizada na Somatória, destacamos que o fato de sete estudantes terem obtido uma expressão para fazer uso de Somatória, isso não implica em um padrão, justamente porque esse uso é apenas uma reorganização dos dados no sentido de que para cada valor *n* deve-se realizar o respectivo cálculo. Ou seja, a pessoa sempre terá que calcular para todos os valores de *n* para conseguir obter o total de jogos.

A respeito dos participantes L10 e L13, verificou-se que encontraram a expressão matemática que determinava o padrão. No entanto, podemos afirmar que esses estudantes não desenvolveram o processo de generalização, tendo em vista, respectivamente, a falta e o uso inadequado que fizeram de casos particulares. Assim, no caso da estratégia do participante L10, identificamos, conforme mostra a Figura 2 a seguir, que ele fez uma dedução lógica correta que evidenciou que, dos 20 times, cada time joga 19 vezes e, em seguida, apresentou a expressão numérica 20x19=380, da qual inferiu a expressão matemática correta (t(t – 1) = n) e, por fim, substituiu a incógnita *t* pelo valor de 20 times, obtendo a resposta da situação proposta. Porém, entendemos assim, que L10 não fez uso do processo de generalização, justamente pela ausência de casos particulares.

Figura 2 – Estratégia utilizada para determinar a expressão matemática.



Fonte: Resolução de L10.

Já no caso do participante L13, este utilizou a mesma estratégia quando da primeira vez que resolveu a situação e também não seguiu corretamente o processo de generalização, pois, apesar de fazer uso de casos particulares, os dois casos utilizados por ele foram inadequados a esse processo, conforme já ilustrado na Figura 1.

Diante desses resultados, a tabela a seguir mostra como os participantes que estiveram presentes nas aulas seguintes (n =14) deram prosseguimento para encontrar o padrão da situação do total de jogos a ser obtido. Para tal, eles tiveram como base a construção feita em lousa pelo professor-pesquisador de quatro casos particulares pelo uso de diagrama, e que depois foram organizados em uma tabela.

Tabela 4 – Forma de obtenção do padrão (expressão) feita pelos licenciandos.

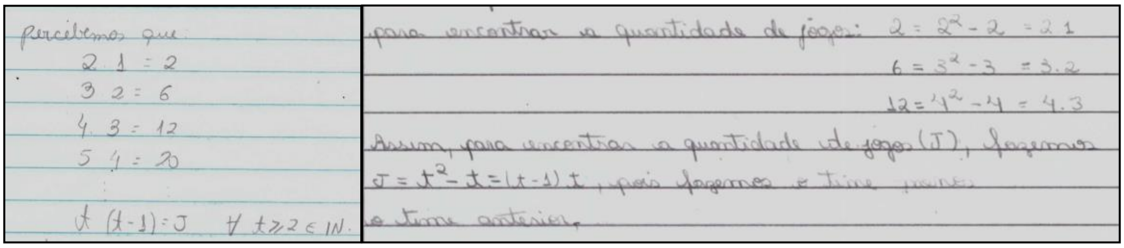
Forma utilizada para obter o padrão	**Participantes**	**Quantidade (n=14)**
Induziu dos casos particulares a expressão J = t^2– t	L17	1
Induziu dos casos particulares a expressão t(t – 1) = J	L1, L6, L9 e L15	4
Pelo aspecto visual da tabela de times e jogos, inferiu a expressão J = t(t – 1)	L13 e L14	2

A partir de multiplicações de determinada quantidade de times pela quantidade anterior de times, inferiu a expressão J = t(t – 1)	L2, L5, L8 e L18	4
Fez uso da diferença entre de determinado número de jogos e o número de jogos do caso seguinte, mas não colocou expressão	L10 e L11	2
Apesar de ter feito uma relação entre os casos particulares, não apresentou uma expressão	L7	1

Fonte: O autor.

De acordo com a Tabela 4, inferimos que sete participantes conseguiram generalizar e encontrar o padrão e, assim, apresentar a resposta à situação. Os participantes L1, L6, L9, L15 e L17 fizeram uso dos quatro casos particulares, conseguindo, na visão de Radford (2006), apreender regularidades locais que permitiram construir a expressão matemática pretendida. Já L13 e L14 deixaram claro que a expressão obtida foi facilmente visualizada nesses quatro casos. A Figura 3 a seguir mostra dois exemplos dessas formas utilizadas para obter o padrão.

