Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O EQUIPAMENTO PRAXEOLÓGICO PARA O PROBLEMA DIDÁTICO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

The praxeological equipment for the didactic problem of mathematical modeling

Gleison De Jesus Marinho SODRÉ
Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Brasil
profgleisoneaufpa@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3993-4236

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Esta investigação trata da problemática da profissão docente em modelagem matemática a fim de delimitar o que ensinar e como ensinar modelagem. Objetivou-se construir uma infraestrutura teórico-metodológica a partir de recursos da teoria antropológica do didático. Para isso, propõe-se uma técnica de modelagem fundamentada na didática do percurso de estudo e investigação e, de modo mais inclusivo, em três gestos didáticos que preservam o caráter cíclico do processo de modelagem. Os resultados encontrados mediante as experimentações empíricas, sob a orientação da técnica proposta, permitiram evidenciar um equipamento praxeológico útil, senão indispensável, sob a noção do ciclo investigativo de modelagem matemática, por pressupormos que esse ciclo constitui uma possível resposta ao enfrentamento do problema da profissão docente, bem como pode assumir um duplo papel didático-metodológico. Além disso, encaminham-se perspectivas futuras sobre o ciclo investigativo enquanto dispositivo didático-metodológico a ser testado empiricamente em estudos vindouros com professores em formação inicial sem desconsiderar suas potencialidades didáticas para uso em sala de aula.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Teoria Antropológica do Didático, Equipamento Praxeológico

ABSTRACT

This investigation deals with the problematic of the teaching profession in mathematical modeling in order to define what to teach and how to teach modeling. The objective was to build a theoretical-methodological infrastructure based on resources from the anthropological theory of the didactic. For this, a modeling technique is proposed based on the didactics of the study and investigation path and, more inclusively, on three didactic gestures that preserve the cyclical character of the modeling process. The results found through the empirical experiments, under the guidance of the proposed technique, allowed us to evidence a useful, if not indispensable, praxeological equipment under the notion of the investigative cycle of mathematical modeling, as we assume that this cycle constitutes a possible answer to facing the problem of the profession. teacher, as well as can assume a dual didactic-methodological role. Furthermore, future perspectives are addressed on the investigative cycle as a didactic-methodological device to be empirically tested in future studies with teachers in initial training without disregarding its didactic potential for use in the classroom.

Keywords: Mathematical Modeling, Anthropological Theory of Didactics, Praxeological Equipment

1 INTRODUÇÃO E APRESENTAÇÃO DA PROBLEMÁTICA DA MODELAGEM MATEMÁTICA

A literatura da Educação Matemática e, em particular, Greefrath e Vorhölter (2016) e Vorhölter et al. (2019) destacam de modo consensual a importância da Modelagem Matemática, doravante MM, e o seu importante papel em nível mundial com ênfase ao uso de objetos matemáticos para o estudo de problemas do mundo real, a fim de "estabelecer uma compreensão adequada da matemática, incluindo o uso real dos conceitos. Aprender matemática deve ser apoiado relacionando-a com a vida real (Blum, 1993)"[1] (Vorhölter et al., 2019, p.94, tradução nossa).

Embora diferentes perspectivas teóricas sejam adotadas sobre a MM (Czocher, 2019), a perspectiva cognitivista, de acordo com Schukajlow, Kaiser e Stillman (2018), tem sido dominante nos últimos anos, caracterizada em geral, "como o processo da resolução de problemas do mundo real por meio de aplicação da matemática com o objetivo de compreendê-lo"[2] (Niss et al., 2007 apud Stillman, 2019, p.1, tradução nossa).

Na perspectiva cognitivista, estudiosos da área, entre eles Borromeo Ferri (2006), Blum e Borromeo Ferri (2009), Perrenet e Zwaneveld (2012), Greefrath e Vorhölter (2016), Vorhölter et al., (2019), Jankvist e Niss (2019) e Stillman (2019) assumem quase de modo consensual o ciclo de MM como modelo do processo para orientar a prática de alunos ou professores no estudo sobre problemas do mundo real, conforme Figura 1.

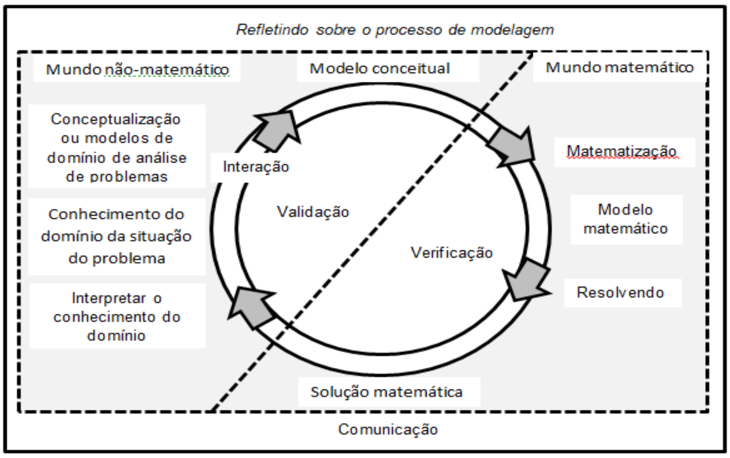


Figura 1: Ciclo de modelagem proposto por Perrenet e Zwaneveld
Fonte: Adaptado de Perrenet e Zwaneveld (2012, p.18).

[1] Fragmento do texto: *establish an appropriate comprehension of mathematics including the actual use of the concepts. Learning mathematics should be supported relating it to real life (Blum 1993).*
[2] Fragmento do texto: *as real-world problem solving is the process of applying mathematics to a real-world problem with a view to understanding it*.

Universidade Federal de Santa Catarina. ISSN 1981-1322. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2021.e82061

O uso do ciclo de MM busca, entre outros objetivos, auxiliar no estudo enquanto ferramenta didática disponível para ação frente a um problema em contexto concreto. No entanto, é preciso considerar que o ciclo de MM está passível de questionamentos, em particular, sob a ótica da teoria antropológica do didático, daqui em diante TAD, como apontam Garcia et al. (2006), por exemplo, ao proporem sua transposição para um arcabouço teórico sólido, cujos modelos matemáticos, segundo essa compreensão, "longe de serem suas representações exatas, acabam por ser boas 'máquinas' para produzir conhecimento sobre a realidade questionada"[3] (Bosch, Chevallard & Gascón, 2006, p. 2, tradução nossa).

