

Comunicaciones de innovación curricular en Educación Matemática

<http://ued.uniandes.edu.co>

@uedUniandes

Relaciones en el conocimiento especializado de una profesora de matemáticas en la enseñanza de las simetrías

Oscar Paternina-Borja, Estela Juárez-Ruiz

oscarpborja@gmail.com

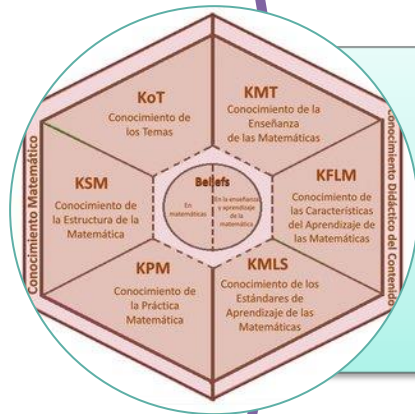
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

17 – 05-2022

Descripción del problema



El profesor de matemáticas es un actor importante que planifica y dirige la actividad que se genera en el aula donde pone en juego, con cierta lógica, una diversidad de conocimientos en el desarrollo de su tarea profesional (Rojas, 2014)



Los autores desarrollaron el modelo de *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas - MTSK* - por sus siglas en inglés con el objetivo de analizar y comprender el conocimiento disciplinar y didáctico de los docentes (Carrillo et al., 2013)



El modelo MTSK permite analizar el conocimiento que el profesor pone en juego en la preparación de clases, la discusión entre docentes, la enseñanza en aula o la reflexión posterior. En los últimos años se ha puesto de relieve el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas de Educación Secundaria (Advíncula et al., 2021)

Problema de investigación

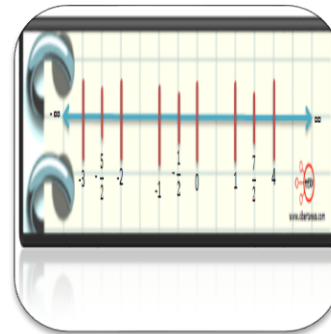
¿Qué relaciones existen en el conocimiento especializado movilizado por una profesora de matemáticas en la enseñanza de las simetrías?

Objetivo de investigación

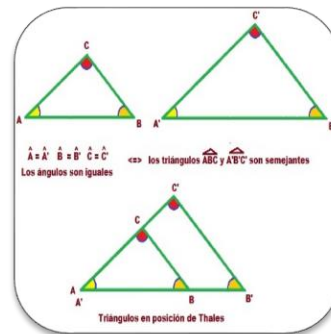
Caracterizar las relaciones del conocimiento especializado movilizado por una profesora de matemáticas en la enseñanza de las simetrías.

Antecedentes

Profesor de secundaria – MTSK



Zakaryan y Ribeiro (2016) caracterizaron el conocimiento de una profesora en la enseñanza de los números racionales y las relaciones que se pueden establecer entre los distintos subdominios del modelo.