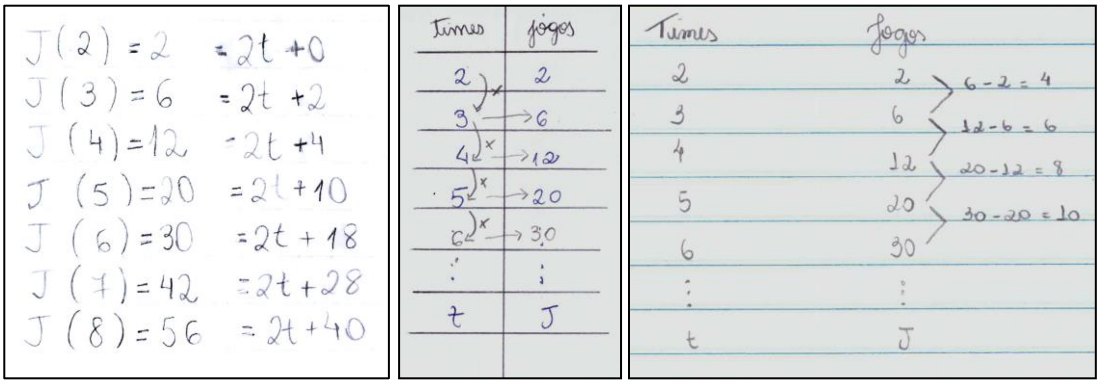
Figura 3 – Formas adequadas utilizadas para obter um padrão.



Fonte: Formas utilizadas, respectivamente, por L1 e L17.

Já sobre os outros sete participantes, a Tabela 4 mostra que um deles (L7) tentou estabelecer uma relação entre os quatro casos particulares, porém, mesmo incluindo mais casos particulares, não chegou a uma expressão. A respeito dos outros seis participantes, identificamos que fizeram relações entre somente os valores do total de times (L2, L5, L8 e L18) ou somente do total de jogos (L10 e L11). A Figura 4 a seguir ilustra esses resultados.

Figura 4 – Formas (inadequadas) utilizadas para encontrar o padrão.



Fonte: Formas utilizadas, respectivamente, por L7, L2 e L11.

Dessa forma, utilizar apenas os valores do total de times ou do total de jogos não se configura adequado ao processo de generalização, uma vez que é preciso fazer uso de cada caso particular para perceber a regularidade e, assim, evidenciar a estrutura algébrica presente, isto é, o padrão envolvido.

Tendo em vista esses resultados iniciais sobre o direcionamento dado nas aulas para tratar da generalização de padrões algébricos, os resultados que seguem são referentes ao que os participantes fizeram na avaliação da disciplina. Assim, o Quadro 1 a seguir mostra os conteúdos matemáticos do Ensino Médio escolhidos pelos participantes e suas dificuldades no processo de generalização para encontrar o padrão, visando articular a expressão matemática condizente ao respectivo conteúdo.

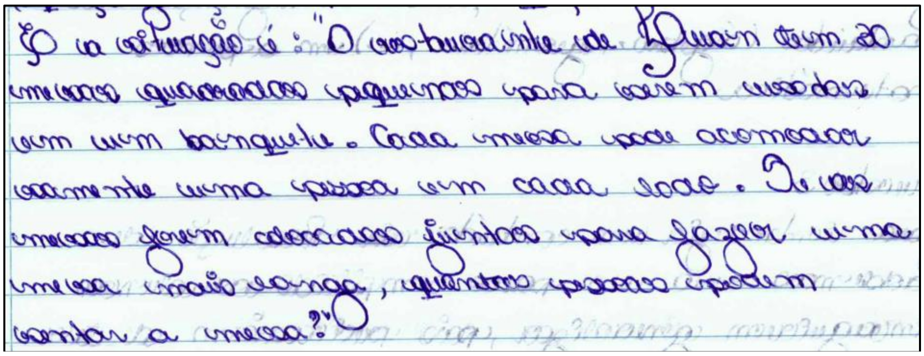
Quadro 1 – Conteúdos escolhidos e dificuldades no processo de generalização do padrão.