É preciso considerar que a passagem ou conversão do "mundo não-matemático" ao "mundo matemático" (Perrenet & Zwaneveld, 2012) e vice-versa, como orienta a Figura 1, parece passo de mágica, em que "(...) você pronuncia uma fórmula e tudo de repente é capaz de converter o ferro em ouro"[4] (Eco, 2003, p. 2, tradução nossa), ao destacar que todo problema do "mundo não-matemático" pode ser convertido em um problema passível de matematização. Além disso, essa técnica do ciclo de MM (Figura 1) parece evidenciar que o domínio de saberes matemáticos pode assegurar a compreensão de um problema do "mundo não-matemático".

Nesse sentido, a transformação de um problema do "mundo não-matemático" ao "mundo matemático" e, vice-versa, parece não evidenciar o papel de outros saberes, inclusive, os saberes práticos não matemáticos que são considerados pela TAD, "que *se colocam em funcionamento, se aprendem, se enriquecem, sem serem entretanto utilizados, ensinados, produzidos*" (Chevallard, 2005, p. 154, grifos do autor, tradução nossa) em um meio institucional, por exemplo, a escola básica, e os quais, por sua funcionalidade em ato, são indispensáveis para o estudo de problemas do "mundo não-matemático".

Sob essa compreensão que parece focalizar a problemática da etapa de transformação do "mundo não-matemático" ao "mundo matemático", Sodré (2019) ratifica que essa etapa do processo de MM

> É uma receita genérica que somente assume especificidade na especificidade da situação, com movimentação de conhecimentos de como os ingredientes agem e reagem entre si. Esse conhecimento somente está disponível aos sujeitos da situação em contexto, pois somente eles podem reconhecer o que conhecem, que na linguagem da TAD, se traduz por aqueles que possuem a relação adequada com os objetos dessa receita, o que inclui a situação (Sodré, 2019, p. 74).

[3] Fragmento do texto: *far from being exact representations, turned out to be "machines" good at producing knowledge about the reality in question.*
[4] Fragmento do texto: *pronuncio una fórmula y transformo el hierro en oro.*

Além disso, o ciclo de MM indicado na Figura 1 destaca a possibilidade de mobilização de saberes matemáticos que se fazem necessários ao estudo de problemas em contextos reais, sob a pressuposição de esses saberes talvez alcançarem a compreensão de fenômenos do mundo real. No entanto, vale observar que sobre esse modo fazer e de pensar,

> Por exemplo, pode haver um local sagrado para uma população indígena que é conhecida também por ser rico em minerais. Pode ser possível analisar os custos econômicos e os benefícios da exploração mineral do sitio por meio de uma detalhada descrição matemática; No entanto, é impróprio e impossível "matematizar" o significado cultural do sitio[5] (Christensen, Skovsmose & Yasukawa, 2008, p. 78, tradução nossa).

O extrato de texto elucida as limitações dos saberes matemáticos para dar o significado cultural de um espaço social, inclusive ratificado por Greefrath e Vorhölter (2016) e Vorhölter et al. (2019), ao destacarem "o processamento de um problema real com métodos matemáticos é limitado, pois a complexidade da realidade não pode ser traduzida completamente em um modelo matemático"[6] (Greefrath & Vorhölter, 2016, p. 9, tradução nossa).

Nesse caminhar, Grandsard (2005), Guerra e Silva (2009), Sodré e Guerra (2018), Sodré e Oliveira (2021) evidenciaram que o domínio de saberes matemático não necessariamente assegura o sucesso em MM e, com isso, uma problemática enfrentada por alunos e professores sobre a MM parece dominante nas Conferências Internacionais sobre o Ensino de Modelagem Matemática e Aplicações, ou simplesmente ICTMA, sobre como ensinar MM, de interesse da linha cognitivista (Blum, 2011, Schukajlow; Kaiser & Stillman, 2018) e da TAD (Barquero; Bosch & Gascón, 2011), formulada nesta segunda linha de investigação como problema da profissão docente assim descrito: **P_0 (MM)** – o que ensinar e como ensinar MM? (Barquero, Bosch & Gascón, 2011, 2013, Florensa, Garcia & Sala, 2020).

Para melhor explicitar nossos encaminhamentos, recorremos a Grandsard (2005, p. 7, tradução nossa), quando assim se manifesta:

> Quando meus futuros professores foram treinados para resolver alguns dos problemas de modelagem declarados neste artigo, nem todos foram bem-sucedidos. Alguns se comportavam de maneira não muito diferente dos alunos do primeiro ano, não eram capazes de traduzir e ficavam incomodados quando solicitados a fazer algo

[5] Fragmento do texto: *For example, there may be a sacred site for an indigenous population that is known also to be rich in minerals. It may well be possible to analyse the economic costs and benefits of mining that site through a detailed mathematical description; however, it is both inappropriate and impossible to —mathematise‖ the cultural significance of the site.*

[6] Fragmento do texto: *the processing of a real problem with mathematical methods is limited, as the complexity of reality cannot be transferred completely into a mathematical model*.

> estranho. Isso pode parecer inacreditável para quem está de fora, mas é a dura verdade. Alguns de nossos futuros alunos com mestrado em matemática não podem traduzir em nível de ensino médio. Como eles serão capazes de ensinar modelagem para seus alunos?[7]

As reflexões apontadas no extrato de texto evidenciam que mesmo os professores dotados de saberes matemáticos, quando colocados frente a contextos incomuns para eles, em geral, não conseguem modelar. Ou seja, parece que o estudo de problemas em contextos depende de outros saberes, além dos saberes matemáticos, bem como não são questionados os saberes matemáticos necessários para um dado tipo de problema. Logo, como estes podem ser reconhecidos pelos sujeitos para colocá-los em ação diante do referido problema?

