SIGNIFICADOS DE EQUAÇÃO: UM ESTUDO REALIZADO COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Marcio Dorigo[1]
Universidade Nove de Julho (UNINOVE)
Alessandro Jacques Ribeiro[2]
Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN)

RESUMO

Nosso objetivo neste artigo é apresentar resultados de uma pesquisa acerca dos significados de equação para uma dupla de alunos do Ensino Médio. A pesquisa teve um caráter diagnóstico. Investigamos se diferentes significados de equação estão presentes nas resoluções de atividades matemáticas envolvendo equações e como são desenvolvidas. A pesquisa fundamentou-se nos resultados apresentados por Ribeiro, que apresenta diferentes significados para o conceito de equação. Em nossa pesquisa utilizamos situações matemáticas fundamentadas teórico e metodologicamente nos Multisignificados de Equação especialmente elaboradas/selecionadas para a coleta de dados. De acordo com nossas análises, observamos que predomina nessa dupla de alunos o significado *intuitivo-pragmático*, assim como a dificuldade que têm em reconhecer o conceito de equação em situações matemáticas. Pretendemos, com os resultados encontrados, colocar em discussão a importância de se investigar e conhecer o pensamento dos alunos sobre equação, bem como oferecer possibilidades de ampliar seus conhecimentos, utilizando, por exemplo, uma abordagem de ensino que contemple diferentes significados de um mesmo conceito. No nosso caso, o conceito de equação.

Palavras-chave: Multisignificados de Equação; equação; educação algébrica; educação matemática; Ensino Médio.

[1] marcio.dorigo@uninove.br
[2] alejacques@uol.com.br

ABSTRACT

Our purpose within this paper is to present the results of a research about meanings of equation by a pair of high school students. This research had a diagnostic character, exploring whether and how the different meanings of the equation are present in students' knowing of equations. The research was grounded and built on the results revealed by Ribeiro - *Multimeanings of Equation on the Teaching of Mathematics* in which the author presents different meanings to the concept of equation. In our research we use mathematical situations especially designed / selected for data collection, none of those that were substantiated, theoretical and methodological in Multimeanings Equation. According to our analysis, we found that predominates in this group of students the meaning *intuitive-pragmatic*, these students also presented difficulty in recognizing the concept of the equation when it was immersed in mathematical situations. We pretend with the results we found to promote a discussion of the importance of investigating and knowing the students' conceptions of the equation as well as to offer opportunities to expand these concepts, using, for example, a teaching approach that includes different meanings for a term, in our case, the concept of equation.

Key-Words: Multimeanings of equation; equation; educational algebra; mathematics education; High School.

INTRODUÇÃO

Ao analisar, em nossa prática, os diferentes tipos de equações que são apresentadas aos alunos por professores e por livros didáticos, assim como os conhecimentos das diferentes formas utilizadas para resolver essas equações, começamos a refletir sobre a importância de compreender os processos de ensino e aprendizagem dos alunos, no que diz respeito ao ensino de equações.

Com base nessas reflexões, conjecturamos que, para a Educação Básica, uma aprendizagem de equações com significado, deve considerar, primeiro a importância de que o aluno entenda o que são e para que servem as equações, e como desenvolver estratégias para resolvê-las; segundo, ser capaz de utilizar tais conhecimentos para fazer uma leitura crítica das soluções; terceiro, propiciar a capacidade de abstração e generalização, ajudando assim o aluno a compreender situações do cotidiano escolar e de sua vida diária, como fazer conjecturas, resolver problemas, ler, interpretar, construir gráficos, etc.

Ainda nessa direção, é sabido que, ao fim de sua escolaridade básica, muitos alunos enfrentam um dilema para entrar na universidade. Muitos dos cursos superiores possuem, em seus currículos, disciplinas matemáticas, as quais contemplam o tema equações, quer seja para cálculos financeiros, análises gráficas, resolução de problemas e cálculos estatísticos e probabilísticos, bem como para tomada de decisão e elaboração de relatórios.

Essas reflexões e conjecturas que advêm de nossa experiência como docente na Educação Básica e no Ensino Superior legitima-nos a apontar o grande problema que é os alunos resolverem as equações, cuja abrangência não se limita às suas dificuldades, mas também às dificuldades dos docentes. Muitas vezes constatamo-nos desprovidos de outras formas de ensinar, senão aquelas que estão estritamente relacionadas às técnicas e aos processos mecanizados com os quais aprendemos. Arriscamo-nos a dizer que tais situações são corroboradas pelas abordagens propostas por muitos livros didáticos. Observamos, ainda, que as estratégias e procedimentos de resolução de equações apresentadas aos alunos parecem, muitas vezes, não ter significado para eles que manipulam as estruturas presentes nas equações, sem saber reconhecê-las ou entender por que estão aprendendo tal conteúdo.

Nossas reflexões e nossa experiência profissional certamente nos apontaram um problema que merecia ser investigado e levaram-nos a uma pesquisa teórica sobre assunto. Os resultados dessa investigação fundamentou-nos em relação aos avanços e às lacunas que a temática apresentava no campo da pesquisa em Educação Matemática, no que se refere ao ensino e à aprendizagem de equações.

O QUE NOS DIZEM AS PESQUISAS SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES

A partir do contexto apresentado na seção anterior, iniciamos nossa revisão teórica levantando as teses, as dissertações e os artigos que tratassem da temática em questão. Além disso, procuramos analisar também alguns documentos oficiais e livros didáticos sobre o ensino e a aprendizagem de equações.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 2000) encontramos orientações para o ensino da álgebra, que faziam referência a calcular, resolver, identificar variáveis, traçar e interpretar gráficos e resolver equações de acordo com as propriedades das operações no conjunto dos números reais e as operações válidas para o cálculo algébrico. Essas orientações sinalizam a importância do estudo das estruturas internas do processo de aprendizagem de equações.