Conteúdos escolhidos	Participantes	Dificuldade no processo de generalização do padrão
Função Afim	L1, L3, L8, L9, L11, L16 e L18	Não tiveram dificuldades
	L5 e L6	Não fizeram uso de casos particulares para justificar devidamente as expressões apresentadas
	L12	Não fez uso de casos particulares e também não apresentou expressão
Função Quadrática	L13	Não teve dificuldades
Função Exponencial	L10	Não teve dificuldades
Termo geral de P.A.	L2 e L4	Não tiveram dificuldades
Equação de circunferência	L7	Não fez uso de casos particulares para justificar devidamente a expressão apresentada
Relações de Girard (soma e produto)	L14	Não fez uso de casos particulares para justificar devidamente a expressão apresentada
Permutação Simples	L15	Não teve dificuldades
Volume de prisma	L17	Não fez uso de casos particulares para justificar devidamente a expressão apresentada

Fonte: O autor.

De acordo com o Quadro 1, observa-se que 12 participantes não tiveram dificuldades para seguir o processo de generalização e, assim, determinar as expressões matemáticas dos conteúdos escolhidos. Dessa forma, as Figuras 5 e 6 a seguir ilustram, respectivamente, a situação da Matemática (problema) que foi proposto por um participante, e a forma adequada seguida.

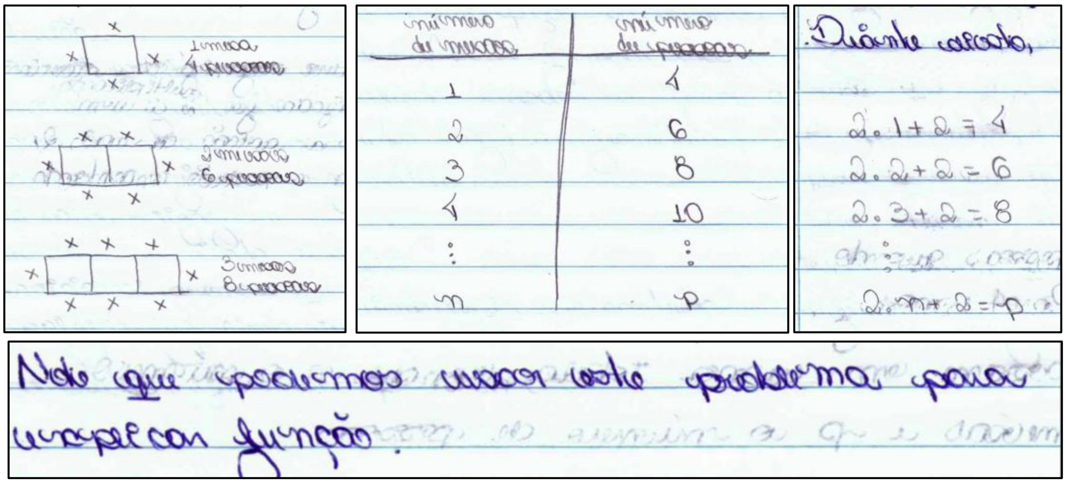
Figura 5 – Situação utilizada para obter um padrão, o de função afim,



Fonte: Situação proposta por L9.

Nesse sentido, a Figura 6 a seguir mostra o uso correto dos casos particulares, de modo que a percepção da regularidade possibilitou obter a expressão que representa o padrão envolvido. Em sequência, temos três casos particulares, a organização dos valores em uma tabela e a regularidade percebida, de modo que se evidenciou a expressão ‘2n + 2 = p’, a qual serviria, segundo L9, para explicar, neste caso, função afim.

Figura 6 – Processo de generalização seguido para obter expressão e articular à função afim.



Fonte: Processo de generalização de L9.