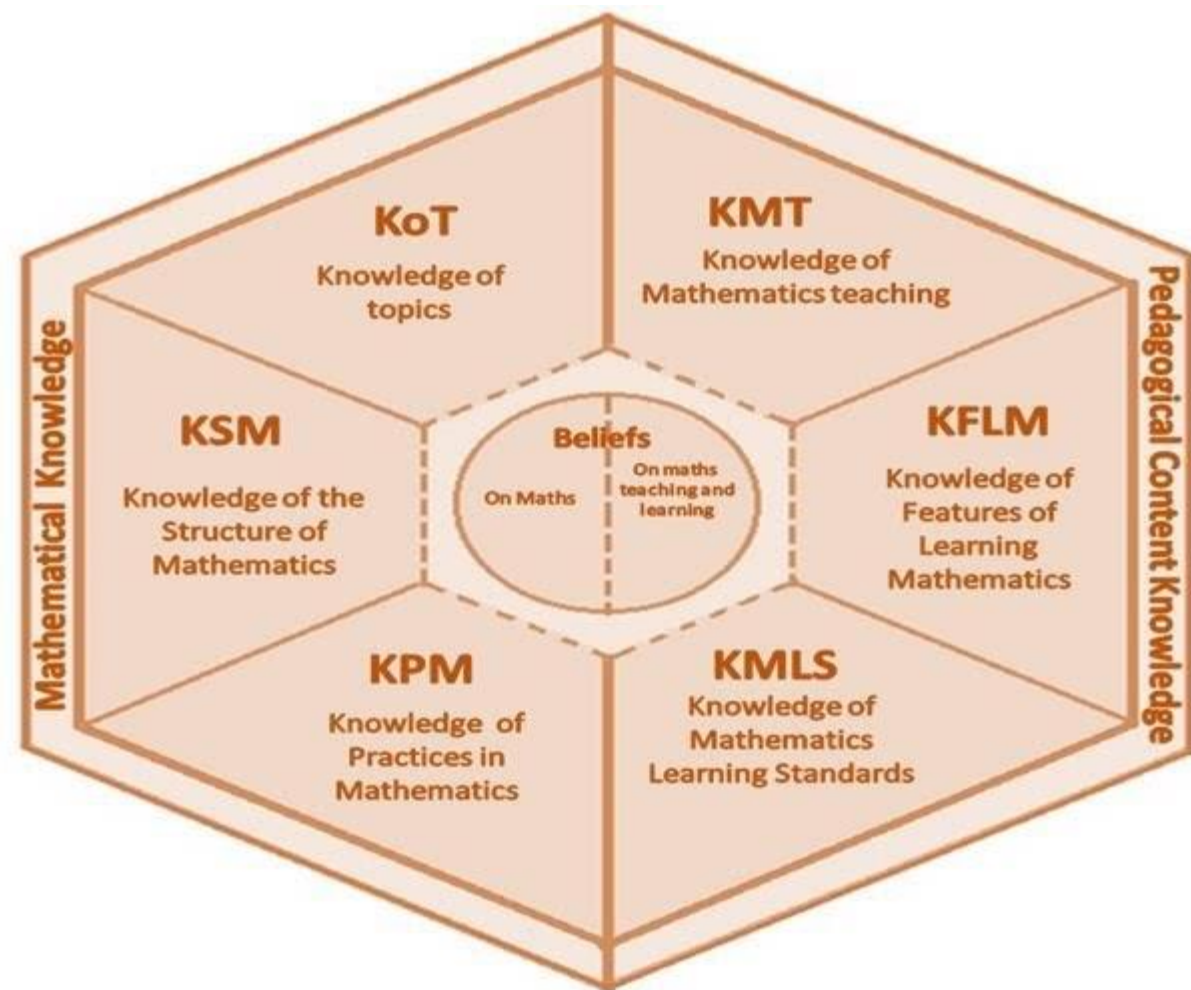


Zakaryan et al. (2018) se presentan las relaciones entre subdominios del Conocimiento Didáctico del Contenido - PCK- de una profesora en la enseñanza de la semejanza de triángulos