Esses questionamentos dependem, além das experiências do sujeito que enfrenta o tipo de problema, de seu *filtro de percepção* (Chevallard, 2005) para o reconhecimento da situação associada à prática matemática, situação problematizada à luz da TAD, tendo em vista que o conhecimento entra em cena com a noção de relação do sujeito com o objeto de saber. De outro modo, a noção de relação ou mais precisamente *qualidades de relações* (Chevallard, 2005) "remetem *as práticas sociais realizadas no contexto da instituição e que colocam em jogo o objeto* em questão e as atividades que podem ser feitas na instituição com esse objeto"[8] (Bosch & Chevallard, 1999, p. 4, tradução nossa, grifos dos autores).

Com esse olhar, de modo a construir uma possível resposta à problemática da profissão docente de maior interesse em MM, assumimos os pressupostos destacados por Sodré e Guerra (2018), que propõem uma primeira versão do Ciclo Investigativo de Modelagem Matemática, daqui em diante CIMM, a partir de recursos teórico-metodológicos da TAD, assumido "como metodologia de desenvolvimento e análise de modelos matemáticos de situações em contextos concretos" (Sodré & Guerra, 2018, p. 253), que pode minimizar as dificuldades encontradas por alunos e professores em MM.

Mesmo que os resultados empíricos encontrados por Sodré e Guerra (2018) com os professores em formação sejam significativos, "ainda são provisórios e demandam experiências empíricas com o CIMM envolvendo número maior de participantes e

---

[7] Fragmento do texto: *when my future teachers were asked to solve some of the modelling problems stated in this paper, not all of them were successful. Some were behaving not very differently from first year students, they were not able to translate and felt uneasy when asked to do something unfamiliar. This may seem unbelievable to outsiders, but it is the hard truth. Some of our future teachers with a master in mathematics cannot translate at the level of high school. How will they be able to teach modelling to their students?*

[8] Fragmento do texto: *renvoie aux pratiques sociales qui se réalisent dans l'institution et qui mettent en jeu l'objet en question, soit donc à « ce qui se fait dans l'institution avec cet objet ».*

diversidade de situações que permitam avaliações de sua performance para futuros encaminhamentos empíricos em sala de aula” (Sodré & Guerra, 2018, p. 259).

Nessa perspectiva, dirigimo-nos ao estudo de problemas em contextos reais, assentado a partir dos pressupostos que esses problemas demandam a articulação e integração de conhecimentos matemáticos e não matemáticos, com a clareza do papel dominante destes últimos para o reconhecimento da situação em contexto associada ao modelo matemático.

Encontrar a situação que define o modelo matemático associado e vice-versa é um dos objetivos centrais em MM, tendo em conta que o conhecimento passa a ser descrito em termos de situações, o que inclui a razão de ser ou a racionalidade (Bosch, Chevallard & Gascón, 2006) que dá sentido à atividade de MM.

Ainda que os encaminhamentos apontados por Sodré e Guerra (2018) evidenciem respostas provisórias para o enfrentamento da problemática da profissão docente em MM, pressupomos que a construção de um *equipamento praxeológico*[9], no sentido proposto por Chevallard (2009a, 2019), pode se mostrar útil, senão indispensável para responder à problemática **P_0(MM)** da profissão docente, por levar em conta a criação de condições infraestruturais que torne possível, de algum modo, a concepção e execução da MM escolar como um saber ensinável e aprendível (Chevallard, 2005), isto é, passível de ser utilizada, ensinada, reconstruída e, mais amplamente, transposta de uma instituição para outra no sentido da transposição didática intra e interinstitucional, dependendo das “novas” condições criadas ou impostas para o funcionamento da prática de MM.

Assim, “de modo mais geral e melhor para a vida das pessoas e instituições em questão, qualquer equipamento praxeológico pessoal ou posicional deve conter praxeologias ‘mistas’, compostas por constituintes retirados de diferentes disciplinas $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, ..., $\mathcal{D}_n$”[10] (Chevallard, 2019, p. 98, tradução nossa).

A ratificação ou não de nossa hipótese nos encaminha, conforme os pressupostos da TAD aqui assumidos, à seguinte questão de investigação:

[9] O termo específico Equipamento Praxeológico, segundo Chevallard (2009a), refere-se ao “conjunto de praxeologias que a pessoa dispõe, ou que está equipada (mesmo que não possa atualizar tal ou tal praxeologia que venha a ocupar tal posição dentro de tal instituição): é o que chamo de equipamento praxeológico da pessoa” (CHEVALLARD, 2009a, p. 1-2, tradução nossa).

[10] Fragmento do texto: *More generally, for the better life of the persons and institutions concerned, any personal or positional praxeological equipment should contain “mixed” praxeologies, made up of constituents taken from different disciplines $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, …, $\mathcal{D}_n$.*

Dado um tipo de problema em contexto concreto que desejamos executar em modelagem matemática, qual é o equipamento praxeológico que se julga indispensável, ou, no mínimo útil, para a concepção e execução desse problema?

Sendo assim, objetivamos construir uma infraestrutura teórico-metodológica a partir de recursos da TAD que permita, de algum modo, dar visibilidade aos saberes matemáticos e não matemáticos, que se condicionam mutuamente e, com isso, tornar possível o ensino da MM escolar.

2 O PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA ORIENTADO

Na perspectiva da MM escolar, a resolução de uma questão problemática pode nos levar ao encontro da articulação e integração entre organizações praxeológicas ou arranjos de conhecimentos que podem ser orientados por um ou mais saberes, não necessariamente saberes teóricos, mas que podem ser produtos de um saber prático no sentido da TAD "que *se põe em funcionamento, se aprendem, se enriquecem, sem ser, porém, utilizados, ensinados, produzidos*" (Chevallard, 2005, p.154, grifos do autor, tradução nossa) para atender uma intencionalidade didática do professor em sala de aula.

Nesse sentido, a partir do modelo praxeológico, anunciado por Chevallard (1999), para Sodré (2019), o saber que orquestra as organizações praxeológicas globais apresentadas nesse modelo teórico pode ser oriundo dos saberes práticos de uma dada instituição, os quais são aprendidos sem um ensino planejado ou estruturado, mas que pela funcionalidade em ato desse saber, é quem "comanda" a articulação e integração de outros saberes, inclusive, os disciplinares que integram o equipamento praxeológico do sujeito que modela um problema em contexto real, por exemplo.