Em nossas leituras, pudemos constatar em Gil, Portanova (2007); Lima (2007); Zenere (2005); Dreyfus, Hoch (2004); Ribeiro (2001), que os resultados de seus estudos também sinalizam para o excesso de mecanização e automatismo no ensino e na aprendizagem de álgebra, principalmente no que se refere ao estudo das equações – tema de fundamental importância tratado no ensino da Matemática.

Nesse sentido, o artigo apresentado pelas pesquisadoras Gil, Portanova (2007) sinalizam para as dificuldades de aprendizagem dos alunos em álgebra e apontam um caminho para uma melhor aprendizagem. Elas observaram que, conforme enfatizam os (BRASIL, 1998, p.115, 116) resultados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), por exemplo, os itens referentes à álgebra raramente atingem, em muitas regiões do país, um índice de 40% de acertos. Apontam também para a dificuldade que os alunos possuem em compreender os procedimentos que fazem parte do estudo algébrico.

Outro estudo relevante para nossa problemática é o de Lima (2007). A pesquisadora aponta que as concepções apresentadas por alunos de primeiro e segundo ano do Ensino Médio diretamente relacionadas ao uso de técnicas e procedimentos mostraram-se ineficazes. As equações algébricas resolvidas pelos alunos não tinham para eles significado de equações, mas apenas de uma conta a ser resolvida.

Em Dreyfus e Hoch (2004) encontramos reflexões sobre o fato de que alunos do Ensino Secundário em Israel não reconhecem as estruturas internas de uma equação. Para eles é fácil reconhecer uma equação, mas difícil comentar e reconhecer as estruturas internas delas, o que os leva a resolvê-las de modo procedimental.

Numa pesquisa de mestrado, Ribeiro (2001) verificou e analisou procedimentos e estratégias empregados por alunos de 8ª série do Ensino Fundamental, ao resolver questões de Álgebra iguais às aplicadas no Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP, 1997), e constatou dificuldades específicas na resolução de alguns tipos de equações.

A pesquisa de Barbosa (2009) sinaliza que tanto professores de Matemática com pouco tempo em sala de aula como os que já estão atuando na educação há mais tempo, utilizam basicamente técnicas e processos para resolverem as equações. Nesse sentido, conclui que a concepção de equação dos professores observados mostra-se pouco estruturada, uma vez que conflitos cognitivos surgiram no momento em que esses professores buscaram justificar as técnicas de resolução utilizadas.

Com isso, pudemos verificar que nossas preocupações com o processo de ensino e de aprendizagem das equações tornavam-se ainda mais relevantes, dado que elas estão presentes em diversos outros assuntos e conteúdos relacionados à própria Matemática e a outras disciplinas.

As pesquisas apontam para o uso excessivo de mecanização — técnicas de resolução das equações —, uma receita pronta que parece estar passando de geração em geração. É fato que os alunos tendem a "reproduzir" em sala de aula, e mesmo fora delas, as técnicas e procedimentos apresentados por seus professores e pelos livros didáticos, mas parece-nos que essas formas de aprendizagem acabam não sendo tão eficazes.

Inserida no projeto, [3]"Os multisignificados de equação no ensino e na aprendizagem de Matemática", desenvolvido junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo, o, nossa pesquisa objetivou responder à seguinte questão: ***Quais significados de equação estão presentes nos conhecimentos dos alunos do Ensino Médio?***

FUNDAMENTOS TEÓRICOS E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Como indicam os resultados de outras pesquisas analisadas, não há "receita pronta", mas indicações de caminhos a serem seguidos para que a aprendizagem de equação tenha significado para o aluno.

Considerando nossa preocupação em relação a uma aprendizagem de equação que contemple diferentes significados, nossa pesquisa fundamentou-se nos resultados da tese de doutoramento de um dos autores deste artigo (RIBEIRO, 2007) na qual são apresentados seis diferentes significados — Multisignificados de Equação — para o conceito de equação.

Vale ressaltar que Ribeiro (Idem) buscou contemplar, de forma sistêmica, "todos" os conceitos de equação apresentados ao longo da história pelos mais diferentes povos e para os mais diferentes fins.

Em seu trabalho, além do estudo epistemológico, investiga também como as equações aparecem em livros didáticos e em dicionários de Matemática.

[3] No que se refere ao termo "multisignificados", mantivemos a grafia utilizada por Ribeiro (2007), a qual vendo sendo utilizada em todos os seus trabalhos.

A partir desses estudos, (Ibidem, p. 127, 128) concebe os multisignificados de equação, a saber: *Intuitivo-Pragmático, Dedutivo-Geométrico, Estrutural-Generalista, Estrutural-Conjuntista, Processual-Tecnicista e Axiomático-Postulacional.*

Constatou que as equações já eram trabalhadas pelos babilônios em aproximadamente 1950 a.C., concebidas, porém, como igualdade entre valores, muito ligada às ideias intuitivas, tratadas de forma aritmética e sempre vinculadas a problemas práticos (INTUITIVO-PRAGMÁTICO).

Na continuidade de sua pesquisa, constata que os gregos da Idade Heróica da Matemática (aproximadamente século V a.C.) reconheciam uma equação ligada a figuras geométricas, nas quais as incógnitas eram, normalmente, segmentos de reta; posteriormente (entre 250 d.C. e 350 d.C. com Diofanto de Alexandria), essas equações eram tratadas de forma dedutiva (DEDUTIVO-GEOMÉTRICO). O significado dedutivo- geométrico foi também percebido nas intersecções de curvas de Omar Khayyam e na Geometria das Curvas.

Como estava pesquisando como apareciam as ideias de equação em diferentes povos e as formas como era tratada em livros, o autor revela-nos outro significado que emerge das concepções dos europeus renascentistas, quando reconhecem uma equação a partir de sua generalização, quer sejam incógnita ou parâmetros, e tratam-na de forma estrutural. Isso significa dizer que para os europeus Cardano, Tartaglia, Abel e Galois, entre outros, o olhar estava sobre as propriedades algébricas envolvidas na resolução das equações (ESTRUTURAL-GENERALISTA).