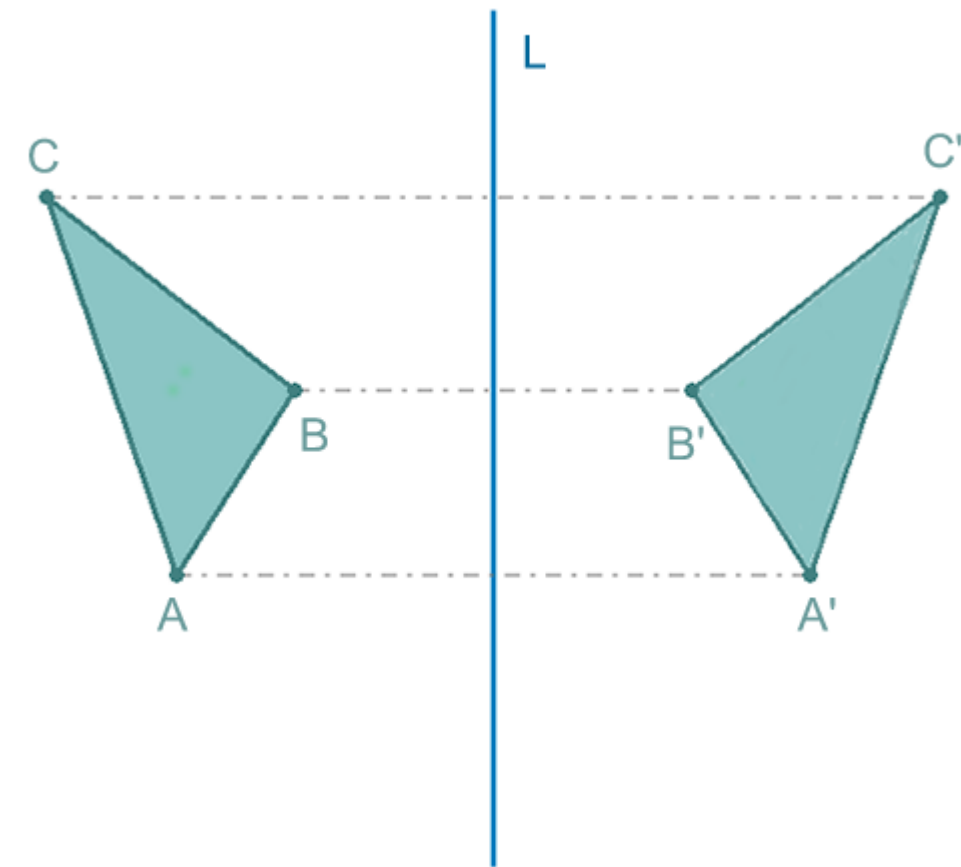
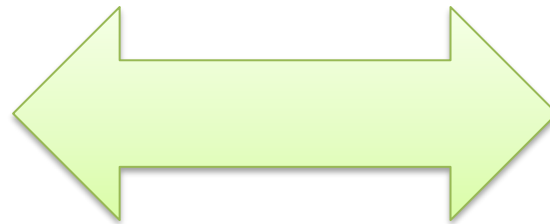
rnos	Pizzas	Minut
3	4	30
4	6	x

Fuentes (2020) profundizó en la comprensión del conocimiento especializado de un profesor en la enseñanza de la proporcionalidad estableciendo relaciones entre el Conocimiento de los Temas - KoT- con los demás subdominios del modelo

Marco Teórico



Modelo MTSK
Carrillo et al., (2013)
Carrillo et al., (2018)



Enseñanza de las simetrías en la geometría
Iaderosa y Malara (2000), Godino y Ruiz (2002), Alsina (2005), Morales et al., (2018), Paternina et al., (2020) y MEN (2006)

Método

- **Paradigma:** interpretativo (Roca, 2020; Finol y Vera 2020)
- **Enfoque:** La investigación es de corte cualitativo (Hernández, 2018)
- **Diseño:** Estudio de Caso Instrumental (Stake, 2007)
- **Informantes:** Una profesora de matemáticas en secundaria (en adelante María)
- **Técnicas e instrumentos:** Implementando técnicas como entrevista semiestructurada (Hernández, 2018) e instrumentos como planeación de clase (Flores, Escudero y Aguilar, 2013).

Procedimiento

- Se pidió a la profesora realizar una planeación de clase del objeto matemático simetría para estudiantes de secundaria (alumnos entre 12 y 13 años). Para ello se le proporcionó un formato advirtiéndole que podía ser modificado o adecuado a su contexto. Se le dio unos días para ello.
- Una vez recibida la planeación se revisó y se realizó una entrevista semiestructurada con el propósito de indagar más acerca de la planeación presentada
- La información se está analizando con base en los descriptores que se construyeron para las categorías del modelo MTSK y se establecieron relaciones entre subdominios tomando en cuenta la triada propuesta por Escudero et al. (2016): evidencia, indicio y oportunidad

Resultados y análisis

- A partir de la oportunidad de estudio brindada por la planeación, se convirtió en evidencia de conocimiento a través la entrevista, donde se pudo analizar su conocimiento movilizado sobre Historia de las Matemáticas como estrategia de enseñanza de las simetrías.

I: en el momento del inicio de la clase usted incluyó una cronología de una parte histórica de la simetría y me llamó la atención ¿Cuál es la intención de la historia en el inicio de la clase?

M: la razón por la que yo puse esto de la historia es porque yo trabajo con la línea de la Historia de las matemáticas, para mí es importante que a los estudiantes se les mencione esta parte de la historia cuando uno va a iniciar una clase o un tema. En este caso a desarrollar el tema de las simetrías porque creo que es importante que ellos identifiquen que esto no es algo que surgió de la nada, no es un concepto que se desarrolló de la nada, sino que fue algo que diferentes matemáticos empezaron a analizar, a observar y que hay un recorrido.