Assentado a partir dessa noção do papel funcional dos saberes práticos, Sodré (2019) destaca a noção de Organização Praxeológica Complexa (Sodré & Guerra, 2018, Sodré, 2019), daqui em diante OPC, com indispensável papel para a MM, haja vista que o estudo ou o uso de modelos matemáticos dependem de modo necessário de saberes matemático e, sobretudo, de saberes não matemáticos, em geral, não disciplinares ou práticos aprendidos sem o ensino planejado, apenas por ver e fazer o que viu o outro fazer, por imitação, isto é, "aprendemos olhando e imitando, ou seja, quando observamos as reações dos outros e participamos em seu jogo" (Gebauer, 2013, p. 68), conforme descreve

Wacquant (2007, p.65-66) “ao captar a interiorização da exterioridade e a exteriorização da interioridade”.

Os saberes práticos integram o *filtro de percepção* (Chevallard, 2005) dos sujeitos e, com isso, são mobilizados somente em dialética com a situação. É preciso considerar que a percepção

> Distingue a forma do fundo, o que é importante do que não é, o que é central do que é secundário, o que é atual do que é inatual. Esses princípios de julgamento, de análise, de percepção, de compreensão, estão quase sempre implícitos, e, ao mesmo tempo, as classificações que operam são coerentes, mas até certo ponto (Bourdieu, 2004, p. 99).

A partir desse extrato de texto restringimo-nos ao processo de construção de um modelo matemático por um sujeito que pode ser interpretado como um tipo de OPC (Sodré, 2019) realizada em ato. A construção de um modelo matemático como produto de uma OPC é um saber relativo sobre as práticas sociais que não se confunde com os saberes da prática, pois os saberes da prática não estão jamais assegurados em sua totalidade.

Sob essa compreensão, se assumirmos que a dificuldade, quando do uso da MM em sala de aula por alunos e/ou professores, por exemplo, reside no *silêncio da infraestrutura praxeológica* (Chevallard, 2009b) de saberes matemáticos e não matemáticos, incluindo os saberes práticos no sentido do *hábitus*, anunciados por Bourdieu (2004), então a noção de MM como uma OPC (Sodré, 2019) pode ser paulatinamente construída por meio do Percurso de Estudos e Pesquisa (Chevallard, 2013), daqui em diante PEP, ao chamar para si as praxeologias infraestruturais dotadas dos saberes disciplinares e não disciplinares necessários, senão indispensáveis, inclusive para o estudo de problemas em contextos concretos em MM.

É preciso destacar que o cumprimento de um PEP “completo”, de acordo com Chevallard (2013, p. 3, grifos do autor, tradução nossa):

> Supõe a realização de cinco "gestos" básicos, que são cinco tipos de tarefas H_i consubstanciais com a situação investigativa, as quais podem ser formuladas da seguinte forma:
> **H_1** - Observar as respostas $R^\lozenge$ que vivem nas instituições.
> **H_2** - Analisar – notadamente em duplo plano experimental e teórico – essas respostas $R^\lozenge$.
> **H_3** - Avaliar essas mesmas respostas $R^\lozenge$.
> **H_4** - Desenvolver uma resposta própria, $R^\heartsuit$.
> **H_5** - Difundir e defender a resposta $R^\heartsuit$ assim produzida[11].

[11] Fragmento do texto: *suppose l’accomplissement de cinq “gestes” de base, qui sont cinq types de tâches Hi consubstantiels à la situation d’enquête et qu’on peut formuler ainsi:*
H_1. Observer les réponses $R^\lozenge$ *déposées dans les institutions.*
H_2. Analyser notamment au double plan expérimental et théorique ces réponses $R^\lozenge$*.*
H_3. Évaluer ces mêmes réponses $R^\lozenge$*.*

A partir das cinco tarefas apresentadas, Chevallard (2013, p. 3, tradução nossa) destaca objetivamente que "a técnica τ_H mencionada consiste em realizar de forma coordenada (mas não necessariamente linear) esses cinco tipos de tarefas", sem, entretanto, explicitar possíveis "caminhos" sobre como coordenar essas tarefas, talvez por depender do filtro de percepção do sujeito que coordenará as tarefas, isto é, dos saberes práticos aprendidos, mas não ensináveis, os quais podem ser, todavia, (re)construídos pela "incorporação" de cinco *atitudes* que, segundo Chevallard (2013), são determinantes para a realização do PEP, a saber: *a atitude problematizadora, a atitude herbartiana, procognitiva, exotérica e a do enciclopedista comum*.

A incorporação dessas atitudes pode, em todo caso, levar a prática de MM a contrastar como uma atividade dependente exclusivamente de saberes matemáticos, cujo caminhar pode ser orientado de modo mais inclusivo pelos três gestos genuínos da atividade de MM, isto é, $\mathbf{G_1}$, $\mathbf{G_2}$ e $\mathbf{G_3}$ propostos por Sodré (2019), para atender uma intencionalidade didática do professor ou pesquisador ao estudar um problema em contexto concreto, conforme reescrevemos:

$\mathbf{G_1}$ – Usar modelos matemáticos socialmente legitimados para situações em contexto sociais para responder a questionamentos sobre essas situações, destacando a relação associativa entre situações em contextos e os modelos matemáticos;

$\mathbf{G_2}$ – Estudar um modelo matemático frente a diferentes situações e contextos, bem como estudar uma situação em contexto concreto frente a diferentes modelos matemáticos;

$\mathbf{G_3}$ – Criar um modelo matemático associado a uma nova situação a partir de estudo de situações e seus modelos matemáticos associados, tendo em conta as analogias ou homologias entre essas situações e a nova situação.

Nesse raciocíniob, esses três gestos podem materializar a incorporação das cinco atitudes determinantes, bem como coordenar a objetivação das cinco tarefas do *PEP*, que aqui passa ser interpretado como um PEP específico orientado ou simplesmente *PEP orientado* pelos três gestos a serem encaminhados pelo diretor de estudo de modo sequencial, podendo ser reiniciado a partir do primeiro gesto $\mathbf{G_1}$ e, se necessário, seguindo os demais, $\mathbf{G_2}$ e $\mathbf{G_3}$, caso a resposta encontrada pela comunidade de estudos não seja aceita como uma resposta desejada.