Ainda em continuidade de seu estudo, Ribeiro (Idem) identifica outro significado de equação que pode ser reconhecido através da Matemática do grupo Bourbaki, e em matemáticos como Rogalski e Warusfel, nos quais as equações são reconhecidas como sendo relações entre conjuntos e sempre tratadas de forma a observar as propriedades algébricas (ESTRUTURAL-CONJUNTISTA).

Ao investigar as pesquisas de Cotret (1997) e Dreyfus e Hoch (2004), Ribeiro (2007) verificou outro significado para equação. Nela, o indivíduo reconhece uma equação através do processo de resolução e trata-a segundo técnicas de manipulações algébricas (PROCESSUAL-TECNICISTA).

O último significado de equação observado e concebido é o AXIOMÁTICO-POSTULACIONAL, no qual uma equação pode ser reconhecida como algo sem definição, de maneira análoga a um conceito primitivo como o da geometria. Um exemplo seria a definição de ponto. Dessa forma, é possível verificar que uma equação pode ser trabalhada mesmo sem uma definição formal.

O autor apresenta como conclusão que esses multisignificados podem contribuir para uma melhoria significativa no ensino e aprendizagem de equações, uma vez que contempla diferentes formas de *"ver"* e *"tratar"* as equações.

Nesse sentido, ratificamos essas considerações, pois todas as pesquisas estudadas apontam para a necessidade de se trabalhar com diferentes significados para o conceito de equação.

As atividades utilizadas em nossa coleta de dados ilustrarão, com seus respectivos objetivos, a relação de cada situação matemática com o significado concebido em Ribeiro (2007). Ao finalizar tais análises, serão apresentados os procedimentos metodológicos utilizados nesta pesquisa.

A primeira atividade está dividida em oito situações. Cinco delas têm apenas um significado – a que chamamos de situações "puras" –; as outras três possuem dois ou mais significados – a que chamamos de situações "combinadas" –. O objetivo dessa primeira atividade é verificar se nas soluções apresentadas pelos alunos são contemplados os diferentes significados de equação que compõem os Multisignificados de Equação (Ibidem).

ANÁLISES PRELIMINARES DAS ATIVIDADES UTILIZADAS PARA A COLETA DE DADOS

I – Situações Matemáticas da Atividade 1:

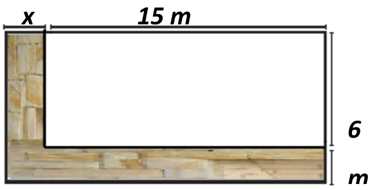
- **Situação – 1a**

Determine os valores de y para quais a expressão $(y – 1)^2$ é igual a -4y.

O objetivo da proposta é investigar se os alunos reconhecem a equação de 2º grau que está apresentada em linguagem mista e como eles a resolvem. Busca também averiguar se a maneira com que o aluno resolve essa equação do 2ª grau remete-se ao significado processual-tecnicista, pois, embora possamos tratar essa equação de forma a aplicar processos e técnicas, fica claro que a manipulação de técnicas algébricas facilita o desenvolvimento da resolução. Pelo significado processual-tecnicista, segundo Ribeiro (Idem), a equação é concebida como a sua própria resolução, como os métodos e técnicas que são utilizados para resolvê-la. Sua utilização está relacionada a métodos e técnicas de resolução.

❖ **Situação – 1b**

O projeto de um jardim retangular prevê que se coloquem no seu contorno (formando retângulos) pedras ornamentais, que estão indicadas na figura:



Sabendo-se que a área ocupada pelas pedras é de 46 m², calcule a medida x, em metros.[4]

Essa situação deverá investigar se os alunos reconhecem a equação de 2º grau implícita e como eles desenvolvem a resolução da equação apresentada na forma geométrica de áreas de figuras planas. Procura também verificar se a maneira com que o aluno resolve essa equação do 2º grau remete ao significado dedutivo-geométrico (Ibidem). Segundo esse significado, a equação é concebida como ligada às figuras geométricas, aos segmentos. Sua utilização está relacionada a situações envolvendo cálculos e operações com segmentos, com medidas de lados de figuras geométricas e intersecção de curvas.

[2] Jornal do aluno. p. 44

- **Situação – 1c**

Observe as seguintes situações e encontre, se possível, valor(es) para x:

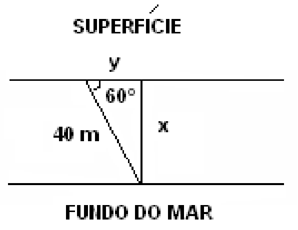
a) $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})=\mathbf{0}$. **Justifique por que você resolveu dessa forma a questão?**

b) $\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})}=\mathbf{0}$. **Justifique por que você resolveu dessa forma a questão?**

Na situação proposta, deverá ser investigado se os alunos reconhecem a estrutura implícita, como eles desenvolvem a resolução da equação apresentada na forma de multiplicação e divisão de expressão algébrica. Será observado ainda se a forma pela qual o aluno resolve essa equação remete ao significado estrutural-generalista. Por esse significado, a equação é concebida como uma noção estrutural definida, com propriedades e características próprias, considerada por si própria e operando-se sobre ela (Ibidem). Sua utilização está relacionada com a busca de soluções gerais para uma classe de equações de uma mesma natureza.

- **Situação – 1d**

Um mergulhador percorreu uma distância de 40m entre a superfície e o fundo do mar, segundo uma trajetória retilínea que forma um ângulo de 60° com a superfície, conforme mostra o desenho



a) Qual é a profundidade do local alcançado pelo mergulhador?

b) Subindo verticalmente para a superfície, a que distância do ponto em que mergulhou ele sairá?[5]

Nessa situação deverá ser investigado se, utilizando as relações trigonométricas no triângulo retângulo, os alunos reconhecem a equação trigonométrica — que está apresentada na língua natural —; como eles desenvolvem a resolução da equação e se a maneira com que o aluno resolve essa equação trigonométrica remete-se aos significados processual-tecnicista e intuitivo-pragmático, pois, embora outros significados possam surgir dessa situação, acreditamos que esses sejam os mais prováveis. Pelo significado processual-tecnicista, a equação é concebida como a sua própria resolução – como os métodos e técnicas que são utilizadas para resolvê-la. Pelo significado intuitivo-pragmático, ainda de acordo com Ribeiro (Idem), a equação é concebida como uma noção intuitiva, ligada à ideia de igualdade entre duas quantidades. Sua utilização está relacionada à resolução de problemas de ordem prática, originados de situações do dia a dia.