También hay construcciones que realizaron los antiguos y tuvieron en cuenta la simetría y que todo eso ha ayudado a que podemos ver en la actualidad, en nuestro entorno esta geometría, esta simetría tan simple como en una casa, ver una casa por fuera ahí vamos a encontrarlo, de hecho en una baldosa, también se puede ver en la mesa que estén trabajando. (María, comunicación personal, 23 de noviembre 2021).

- Se pudo evidenciar y profundizar en el conocimiento del profesor sobre estrategias de enseñanza de las simetrías (*Estrategias, técnicas y tareas asociadas a los contenidos matemáticos*) del KMT. Asimismo, movilizó conocimiento de las aplicaciones que ha tenido la simetría (*Fenomenología y aplicaciones*) del KoT









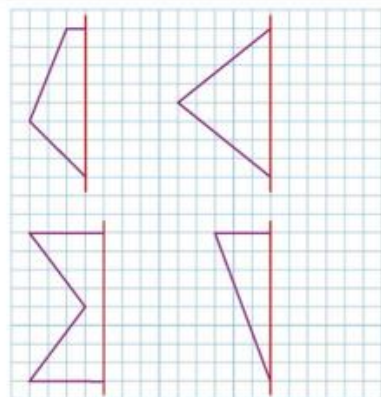
INICIO: I. En primer lugar se quiere mostrar al estudiante que el estudio de la simetría no fue algo que apareció de un momento a otro, sino que ha sido algo que siempre ha existido y se remonta desde la antigua Grecia. Esto se muestra con ayuda de este esquema.	Antigua Grecia  	<ul style="list-style-type: none"> • Los libros de los elementos de Euclides (325 a.C. – 265 a.C.), constan de 13 libros. • Destacamos el Libro I: Los Fundamentos de la Geometría. Teoría de los triángulos, paralelas y el área. • Se definen los criterios de congruencia e igualdad de triángulos a partir de la Geometría Estática, al revés, de cómo se explican en estos momentos a partir de una Geometría Dinámica.
	Mundo Árabe  	<ul style="list-style-type: none"> • La geometría es muy importante en el Islam. • La forma perfecta es el círculo, que representa a Dios y se utiliza como patrón para realizar otros motivos. • Los patrones geométricos más destacados, que son utilizados en el arte y decoración islámica, son: <ul style="list-style-type: none"> ~ El uso de polígonos estrellados ~ La superposición de teselaciones en planos paralelos.
	Alhambra 	<ul style="list-style-type: none"> • Ciudad, fortaleza y palacio de los reyes de la dinastía Nazarí, sus salas y jardines son la máxima expresión del arte musulmán en Europa. • En la decoración de la Alhambra podemos encontrar los 17 grupos de simetría del plano.
	Edad Media 	Filippo Brunelleschi (1377 – 1416): Fue el primer artista que estudió y utilizó intensivamente las matemáticas. Su pasión por ellas le llevo al descubrimiento de la perspectiva cónica.
	 	Leonardo de Vinci (1452 – 1519): En su Studio, se realiza un estudio anatómico buscando la proporcionalidad del cuerpo humano, el canon clásico o ideal de belleza, usando el ángulo de 90° y la simetría. Alberto Durer (1471 – 1528): Hizo hincapié en todas sus obras en la geometría y en la medida. Escribió un libro sobre geometría: "Instrucción en la medida con regla y compás" (1525)
	Edad Moderna  	Gerard Desargues (1591 – 1661): Fue el precursor de la idea de transformación geométrica y el de figura invariante con sus propiedades. Escribe el Primer borrador sobre los resultados de intersecar un cono con un plano que sientan las bases de la geometría proyectiva y da lugar al teorema que lleva su nombre: TEOREMA DE DESARGUES. <ul style="list-style-type: none"> • La geometría analítica fue introducida en el siglo XVII por Pierre Fermat (1601-1665) y por Descartes, para el estudio de curvas y superficies.