H_4. Développer une réponse propre, R♥*.*
H_5. Diffuser et défendre la réponse R♥ *ainsi produite.*

Vale ressaltar que o PEP Orientado (Sodré, 2019) não se confunde propriamente com o PEP proposto por Chevallard (2013), por este último, em sua gênese, ser destituído de qualquer orientação a *priori*, embora seja restrita a posição institucional do diretor de estudos como sujeito que deve surpreender continuamente a classe na investigação (Chevallard, 2005), ao criar situações de estudo e investigação.

De modo a ratificar ou retificar os pressupostos teórico-metodológicos esboçados, encaminhamos um recorte empírico realizado com professores em formação inicial de um percurso desenvolvido por Sodré (2019).

3 RECORTE DA EMPIRIA DE FORMAÇÃO INICIAL: ANÁLISE DE RESULTADOS ENCONTRADOS

O percurso de formação foi desenvolvido durante um curso de vinte horas, realizado em sete encontros com cinco professores em formação inicial, aqui representados por $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ de um curso de Licenciatura de uma universidade pública. Os professores foram divididos em dois sistemas didáticos ora simbolizados por $S_1 (x_1, x_3, \wp)$ e $S_2 (x_2, x_4, x_5, \wp)$ na investigação de uma *situação específica* sobre compra e venda de veículos, e orientada pelos seguintes questionamentos:

Q_1 – *Qual o valor da prestação a ser paga pela compra de um veículo*, considerando que a primeira deve ser paga de acordo com as situações A e B?:

A) No ato da compra;

B) Com sessenta dias após a compra.

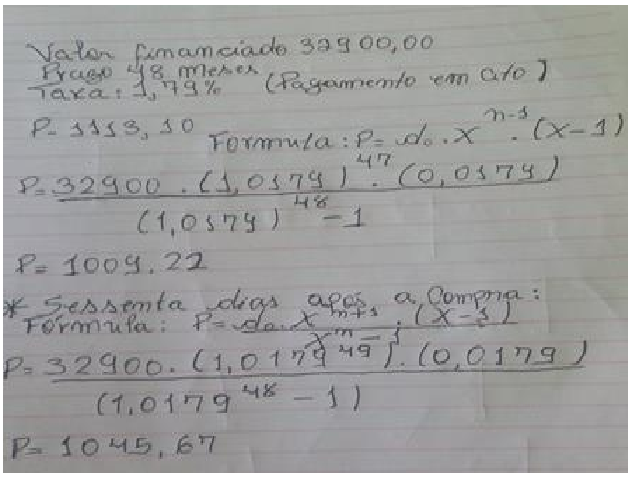
Dados do financiamento investigado pelos professores:

- Prazo do financiamento para 48 meses;
- Taxa de juros de 1,79% ao mês;
- Valor da prestação p = 1.113,10.

O questionamento **Q_1** demandou dos professores a realização do seguinte gesto:

> **G_1** – Usar modelos matemáticos socialmente legitimados para situações em contexto sociais para responder a questionamentos sobre essas situações, destacando a relação associativa entre situações em contextos e os modelos matemáticos.

A manifestação desse gesto se deu pela busca em fontes de livros didáticos da matemática escolar e de sites da internet de modo a construir uma resposta para o cálculo da prestação fixa, como orienta a Figura 2.


Valor financiado 32900,00
Prazo 48 meses (Pagamento em a/o)
Taxa: 1,79%
P= 1113,10 Formula: $P = d_0 . X^{n-1} . (X-1)$

$$P = \frac{32900 . (1,0179)^{47} . (0,0179)}{(1,0179)^{48} - 1}$$

P= 1009.22

* Sessenta dias após a Compra:
Formula: $P = \frac{d_0 . X^{n+1} . (X-1)}{X^{n} - 1}$

$$P = \frac{32900 . (1,0179^{49}) . (0,0179)}{(1,0179^{48} - 1)}$$

P= 1045,67

Figura 2: Registro do sistema didático auxiliar ***S₁* (*x₁*, *x₃*, ℘)**
Fonte: Sodré (2019).

O uso do modelo matemático traduzido pela fórmula revelada pelo sistema didático S1 evidenciou algumas problemáticas iniciais aos professores, em particular, a dificuldade de uso dos dados numéricos para operar com uso da calculadora científica, talvez pela baixa qualidade de relações (Chevallard, 2005) dos professores com uso da calculadora. As práticas manifestadas pelos professores frente ao uso do modelo matemático foram determinantes para que estes o estudassem de modo a ampliar o conhecimento sobre as relações entre as variáveis do referido modelo e as situações possíveis a ele associadas.

A dinâmica das práticas reveladas pelos professores evidenciou em consonância ao gesto $\mathbf{G_1}$, o desenvolvimento do seguinte gesto:

> $\mathbf{G_2}$ – Estudar um modelo matemático frente a diferentes situações e contextos, bem como estudar uma situação em contexto concreto frente a diferentes modelos matemáticos.

Esse gesto permitiu que os professores estudassem o modelo e as situações, inclusive, situações “controláveis”, as quais ajudaram na (re)construção do modelo matemático para responder a questionamentos de maior complexidade, entre eles:

***Q_2* – Qual o valor a ser pago pelo veículo no prazo de 48 meses, caso seja pago com um ano de antecedência?** (Figura 3).