- **Situação – 1e**

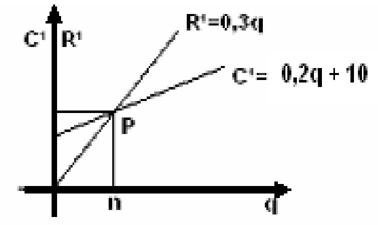
Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês R$ 70,00 para a compra de CDs ou DVDs; Um CD custa R$ 12,00 e um DVD custa R$ 16,00. Quais as possibilidades de compra desses dois bens, gastando exatamente os R$ 70,00?[6]

A situação exposta deverá verificar se os alunos reconhecem a equação diofantina linear, utilizando uma situação-problema que está apresentada na linguagem natural e como eles desenvolvem a resolução da equação. O objetivo é também verificar se a maneira com que o aluno resolve essa equação remete-se ao significado intuitivo-pragmático, pois acreditamos que os alunos devam tentar a resolução por meras tentativas e cálculos mentais.

[5] Material retirado e adaptado do *site*: <http://www.scribd.com/doc/7698423/trigonometriatriangulo>, em 10/05/2009, às 18h.
[6] Essa questão foi adaptada da Dissertação de Mestrado de Pommer, p. 63

❖ **Situação – 1f**

Um empresário prevê que o custo total "C_t" para a produção de uma certa quantidade "q" de geladeiras e a receita total "R_t", obtida com a venda de todas as geladeiras produzidas, variam como mostra o gráfico abaixo.



O ponto "P" indica que o empresário não tem lucro nem prejuízo com a produção e a venda de um certo número de geladeiras. Com qual quantidade de geladeiras esse empresário não terá lucro nem prejuízo?[7]

A situação apresentada deverá investigar se os alunos reconhecem a equação de 1º grau que gera a função do ponto em comum das retas que estão apresentadas no gráfico, se a maneira com que o aluno a encontra e a valida remete-se aos significados dedutivo-geométrico e estrutural-conjuntista. Pelo significado dedutivo-geométrico, a equação é concebida como ligada às figuras geométricas, aos segmentos. Sua utilização está relacionada a situações envolvendo cálculos e operações com segmentos, com medidas de lados de figuras geométricas e intersecção de curvas. No que se refere ao significado estrutural-conjuntista, a noção de equação é concebida dentro de uma perspectiva estrutural, que está diretamente ligada à noção de conjunto. É vista como uma ferramenta para resolver problemas que envolvam relações entre conjuntos (Ibidem).

❖ **Situação – 1g**

Resolva, em R, determinando o conjunto solução:

$$\log_2(2x-5)=2$$

A situação proposta busca investigar se os alunos reconhecem a equação logarítmica que está apresentada na forma simbólica e como eles desenvolvem a

[7] Questão retirada e adaptada do SARESP/2007.

resolução da equação. Pretende também constatar se a maneira com que o aluno resolve essa equação logarítmica remete-se ao significado processual-tecnicista, pois, embora possamos tratar essa equação de forma a aplicar processos e técnicas, fica claro que a manipulação de técnicas algébricas facilita o desenvolvimento da resolução.

❖ **Situação – 1h**

Num laboratório é realizada uma experiência com um material volátil, cuja velocidade de volatilização é medida pela sua massa, em gramas, em função do tempo *t*, em horas, de acordo com a fórmula $m = 3^{2t} + 3^{t+1} - 108$. Assim sendo, calcule o tempo máximo de que os cientistas dispõem para utilizar esse material antes que ele se volatilize totalmente.[8]

Pela situação que apresentamos, deverá ser investigado se os alunos reconhecem a equação exponencial que está apresentada na forma de língua natural e como eles desenvolvem a resolução da equação. Também será verificado se a maneira com que o aluno resolve essa equação logarítmica remete-se ao significado processual-tecnicista, pois, embora seja possível tratar essa equação de forma a aplicar processos e técnicas, fica claro que a manipulação de técnicas algébricas facilita o desenvolvimento da resolução.

II – Atividade 2:

A atividade 2 teve o intuito de investigar se a ideia de equação está presente no repertório dos alunos e se eles percebem quais das situações da atividade 1 estão presentes na ideia de equação. Enfim, pretendemos constatar se os alunos reconhecem equação nas situações apresentadas. O objetivo dessa atividade é verificar se, ao dizer que o objeto matemático em análise é a equação, os alunos reconhecem em quais situações matemáticas as equações estão contempladas e como apresentam suas justificativas.

[8] Material retirado do *site* <http://www.portalimpacto.com.br/docs/JerleyVestF1Aula14_09.pdf>, em 10/05/2009, às 20h.

Ao analisar tais justificativas, acreditamos encontrar – ainda que de forma implícita – alguns dos multisignificados de equação (Ibidem). A observação faz-se necessária, uma vez que os alunos podem não reconhecer a equação presente na atividade 1, e também pelo fato de não haver solicitação para que se remeta ao significado axiomático-postulacional, o qual propõe que uma equação possa ser reconhecida como algo sem definição, de maneira análoga a um conceito primitivo como o da geometria. Porém, ela pode ser dispensável, caso os alunos reconheçam e utilizem as equações para desenvolver a atividade 2.

DESCREVENDO AS SESSÕES DE COLETA DE DADOS

A pesquisa desenvolvida em (DORIGO, 2010) caminhou na perspectiva de uma abordagem qualitativa, cujo caráter da investigação foi o de diagnosticar as condições atuais do ensino e da aprendizagem de equação junto a um grupo de alunos do Ensino Médio.