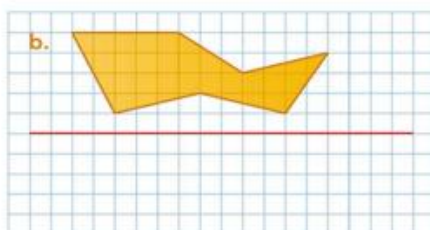
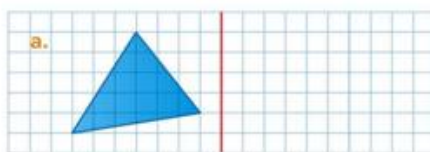
Tabla 1

Relaciones entre categorías del KMT y KoT

Subdominio	KMT	KoT
Categoría	Estrategias, técnicas y tareas	Fenomenología y aplicaciones
Descriptor	Conoce estrategias de enseñanza a través de situaciones y explicaciones para representar las simetrías	Conoce modelos atribuibles a las simetrías como fenómenos que pueden servir para generar conocimiento matemático, en particular para la creación de este concepto.



- 2) Comenta con tus compañeros lo que observas en estas figuras después de terminar de dibujarlas.
- 3) ¿Qué nombre le pondrías a esta característica que tienen las figuras del inciso 1?
- 4) Dibuja la figura correspondiente con respecto al eje rojo.



- 5) ¿Qué nombre le pondrías a esta característica que tienen las figuras del inciso 4?
- 6) Intenta realizar el movimiento cada una de las siguientes figuras de acuerdo con las indicaciones dadas:

- Teniendo en cuenta la actividad propuesta se le preguntó lo siguiente a la profesora:

I: en el momento de desarrollo, están las actividades para completar las figuras ya sea la mitad o construir todas las figuras completas del lado contrario al eje. Seguido, están los ítems 2 y 3 que dice comenta con tus compañeros y qué nombres le pondrías a esas características ¿Qué características deberían tener en cuenta los estudiantes para completar las figuras?

M: Lo ideal sería que tuviera en cuenta el dibujo del primer inciso, que tuviera en cuenta que en la actividad anterior observé cuando tenía trazada esta línea (vertical) ocurría que el lado opuesto estaba similar, era el mismo pero al otro lado, estoy hablando colocándome en el lugar del estudiante, ocurría como que eso y entonces empezaba a contar los cuadritos por eso hablaba de utilizar la regla, desplazar, dónde debo ubicar los puntos para que me quede lo de este lado igual a lo del otro lado para formar la figura, para que haya esa correspondencia con esa línea (vertical) que está trazada ahí.

Luego se le pregunta al estudiante ¿este dibujo que acabas de hacer, de completar, qué nombre le pondrías? Se me ocurre que podría pensar es como un espejo, no sé estoy dando un ejemplo de una posible respuesta, un espejo de este lado se ve esto, es que los niños tienen mucha imaginación otros podrían decir reflejar (María, comunicación personal, 23 de noviembre 2021).

- Se puede evidenciar el conocimiento que tiene la profesora sobre los posibles términos que utilizan los estudiantes al referirse a la simetría y los procedimientos no convencionales que pueden realizar (*Interacciones con el contenido matemático*) del KFLM. Asimismo, los recursos que implementa para mejorar la enseñanza (*Recursos Didácticos Físicos*). Además, la estrategia de enseñanza con preguntas orientadoras que permite guiar el proceso de construcción del concepto (*Estrategias, técnicas y tareas asociadas a cada uno de los contenidos matemáticos*) del KMT.

Tabla 2*Relaciones entre categorías del KFLM y KMT*

Subdominio	KFLM	KMT	
Categoría	Maneras de interactuar del estudiante con el contenido matemático	Recursos Didácticos (Físicos y Digitales)	Estrategias, Técnicas, Tareas y Ejemplos
Descriptor	<p>Conoce los procedimientos no convencionales que los estudiantes utilizan para hacer simetrías</p> <p>Conoce el lenguaje y vocabulario común que utilizan los estudiantes para designar las simetrías</p>	Conoce la incidencia de los recursos físicos y digitales en la mejora de la enseñanza de las simetrías y las limitaciones que podría tener	Conoce estrategias de enseñanza a través de preguntas orientadoras y de cuestionamiento para representar las simetrías

Reflexiones y proyecciones

Las anteriores relaciones son muestra que el conocimiento del profesor de matemáticas no está fraccionado en subdominios en un modo literal, por el contrario, los aspectos como los mencionados anteriormente se movilizan casi siempre unos con otros. El conocimiento del profesor de matemáticas es complejo y multidimensional (Zakaryan y Ribeiro, 2016), por lo tanto, son necesarios más estudios que permitan enriquecer y ampliar el conocimiento de las relaciones entre los distintos subdominios. En este sentido, nuestro estudio aporta con caracterizar las relaciones entre los distintos subdominios del modelo MTSK.