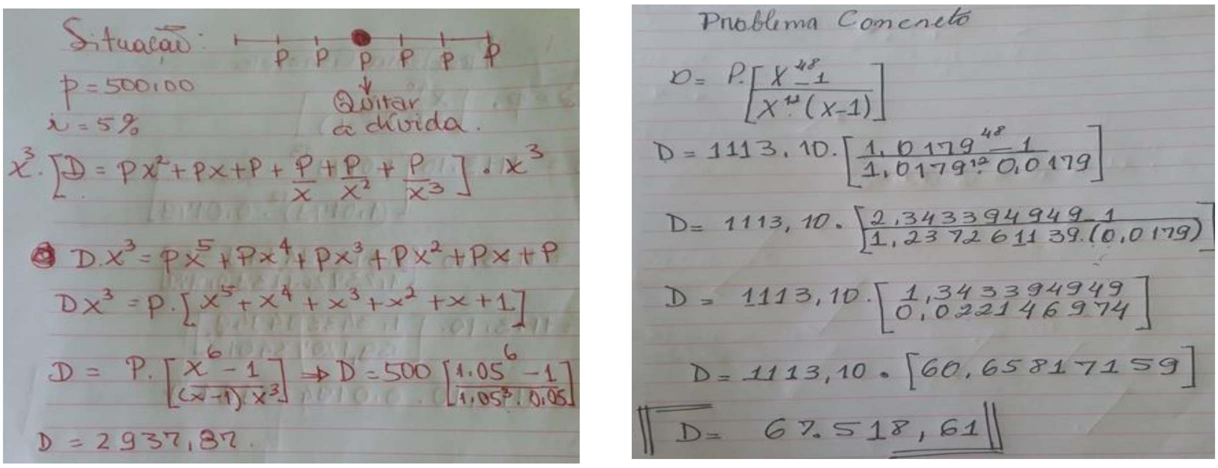


Figura 3: Registro do sistema didático auxiliar $\boldsymbol{S_2}$ **(**$\boldsymbol{x_2, x_4, x_5}$, $\wp$)
Fonte: Sodré (2019).

A situação controlável pelo baixo número de prestações envolvidas ajudou na projeção do jeito de fazer e de pensar do modelo matemático associado ao problema concreto. Vale ressaltar que, nesse processo de formação, alguns objetos desconhecidos aos professores foram revelados sob a condição indispensável do uso da calculadora científica. Nesse sentido, “o objeto *O existe* para o sujeito X se X tiver uma relação com o objeto O”[12] (Chevallard, 2005, p.148, grifos do autor, tradução nossa).

Além disso, houve desdobramento no estudo de situações associadas a esse modelo matemático, pois outras situações emergiram no processo de investigação como o problema de investimento de capitais aplicados na poupança. De outra maneira, essa situação específica do investimento de capitais em poupança evidenciou a manifestação dos professores em relação ao seguinte gesto:

> **G$_3$** – Criar um modelo matemático associado a uma nova situação a partir de estudo de situações e seus modelos matemáticos associados, tendo em conta as analogias ou homologias entre essas situações e a nova situação.

Em última análise, é preciso considerar que o processo formativo foi realizado com os professores com as seguintes orientações:

- **G$_1$:** O diretor de estudos percebeu que os sistemas didáticos $\boldsymbol{S_1}$ e $\boldsymbol{S_2}$ realizaram a Tarefa **T$_1$**: *investigar os modelos matemáticos relativos ao tipo de problema enfrentado;*
- **G$_2$:** Foi observado pelo diretor de estudos, que os sistemas didáticos realizaram as Tarefas, aqui simbolizadas por **T$_0$**, **T$_2$**, **T$_3$**, que consistem respectivamente, em

[12] Fragmentos do texto: *El objeto O* ***existe*** *para el sujeto X si X tiene una relación con el objeto O*.

construir uma situação inicial com dados "controláveis", encontrar a situação que define o modelo matemático associado e avaliar o modelo matemático;

- **G_3:** O diretor de estudos observou que os sistemas didáticos S_1 e S_2 realizaram as Tarefas **T_4** e **T_5,** concebidas como *desenvolver e difundir o modelo matemático*, respectivamente.

Com esse olhar, supomos que o PEP orientado, ao preservar o caráter cíclico, encaminha-nos a um equipamento praxeológico muito útil denominado *Ciclo Investigativo de Modelagem Matemática*, doravante CIMM, proposto provisoriamente por Sodré e Guerra (2018), que se expande pela inclusão de novos elementos, como produto de uma abstração das práticas de MM materializado como um saber a ser aprendido, mas fundamentalmente suposto de ser ensinável, conforme verificaremos a seguir.

4. A RECONSTRUÇÃO DO CICLO INVESTIGATIVO DE MODELAGEM MATEMÁTICA COMO EQUIPAMENTO PRAXEOLÓGICO POSSÍVEL

A infraestrutura da didática do CIMM, aqui encaminhada, emergiu a partir de análises e sínteses sobre o uso do PEP orientado. É dotada de seis tarefas sequenciais, sem serem todas sempre necessárias, e reinicia-se sempre que ajustes são demandados a partir de novos questionamentos sobre as "situações concretas" e/ou artificiais, as quais supomos, em última análise, permitirem a "incorporação" por professores e/ou pesquisadores das cinco atitudes investigativas destacadas por Chevallard (2013) para instaurar o processo de MM orientado pela didática do CIMM.

A infraestrutura praxeológica do CIMM é encaminhada pela delimitação das seguintes tarefas:

Tarefa T_0: Construir uma Situação de Referência Inicial para o problema em contexto

Uma situação de referência inicial é entendida como a primeira abstração sobre o problema em contexto real considerado. A técnica dessa tarefa consiste em considerar problemas em contexto do mesmo tipo com todos os dados conhecidos, inclusive, os dados para serem encontrados, que permitam encontrar possíveis relações entre eles, não necessariamente matemáticas.

Tarefa T_1: Investigar os modelos matemáticos que vivem na instituição escolar relacionados ao problema em contexto

Convém considerar a complexidade matemática dos modelos matemáticos para a situação suposta. Essa é uma questão vital para o estudo, pois uma maior exigência do conhecimento matemático poderá acarretar a rejeição ou a adoção inadequadas de um modelo matemático sobre a realidade estudada.

Situações inicialmente não imaginadas em um dado contexto podem se revelar com o uso do modelo, principalmente, a partir de modelos matemáticos que governam situações sociais, por exemplo, os modelos matemáticos sobre financiamentos.

Mediante a compreensão adotada pela TAD, assumimos que quanto maior o conhecimento de uma pessoa em situações com matemática, ou seja, situações que admitem praxeologias com matemática, maior a disponibilidade de saberes para encontrar situações praxeologias matemáticas associadas. Esse será o objetivo da tarefa seguinte.

Tarefa T_2: Encontrar situações que podem ser associadas a um modelo matemático

A técnica é analisar o modelo matemático em contraste com a situação de referência inicial considerada. Isso inclui desconstruir o modelo matemático para construir situações e vice-versa.