Os participantes de nossa pesquisa foram alunos do último ano de escolaridade da educação básica, pois acreditamos que, ao trabalhar com alunos do 3º ano do Ensino Médio, teríamos elementos mais contundentes para nossas análises. Em nosso entendimento, os alunos já estavam familiarizados com os diferentes tipos de equações que iríamos abordar no instrumento de coleta de dados. As equações apresentadas partiram de situações polinomiais, exponenciais, trigonométricas, geométricas e logarítmicas. Essas equações, por sua vez, remeteram-se aos Multisignificados de Equação concebidas por Ribeiro (2007), principal referencial teórico utilizado em nossas análises.

O critério para determinar a escola onde a pesquisa foi realizada, partiu de conversas com a sua direção e com seu coordenador pedagógico. Ambos, em suas falas, demonstraram incentivos para realização de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática. A escolha dos alunos partiu de conversas com as duas turmas de 3º ano do Ensino Médio de 2009. Naquele momento, foi apresentado o trabalho como sendo uma pesquisa de Mestrado sobre o ensino de álgebra. Na ocasião, discutimos com os alunos a importância de sua contribuição para a pesquisa sobre ensino e aprendizagem.

Optamos por trabalhar com oito grupos de alunos, divididos em duplas, sendo todos eles alunos do 3º ano do Ensino Médio Regular. A coleta de dados aconteceu em três encontros, fora do período de aula, na "pré-aula", cada um com duração de uma hora e meia.

As situações matemáticas utilizadas no instrumento de coleta de dados foram agrupadas em duas atividades: atividade 1, com oito situações matemáticas, que remetem aos significados de equação concebidos por Ribeiro (Idem); atividade 2, que procurou investigar se os alunos reconheceram as equações tratadas na atividade 1.

Durante os encontros fizemos registros em áudio para nos auxiliar nas análises posteriores, pois, durante os diálogos entre as duplas, achamos que só as anotações escritas seriam suficientes. Iniciamos os trabalhos realizando três encontros: no primeiro, os alunos desenvolveram quatro situações de forma aleatória; no segundo, deram continuidade, desenvolvendo as outras quatro situações; no terceiro, nós devolvemos todas as situações para as duplas, a fim de elas realizarem a atividade 2. Ratificando, o objetivo da atividade 2 era o de verificar se os alunos reconheceriam as equações que foram tratadas na atividade 1.

DISCUTINDO OS RESULTADOS

Nesta seção, desenvolveremos a análise dos dados coletados e apresentaremos os protocolos das resoluções desenvolvidas pelos alunos, bem como a transcrição dos diálogos e discussões que surgiram ao longo dos três encontros**.** Optamos, devido à limitação de espaço, por apresentar os dados de uma única dupla (***Dupla 1***) para fins de análise e discussões. Utilizamo-nos dos Multisignificados de Equação (Ibidem) como referencial teórico para a investigação dos significados utilizados pelos alunos.

Como objetivo de nossa pesquisa, procuramos, em nossas análises, observar se os diferentes significados de equação propostos nas situações matemáticas apresentadas nas atividades que utilizamos na coleta de dados, são reconhecidos e como eles são tratados por esses alunos. Além disso, especificamente na segunda atividade, procuramos identificar se os alunos reconheciam as equações que estavam presentes, explicita ou implicitamente, nas situações da atividade 1.

Atividade 1 – Situação a

Determine os valores de y para os quais a expressão (y – 1)² é igual a -4y.

Na situação da atividade 1, a dupla 1 não desenvolveu a resolução da equação do segundo grau utilizando-se de processos e técnicas. Em nossas análises preliminares, levantamos como uma possível estratégia de resolução o uso da fórmula de Bháskara. Conjecturamos ainda que os alunos poderiam desenvolver a equação, utilizando-se de produtos notáveis, transformando assim a equação em um trinômio do quadrado perfeito. Em ambos os casos, entendemos que tais estratégias remetem ao significado processual-tecnicista. Todavia, ainda que a dupla 1 tenha resolvido corretamente a situação – o que podemos constatar na Figura 1 –, os alunos utilizaram-se de uma estratégia por meio de “tentativas”, substituindo y por -1, e observaram que esse valor satisfaz a igualdade. Havíamos previsto essa estratégia de resolução, que remete ao significado intuitivo-pragmático, uma vez que o aluno utiliza-se de sua “intuição” aritmética para buscar a solução.

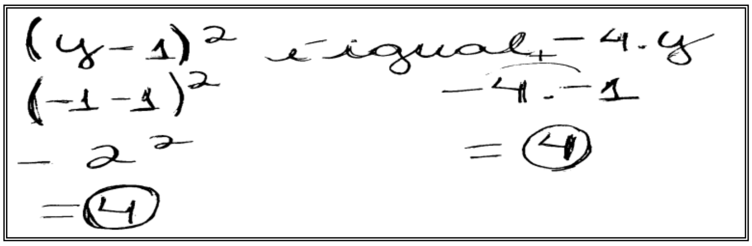


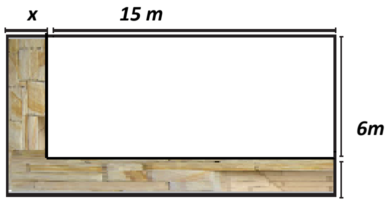
Figura 1.

Com relação à atividade 2, a dupla 1 explicitou, conforme revela a transcrição, que não reconheceu equação na situação (a) da atividade 1. Além disso, os alunos deixaram claro que não utilizaram equação para encontrar a solução.

Transcrição 1- ***Não reconhecemos e nem utilizamos equação. Pensamos que a melhor forma seria, ou a única forma que sabíamos de resolver era "chutando" para encontrar o resultado.***

Atividade 1 – Situação b

O projeto de um jardim retangular prevê que se coloquem, no seu contorno (formando retângulos), pedras ornamentais que estão indicadas na figura:



Sabendo-se que a área ocupada pelas pedras é de 46 m², calcule a medida x, em metros.