Por outro lado, observa-se no Quadro 1 (nas linhas destacadas na cor cinza) que seis participantes (33,33%; n = 18) tiveram dificuldades para seguir o processo de generalização do padrão algébrico proposto ao conteúdo escolhido. Verifica-se que cinco estudantes (L5, L6, L7, L14 e L17) não fizeram uso de casos particulares para justificar devidamente as expressões apresentadas/obtidas. Já, um estudante (L12) apenas descreveu que faria uso de casos particulares para introduzir a possível expressão do conteúdo escolhido. As Figuras 7 e 8 a seguir ilustram, respectivamente, a situação da Matemática (problema) que foi proposta por um dos participantes e as dificuldades para o resultado que envolveu a apresentação da expressão, porém sem uso de casos particulares.

Figura 7 – Situação utilizada para obter um padrão, o de função afim.

2- Função afim.
Problema
Um motorista de táxi cobra R$ 3,50 de bandeira (valor fixo) mais R$ 0,70 por quilômetro rodado. Determine o valor a ser pago por uma corrida relativa a um percurso de 18 quilômetros.

Fonte: Situação proposta porL5.

Assim, a Figura 8 mostra que no processo de generalização apresentado por L5 não se revelou uso explícito de casos particulares que justificassem o padrão envolvido.

Figura 8 – Processo sem uso de casos particulares para justificar a expressão.

$0,70 \cdot 18 + 8,5 = 20,10$.

Como por exemplo: se for de Jandaia até Maringá quanto ele gastaria, sendo que essa distância é de 43Km? Existe a possibilidade de não gastar nada.

Após verificar para alguns casos, o aluno poderá verificar algumas características que se repetem, como, por exemplo, o R$ 3,50 que sempre está sendo somado, que independente da corrida sempre estará ali, e os R$ 0,70 centavos que está multiplicando

formalizar o conteúdo. Analisando $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$.

Fonte: Processo de generalização de L5.

Dessa forma, o que se observou foi que L5 apresentou a resolução do problema com base em apenas um caso particular e, em seguida, propôs uma pergunta para poder ter outro caso particular. No entanto, L5 não fez uso explícito desse segundo caso, e apenas mencionou que verificaria casos particulares. Com isso os alunos identificariam as regularidades, sendo que, com base nisso, apresentou diretamente o conteúdo de função afim.

Conclusão

No presente artigo, nosso objetivo foi analisar a compreensão de licenciandos em Matemática no processo de generalização de padrões algébricos voltado ao trabalho que envolve o ensino via resolução de problemas de conteúdos relativos ao Ensino Médio. Os 18 licenciandos vivenciaram aulas em uma disciplina do curso para que tivessem condições de desenvolverem o processo de generalização de padrões a partir da escolha de conteúdos a serem introduzidos, segundo as situações da Matemática (possíveis problemas) escolhidas.

Sobre a resolução da situação da Matemática dos times do Campeonato Brasileiro, no início percebeu-se que nenhum dos participantes presentes (16) propôs ou seguiu o uso de casos particulares de forma a encontrar um padrão, sendo que fizeram uso de outras estratégias. Diante disso, buscamos explorar o que os participantes compreendiam por generalização, inserido na pergunta sobre o pensamento algébrico. Assim, os resultados mostraram que 11 licenciandos relataram que a generalização corresponderia ao uso direto da álgebra para resolver "problemas", e que cinco participantes relataram ideias coerentes sobre a generalização.

Apesar de cinco dos participantes terem apresentado ideias coerentes, quando se solicitou aos 16 participantes presentes na aula a resolverem a situação novamente (mas, naquele momento a determinar uma expressão), verificou-se que 14 estudantes tentaram utilizar diretamente expressões matemáticas já conhecidas, o que também não estava em acordo com o processo de generalização de padrões. Dentre os que obtiveram uma expressão (L10 e L13), nenhum deles o fez com base nesse processo.

No entanto, em aula posterior, após o professor-pesquisador ter direcionado os participantes presentes (14) na organização de quatro casos particulares, verificou-se que sete deles obtiveram resposta correta sobre o total de jogos, pois conseguiram identificar a regularidade nos quatro casos particulares, o que revelou compreensão do processo de generalização do padrão. Ao contrário disso, percebeu-se que os outros sete estudantes não conseguiram desenvolver ou mesmo finalizar a obtenção de um padrão algébrico. Apesar disso, as dificuldades foram discutidas com todos os participantes, evidenciando o uso adequado dos casos particulares, o que daria condições para a escolha dos conteúdos algébricos e respectivas situações da Matemática para seguir o processo de generalização de padrões.