> É preciso também observar que um homem pode ser confrontado com uma situação na qual ele vê apenas determinado aspecto, e que a construção de um modelo pode obrigá-lo a lançar um olhar mais agudo sobre a situação e descobrir características as quais, no início, ele não observara. Saber mais pode ajudar a ver mais[13] (Revuz, 1971, p.50, tradução nossa).

A análise do modelo matemático encaminha o encontro com as situações, como uma formulação reversa, ou seja, vai do modelo à situação à qual a formulação do modelo pode estar associada.

[13]Fragmento do texto: *One must also remark that a man can be confronted with a situation of which he sees only certain aspects, and that the building of a model may compel him to throw a more acute look on the situation and discover features of which, at the beginnng, he was not aware. To know more may help tosee more.*

Tarefa T_3: Avaliar os modelos matemáticos

A avaliação é realizada assumindo como critérios a adequabilidade e a multivalência desses modelos. Ambas são avaliadas frente às situações. A técnica é encaminhada pelas seguintes subtarefas interconectadas:

- **Subtarefa S_{T31}: Avaliar a adequação das situações reconstruídas frente ao problema**

A adequação do modelo matemático não é uma questão matemática, mas é uma questão vital para o estudo da realidade que trata o tipo de problema em contexto, pois se alguém usa um modelo inadequado, por causa de sua conveniência, simplicidade, por exemplo, sem observar sua inadequação frente à situação, é preciso estar ciente do perigo de tirar conclusões sobre a realidade a partir do estudo de tal modelo (Revuz, 1971, p.49);

- **Subtarefa S_{T32}: A multivalência do modelo matemático e situações associadas frente ao tipo do problema**

São preferíveis os modelos matemáticos que dão conta de diferentes tipos de situações e, em consequência, diferentes questões sobre a realidade considerada, em lugar dos que somente dão conta de uma situação particular específica.

Tarefa T_4: Desenvolver um modelo matemático

A técnica para essa tarefa é produto das tarefas anteriores, de modo que pode resultar: (i) em um dos modelos matemático estudados; (ii) de modificações, inclusive de customização, de um dos modelos ou de articulação e integrações de modelos estudados.

A experiência da comunidade de estudo sobre MM é uma das condições que age para o desenvolvimeto de um modelo, além dos níveis de codeterminação didática, nem sempre claros, por exemplo, os impostos pelos programas das disciplinas e os recursos materiais disponíveis e usados, como calculadoras e/ou computadores, que agem, em geral, limitando ou potencializando as atividades matemáticas da comunidade de estudo na execução das tarefas *superestruturais* e *infraestruturais* (Chevallard, 2019) de MM.

Tarefa T_5: Difundir e defender o modelo matemático

A técnica para essa tarefa consiste em duas fases:

I - Utilizar o modelo matemático desenvolvido para enfretamento das situações eleitas como referência, se possível com diferentes conjuntos dados, mas considerando como desconhecidos os dados de interesse do problema em estudo. A demonstração da consistência das respostas obtidas pelo modelo com a resposta conhecida legitima o modelo matemático para a situação de referência;

II - Utilizar o modelo matemático desenvolvido no enfretamento do problema em contexto real com os dados originais. A razoabilidade das respostas obtidas com a repetição do uso do modelo com diferentes dados possíveis para o contexto do problema encoraja a legitimidade do modelo matemático para o tipo de problema em estudo.

O sucesso alcançado simultaneamente nas duas fases legitima provisoriamente o modelo matemático como resposta para o tipo de problema em estudo. A falha em uma delas evidencia o insucesso do modelo e, isso, demanda reformular a situação de referência e novo ciclo deve ser iniciado.

5. CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Esta investigação abordou a problemática da profissão docente em MM quanto à delimitação sobre o que ensinar e como ensinar MM, de comum interesse das linhas cognitivista (Blum, 2011, Schukajlow; Kaiser & Stillman, 2018) e epistemológica, em que se insere a TAD (Barquero; Bosch & Gascón, 2011, 2013, Florensa, Garcia & Sala, 2020). Assim, objetivou-se construir uma infraestrutura teórico-metodológica a partir de recursos disponíveis pela TAD que permita, embora parcialmente, minimizar ou tirar a invisibilidade dos saberes não matemáticos para o estudo de problemas em contextos reais, enfrentando-os e, consequentemente, tornando possível o ensino e aprendizagem da MM.

Nesse caminhar, assumiu-se a técnica de MM fundamentada na didática do PEP (Chevallard, 2013) orientada pelos três gestos genuínos da atividade de MM propostos por Sodré (2019), para atender uma intencionalidade didática do professor ou pesquisador frente ao estudo de um problema em contexto concreto, tendo em vista que essa técnica preserva o caráter cíclico do processo de MM.

Os resultados encontrados a partir de experimentações empíricas com professores em formação inicial permitiram o encaminhamento propositivo de um possível equipamento praxeológico que julgamos ser útil, senão indispensável, por pressupormos que a organização praxeológica do CIMM, delimitado por um conjunto de tarefas, subtarefas e técnicas no sentido da TAD, pode se constituir em uma possível resposta para o enfrentamento do problema da profissão docente de MM – P_0(MM), do ensino e da aprendizagem de MM em sala de aula. Sendo assim, o referido equipamento apresenta um duplo papel funcional enquanto dispositivo didático-metodológico: para o ensino-aprendizagem de MM e para a formação docente.

A essa dupla funcionalidade do CIMM, supomos que pesquisador e/ou professor pode integrar as atitudes fundamentais a serem “incorporadas” de acordo com Chevallard (2013), para transitá-lo da pedagogia de visitação de obras à pedagogia de questionamento de mundo, incluindo o questionamento de modelos matemáticos que eventualmente podem ser estudados e/ou investigados em uma epistemologia realmente funcional, no sentido de os modelos aparecerem como “máquinas” produtoras de conhecimentos úteis e, como tais, evidenciá-los como produtores de domínios de realidades por eles controladas.

Sob esse olhar, ficamos estimulados para realizar futuras pesquisas empíricas de modo a colocar em jogo o alcance empírico do CIMM e, com isso, revelar possíveis problemáticas que podem emergir a partir das tarefas que o delimitam e, em particular, sobre a noção de *modelagem matemática reversa* (Sodré, 2019) alicerçada pelo enfrentamento da tarefa $\mathbf{T_2}$ do CIMM.