Na situação da atividade 1, a dupla 1 utilizou o conceito de área de figuras planas, nesse caso área de retângulo, para deduzir uma equação do 2^{o} grau. Em nossas análises preliminares, levantamos a dedução como uma estratégia possível de resolução, empregando as somas algébricas das áreas do retângulo maior para encontrar a equação do 2° grau. Essa estratégia, em nosso entendimento, remete ao significado dedutivo-geométrico. Mais uma vez, entretanto, como podemos constatar na Figura 2, a dupla 1 resolveu corretamente a situação, usando novamente "tentativas", quer seja, substituindo x por 2 e observando que esse valor satisfaz a igualdade. A presença do significado intuitivo-pragmático na estratégia novamente foi utilizada pelos alunos.

Apesar de não relacionar a situação proposta ao conceito de equação em sua resolução, a dupla 1 utilizou noções da Geometria, quando decidiu dividir a figura visualmente, para determinar a área de cada "pedaço".

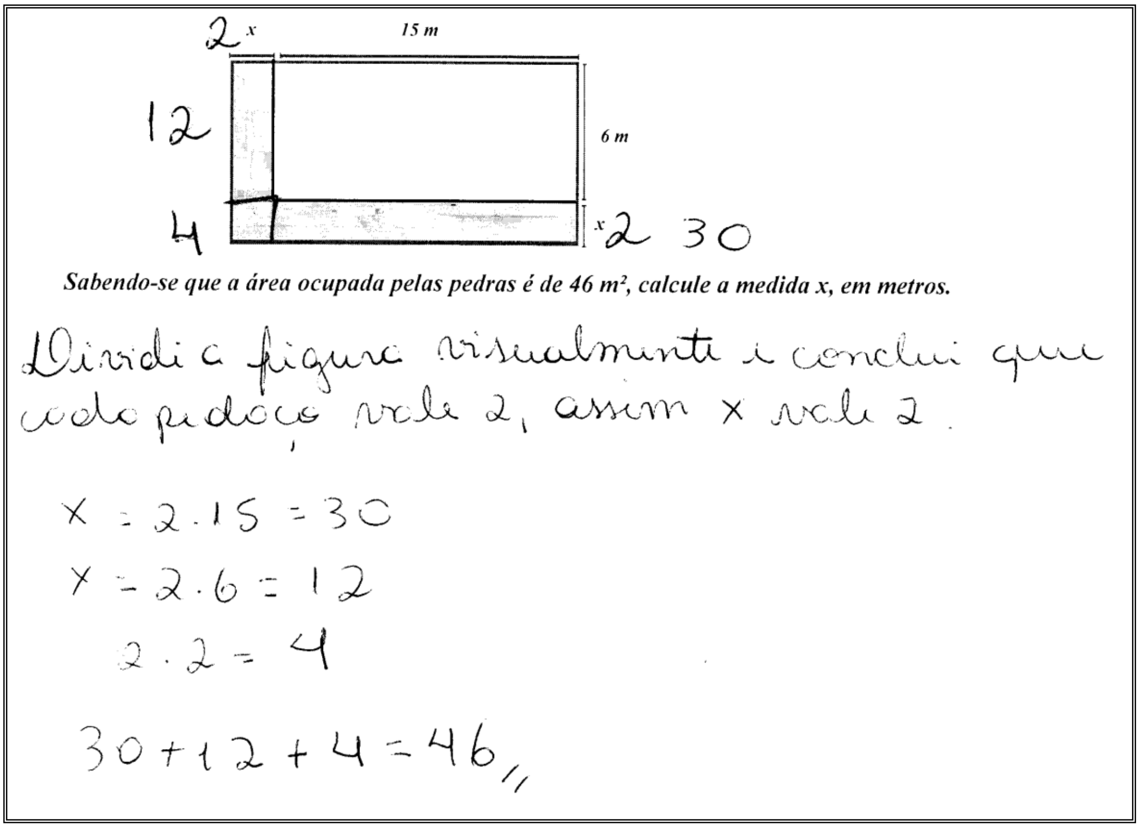


Figura 2.

No que se refere à atividade 2, a dupla 1 explicitou – conforme a transcrição abaixo – que não reconheceu equação na situação (b) da atividade 1. Tão importante quanto essa análise, gostaríamos de destacar que eles deixam claro que não sabem definir o que é equação e, portanto, não podem dizer se utilizaram equação ou não.

Transcrição 2 - ***Não reconhecemos a equação. Porém não sabemos se utilizamos, pois não sabemos definir o que é equação. Dividimos a figura visualmente e concluímos que cada pedaço valia 2, assim x=2***

Atividade 1 – Situação c

Observe as seguintes situações e encontre, se possível, valor(es) para x:

a) $(x-a)\cdot(x-b)=0$ **Justifique por que você resolveu a questão dessa forma.**

Nessa situação, a dupla 1 apresentou uma solução em que substituiu x por a; depois, substituiu por b; explicitando seu conhecimento de que “quando o resultado do produto de dois fatores é zero, um dos fatores é zero”.

Transcrição da justificativa: ***X pode ser <u>a</u> ou pode ser <u>b</u>.***
Resolvemos a questão assim porque qualquer número multiplicado por 0 é 0. Então, se a-a=0, a resposta será 0.

Verificamos que a dupla 1, embora não tenha desenvolvido a equação utilizando-se de alguma técnica, obteve uma resposta correta pela substituição da variável “x” por valores que tornam válida a condição de existência da equação (Figura 3). Tal assertiva ratifica-se pela explicação obtida na atividade 2, pois eles declaram não saber se utilizaram equação, uma vez que descobriram o “valor de x”, utilizando-se novamente de tentativa. Entretanto podemos analisar que, nesse caso, os alunos demonstram, em seus argumentos, que a escolha de substituir “x por a” e depois “x por b”, ocorreu pelo fato de que eles reconheceram a estrutura interna da equação.