Además, esta investigación muestra como la planeación de clase de matemáticas es un escenario que brinda oportunidades para profundizar y analizar el conocimiento del docente bajo la lente del modelo MTSK. En este sentido, se proyecta un artículo donde se caracterizará el conocimiento didáctico del contenido de la profesora a partir de su plan de clase.

Bibliografía

- Alsina, C. (2005). Los secretos geométricos en diseño y arquitectura [Material de aula]. Curso Interuniversitario “Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas”. Universidad Politécnica de Catalunya, España. <https://imarrero.webs.ull.es/sctm05/modulo3lp/3/calsina.pdf>
- Advíncula, E., Beteta, M., León, J., Torres, I. y Montes, M. (2021). El conocimiento matemático del profesor acerca de la parábola: diseño de un instrumento para investigación. *Uniciencia*, 35(1), 190-209.
- Ball, D., Thames, H. y Phelps, G. (2008). Conocimiento del contenido para la enseñanza: ¿Qué lo hace especial? *Revista de formación docente*, 59(5), 389-407.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M (2018). The mathematics teacher’s specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. doi: <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo, J., Contreras, L.C., y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Comares.
- Escudero-Ávila, D., Gomes Moriel, J., Muñoz-Catalán, M.C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N. y Aguilar, A. (2016). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. En J. Carrillo, L.C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 60-68). SGSE: Huelva.
- Finol, M. y Vera, J. (2020). Paradigmas, enfoques y métodos de investigación: análisis teórico. *Mundo Recursivo*, 3(1), 1-24.
- Flores, E., Escudero, D. I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.
- Fraenkel, J., Wallen, N. y Hyun, H. (2012). *How to Design and Evaluate Research in Education*. McGraw-Hill.
- Fuentes, C. (2020). Uso del Modelo MTSK para la caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en secundaria: El caso de la Proporcionalidad. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16(59), 33-63.
- Godino, J. y Ruiz, F. (2002). Geometría y su didáctica para maestros. Los Autores. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>
- Hernández, M., Meneses, N., Sánchez, Y., Montealegre, G. y Parra, S. (2018). Simetría axial en figuras planas [Tesis de maestría]. Funes. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/11767/>
- Hernández, R. y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill Interamericana Editores

- laderosa, R. y Malara, N. (2000). Acerca de las dificultades encontradas en alumnos de 12-13 años en el aprendizaje de la isometría plana. *Educación Matemática*, 12(2), 63-80.
- Morales, M., Aroca-Araujo, A. y Álvarez, L. (2018). Etnomatemáticas y Educación matemática: análisis a las artesanías de Usiacurí y educación geométrica escolar. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(2), 120-141.
- Muñoz-Catalán, M., Contreras, L., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. y Climent., N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, 18(3), 1801-1817.
- Paternina, O., Muñoz, N., Pacheco, E., y Aroca, A. (2020). Simetrías inmersas en el proceso de elaboración de la máscara del torito de Galapa. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, 11(1), 141-157. doi: <https://doi.org/10.19053/20278306.v11.n1.2020.11689>
- Roca-Cuberes, C. (2020). Teoría y elección metodológica en la investigación. En: C. Lopezosa, J. Díaz-Noci y L. Codina (eds.). *Anuario de Métodos de Investigación en Comunicación Social* (pp.01-03). DigiDoc-Universitat Pompeu Fabra
- Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de caso* [Tesis de doctorado]. Digibug. Recuperado de <https://digibug.ugr.es/handle/10481/35199>
- Secretaría de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral*. SEP.
- Sierpiska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Londres: The Falmer Press.
- Shulman, L. (1986). Aquellos que entienden. El crecimiento del conocimiento en la enseñanza. *Investigador Educativo*, 15(2), 4-14.
- Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.
- Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Olfos, R., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 36(2), 105-123. doi: <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260>
- Zakaryan, D., y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento de la enseñanza de los números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetiké*, 24(3), 301-321. doi: <http://dx.doi.org/10.20396/zet.v24i3.8648095>.

Comunicaciones de innovación curricular en Educación Matemática

<http://ued.uniandes.edu.co>

@uedUniandes