Dessa forma, os resultados mostraram que 12 participantes (n = 18) conseguiram seguir o processo de generalização de padrões aos conteúdos escolhidos. Porém, os outros seis participantes tiveram dificuldades para seguir esse processo de generalização, pois cinco deles não propuseram de forma explícita casos particulares para que pudessem justificar as expressões apresentadas, cujos conteúdos deveriam ser introduzidos, e um participante (L12), o qual havia faltado em algumas aulas, apenas descreveu que utilizaria casos particulares para se chegar ao conteúdo escolhido, sendo que sequer apresentou expressão matemática.

Contudo, podemos inferir que 12 licenciandos em Matemática conseguiram construir compreensão para desenvolver o processo de generalização de padrões algébricos quando se busca abordar o problema como ponto de partida para tratar da introdução de conteúdos do Ensino Médio, segundo a ação de escolha do problema do Ensino-aprendizagem de Matemática via resolução de problemas, proposto por Proença (2018). Ao contrário disso, apesar de seis participantes revelarem saber fazer uma escolha de conteúdos conforme o ensino via resolução de problemas, ainda precisam ampliar suas compreensões acerca do processo de generalização em si.

Por fim, destaca-se que apesar de seis participantes apresentarem dificuldades é possível, em aulas de disciplinas posteriores, levá-los a ampliar seus conhecimentos a respeito do processo de generalização de padrões em outras atividades como, por exemplo, na elaboração de sequências didáticas a serem discutidas junto ao professor-formador e depois implementadas na regência de aula na escola, durante o estágio. Abordar essas atividades também pode consolidar a compreensão dos 12 participantes que construíram compreensão sobre o processo de generalização de padrões.

Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por queatravés da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.). **Resolução de Problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco, 2014, p. 35-52.

AMÉRICO, L. R. **Estudo sobre os conhecimentos de professores de Matemática na construção do processo de generalização**. 2016. 132f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

ARAUJO, E. A. Ensino de álgebra e formação de professores. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 331-346, 2008.

BAQUEIRO, G.; D; S.; SANTOS, A. T. F.; CAZUMBÁ, A. S.; CARVALHO, G. S.; OLIVEIRA, J. A. Caracterizadores do pensamento algébrico e generalização de padrões matemáticos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016. São Paulo. **Anais...** São Paulo: ENEM, 2016.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**. Uma introdução à teoria e aos métodos. Trad. Maria João Alvarez; Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Ensino Médio. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Educação Infantil e Ensino Fundamental. 3ª ed. Brasília: MEC, 2017.

BRASIL. Secretaria de ensino fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. 3º e 4º Ciclos. Brasília: SEF/MEC, 1998.

DREYFUS, Tommy. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Ed.) **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991, p. 25-41.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 1, p. 78–91, mar., 1993.

PERUZZO, C. M. K. Da Observação Participante à Pesquisa-Ação em Comunicação: pressupostos epistemológicos e metodológicos. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE CIÊNCIAS DA COMUNICAÇÃO, 26., 2003. Belo Horizonte/Minas Gerais. **Anais...** Belo Horizonte/Minas Gerais, 2003.

PROENÇA, M. C. **Resolução de Problemas**: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática em sala de aula. Maringá: Eduem, 2018.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In: ANNUAL MEETING OF THE NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION. 28. 2006. Mérida-México. **Proceedings...** Mérida: PME-NA, 2006.

SANTOS, J. G. **Observação e generalização de padrões**: um tema para a investigação de professores sobre sua própria prática. 2008. 137f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

SILVA, R. S. **Oficina Experiências Matemáticas**: professores e a exploração de padrões. 2009. 95f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K., JR. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989, p. 31-42.

SHULMAN, L. S. Those Who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, fev., p. 04-14, 1986.

Texto recebido: 04/07/2019
Texto aprovado: 02/12/2019