Em nossas análises preliminares, indicamos como uma estratégia possível de resolução a utilizada por eles, ou seja, a de reconhecer a estrutura de uma equação apresentada de forma “genérica” (com parâmetros ao invés de coeficientes numéricos). Em nosso entendimento, tal situação remete ao significado estrutural-generalista**.**

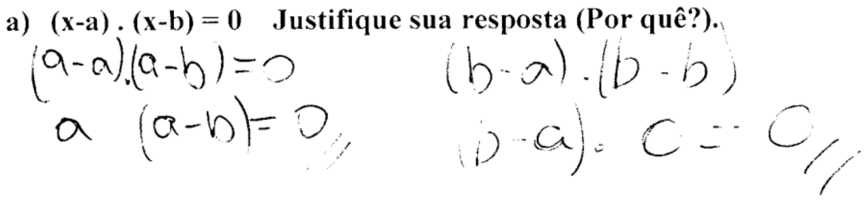
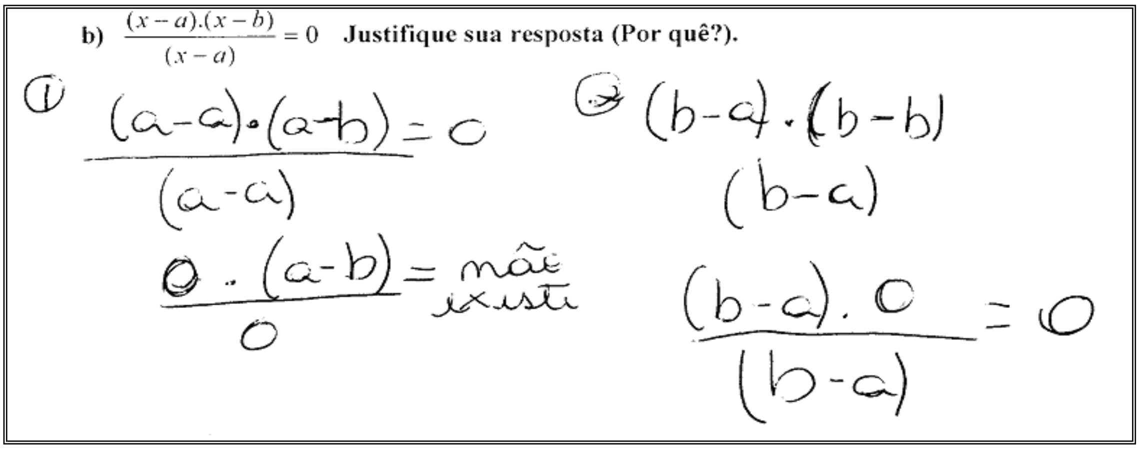


Figura 3

b) $\frac{(x-a)\cdot(x-b)}{(x-a)} = 0$**.** **Justifique por que você resolveu a questão dessa forma?**

A análise dos dados para o segundo item dessa atividade leva-nos às mesmas reflexões apresentadas acima, quer seja, eles reconheceram a estrutura interna da equação percebendo que, nesse caso, somente “b” pode ser solução (vide protocolos e transcrição abaixo).

Transcrição da justificativa: ***Resolvemos seguindo o mesmo raciocínio da questão a. Nesta questão, o x pode ser apenas b, porque, dividindo, vai dar 0. O x não pode ser a, porque 0/0 não existe resultado.***


b) $\frac{(x-a).(x-b)}{(x-a)} = 0$ Justifique sua resposta (Por quê?).

① $\frac{(a-a).(a-b)}{(a-a)} = 0$ ② $\frac{(b-a).(b-b)}{(b-a)}$

$\frac{0 . (a-b)}{0} =$ não existe $\frac{(b-a). 0}{(b-a)} = 0$

Figura 4.

Transcrição - ***Não reconhecemos a equação. Porém não sabemos se utilizamos. Através de tentativas fomos descobrindo os valores para x.***

Atividade 1 – Situação d

Um mergulhador percorreu uma distância de 40m entre a superfície e o fundo do mar, segundo uma trajetória retilínea que forma um ângulo de 60° com a superfície.

a) Qual é a profundidade do local alcançado pelo mergulhador?

Inicialmente a dupla 1 procurou representar o problema por meio de uma figura, o que nos parece ter facilitado a compreensão. Em seguida, como havíamos previsto em nossas análises preliminares, eles utilizaram conhecimentos da trigonometria – a relação trigonométrica do seno – para encontrar a solução do problema.

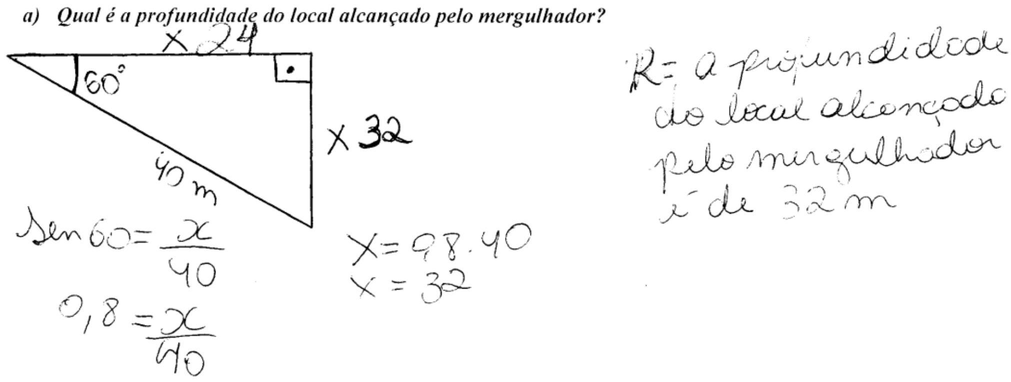


Figura 5.

Essa situação procurou investigar primeiro se os alunos reconhecem uma equação trigonométrica apresentada em linguagem sincopada; segundo, se eles utilizam as relações trigonométricas no triângulo retângulo para desenvolver a resolução da equação. Pelo protocolo acima, podemos verificar que a dupla 1 procedeu da forma como havíamos previsto.

Em nossas análises preliminares identificamos, na presente situação, os significados processual-tecnicista e intuitivo-pragmático, muito embora outros significados possam surgir nas diferentes estratégias possíveis de resolução.

b) Subindo verticalmente para a superfície, a que distância do ponto em que mergulhou ele sairá?