REFERÊNCIAS

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las Ciencias Experimentales. Enseñanza de las ciencias: *Revista de investigación y experiencias didácticas*, v. 29, n. 3, p. 339-352.

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2013). The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, v. 33, n. 3, p. 307-338.

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? some answers from empirical research. In: Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., & Stillman, G. A. (ed.). Trends in teaching and learning of Mathematical modelling. ICTMA14. Dordrecht: Springer. p. 15-30.

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, v. 1, n. 1, p. 45-58.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, v. 38, n. 2, p. 86-95.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l’activité mathématique aux ostensifs. Recherches en didactique des mathématiques, v. 19, n.1, p.77-124. Recuperado de: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf.

Bosch, M., Chevallard, Y., & Gascón, J. (2006). Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics. Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.

Bourdieu, P. (2004). *Coisas ditas*. Tradução: Cássia R. da Silveira e Denise Moreno Pegorim. São Paulo: Editora Brasiliense.

Chevallard, Y. (1999). L'analise des pratiques enseignantes em theórie anthopologique Du didactique, recherches em didactiques des mathematiques. Grenoble. La Pensée Sauvage Éditions, v. 19.2, p.221-265.

Chevallard, Y. (2005). La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado. 2. ed. 3. reimp. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Chevallard, Y. (2009a). La tad face au professeur de mathématiques. *UMR Adef*, Toulouse.

Chevallard, Y. (2009b). La notion d´ingénierie didactique, um concept à refonder. Questionnement et élémentos de réponses à partir de la TAD. In: Margolinas, C. et al. (org.): En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme). *Recherches em Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 1, p. 81- 108.

Chevallard, Y. (2019). INTRODUCING THE ANTHROPOLOGICAL THEORY OF THE DIDACTIC: AN ATTEMPT AT A PRINCIPLED APPROACH. *Hiroshima journal of mathematics education* - 12: p.71-114.

Chevallard, Y. Éléments de didactique du développement durable – Leçon 1*: Enquête codisciplinaire & EDD,* 2013.

Cristensen, O. R., Skovsmose, O., & Yasukawa, K. (2008). The Mathematical state of world explorations in to the characteristics of mathematical descriptions. *Alexandria - Revista de Educação em Ciências e Tecnologia*, v.1, n.1, p. 77-90, mar.

Czocher, J. A. (2019). Precision, Priority, and Proxies in Mathematical Modelling. In.: Stillman, G. A.; Brown, J .P. (eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education*, ICME-13 Monographs.

Eco, U. (2003). El mago y el científico. *El País*, Madrid, 15 dez. p. 1-3.

Florensa, I., García, F. J., & Sala, G. (2020). Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática: Estudios de caso en distintos niveles educativos. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática* - 17, p.21–37.

Garcia, F., Gascón, J., Higueras, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM Mathematics Education*, v. 38, n. 3, p. 226-246.

Gebauer, G. (2013). *O pensamento antropológico de Wittgenstein*. Tradução: Milton Camargo Mota. São Paulo: Loyola.

Grandsard, F. (2005). *Mathematical modelling and the efficiency of our Mathematics*.

Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and learning mathematical modelling:* approaches and developments from german speaking countries. ICME13 TOPICAL SURVEY. Cham: Springer.

Guerra, R. B., & Silva, F. H. S. (2009). Reflexões sobre modelagem matemática crítica e o fazer matemático da escola. *Perspectivas da Educação Matemática,* v.2, n. 3, 95-119.

Jankvist, U. T., & Niss, M. (2019). Upper secondary school students' difficulties with mathematical modelling. *International journal of mathematical education in science and technology*. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1587530.

Perrenet, J., & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, v. 1, n. 6, p. 3-21.

Revuz, A. (1971). The position of geometry in mathematical education. *Educational Studies in Mathematics*, v. 4, p.48-52.

Schukajlow, S., Kaiser, G., & Stillman, G. (2018). Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM - Mathematics Education*, v. 50(1–2), p. 5-18 Doi 10.1007/s11858-018-0933-5.

Sodré, G. J. M. (2019). *Modelagem matemática escolar: uma organização praxeológica complexa*. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém.

Sodré, G. J. M., & Guerra, R. B. (2018). O ciclo investigativo de modelagem matemática. *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, v.20, n.3, p. 239-262. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i3p239-262.

Sodré, G. J. M., & Oliveira, M. L. S. (2021). O ciclo investigativo de modelagem matemática: uma transposição didática escolar. *VIDYA*, v. 41, n. 1, p. 35-57, jan. /jun., 2021 - Santa Maria.

Stillman, G. A. (2019). State of the art on modelling in mathematics education—lines of inquiry. In. Stillman, G. A. e Brown, J. P. (eds.), *Lines Of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education*, ICME-13 monographs, https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_1.

Vorhölter, K., Greefrath, G., Borromeo Ferri, R., Leiß, D., & Schukajlow, S. (2019). *Mathematical Modelling*. In: Jahnke, H. N. Hefendehl-Hebeker, L. (Eds.), *Traditions in german-speaking mathematics education research* (p. 91-114). Springer. doi: 10.1007/978-3-030-11069-7_4.

Wacquant, Loïc. (2007). Esclarecer o Habitus. *Educação & Linguagem*. Ano 10. Nº 16. p. 63-71, Jul.-Dez.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
O equipamento praxeológico para o problema didático da modelagem matemática

Gleison De Jesus Marinho Sodré
Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas
Universidade Federal do Pará (UFPA), Escola de Aplicação da UFPA, Belém, Brasil
profgleisoneaufpa@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3993-4236.
http://lattes.cnpq.br/3552794530305795

Endereço de correspondência do principal autor
Conjunto Tauari, Bairro Icui-Guajará, Quadra 01, Nº 12, CEP: 67125-060, Ananindeua, Pa, Brasil.

AGRADECIMENTOS
Agradecemos a Escola de Aplicação da UFPA por oferecer condições para realização de atividades de ensino, pesquisa e extensão.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: G. J. M. Sodré
Coleta de dados: G. J. M. Sodré.
Análise de dados: G. J. M. Sodré
Discussão dos resultados: G. J. M. Sodré
Revisão e aprovação: Não se aplica

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 03-06-2021 – Aprovado em: 02-12-2021