Ainda nessa situação, a partir da análise do segundo item (figura 6), observamos que eles utilizaram o conceito de equação, bem como dos conhecimentos referentes ao Teorema de Pitágoras.

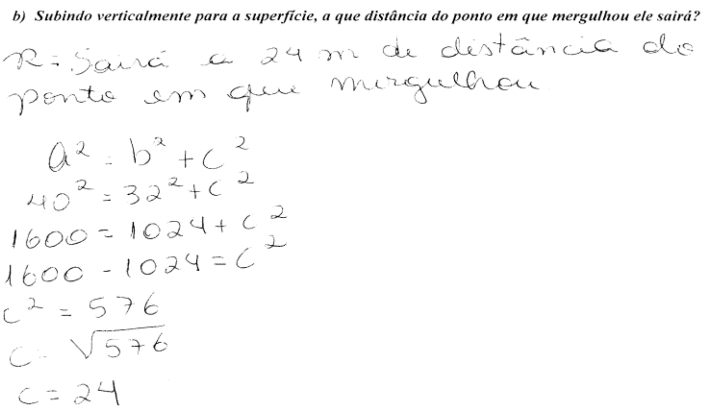


Figura 6

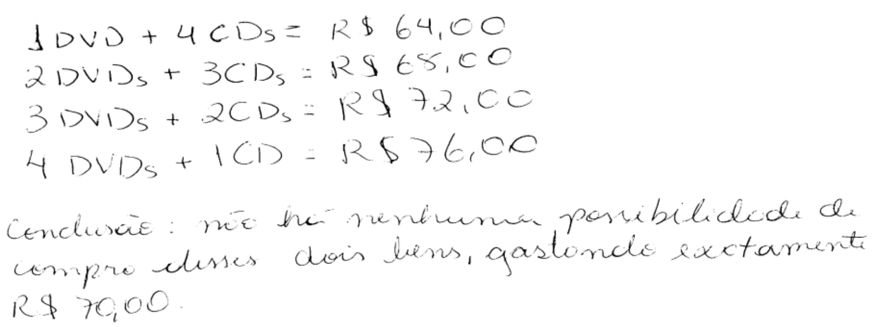
De posse de todas essas informações, verificamos que as estratégias e discussões dos alunos fundamentaram-se nos significados propostos pela situação em questão, bem como concluímos que eles reconheceram, na atividade 2, o conceito de equação que permeava o problema, conforme transcrição abaixo:

<u>Transcrição</u>- ***Reconhecemos a equação, porque percebemos que devíamos usar o teorema de Pitágoras que, segundo nossos conceitos, é uma equação, pois tem letras e sinal de (=). Portanto, reconhecemos e utilizamos equação nesta situação.***

Atividade 1 – Situação e

Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês R$ 70,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R$ 12,00 e um DVD custa R$ 16,00. Quais as possibilidades de compra desses dois bens, gastando exatamente os R$ 70,00?

Nessa situação, conforme apontado por nós em nossas análises preliminares, procuramos contemplar o significado intuitivo-pragmático, o qual foi identificado também nas análises dos protocolos e transcrição dos alunos da dupla 1. Os alunos apresentaram como estratégia de resolução a modelação de algumas possíveis soluções por meio de diferentes tentativas. Eles utilizaram calculadora e investigaram valores que satisfizessem a situação matemática apresentada. Por não encontrar um valor que satisfizesse a situação, a dupla 1 anotou quatro de suas tentativas e concluiu que não há “nenhuma possibilidade” (Figura 7).


1 DVD + 4 CDs = R$ 64,00
2 DVDs + 3CDs = R$ 68,00
3 DVDs + 2CDs = R$ 72,00
4 DVDs + 1CD = R$ 76,00

Conclusão: não há nenhuma possibilidade de compra desses dois bens, gastando exatamente R$ 70,00.

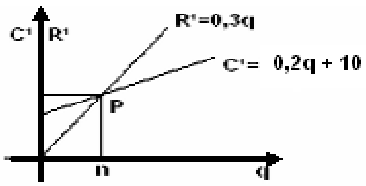
Figura 7

No protocolo acima, notamos que a dupla 1 fez uso do método das tentativas para resolver o problema, tratando a situação de forma convergente ao significado proposto por nós, quer seja, o significado intuitivo-pragmático. Em complemento às análises relacionadas ao protocolo ilustrado na figura 7, verificamos que os alunos explicitaram, conforme transcrição abaixo não reconhecer equação, embora eles tenham utilizado – ainda que implicitamente – o conceito de equação para proceder às "tentativas" de busca pela solução do problema proposto.

Transcrição - ***Não reconhecemos a equação e muito menos utilizamos. Fizemos tentativas, com somas, para chegar ao resultado, e concluímos que não há nenhuma possibilidade de compra dos bens, gastando exatamente R$ 70,00.***

Atividade 1 – Situação f

Um empresário prevê que o custo total "C_t" para a produção de uma certa quantidade "q" de geladeiras e a receita total "R_t", obtida com a venda de todas as geladeiras produzidas, variam como mostra o gráfico abaixo.



O ponto "P" indica que o empresário não tem lucro nem prejuízo com a produção e venda de um certo número de geladeiras. Com qual quantidade de geladeiras esse empresário não terá lucro nem prejuízo?

Nessa situação, observamos que a dupla 1 utilizou os dados do enunciado do problema para equacionar as duas funções. Em seguida, conforme verificamos no protocolo e transcrição, os alunos desenvolveram a resolução da equação de forma convergente às análises preliminares. Nas referidas análises, apontamos como possível estratégia de resolução o equacionamento do problema por meio de uma equação do 1º grau, o que entendemos remeter aos significados dedutivo–geométrico e estrutural-conjuntista, desenvolvendo a equação por técnicas, ou seja, utilizando-se do processual. Sendo assim, concluímos que na estratégia apresentada pelos alunos da dupla 1**,** os significados propostos pela situação em questão foi contemplado pelos alunos. Além disso, os alunos declaram ter reconhecido a equação que permeava o problema, conforme transcrição abaixo.

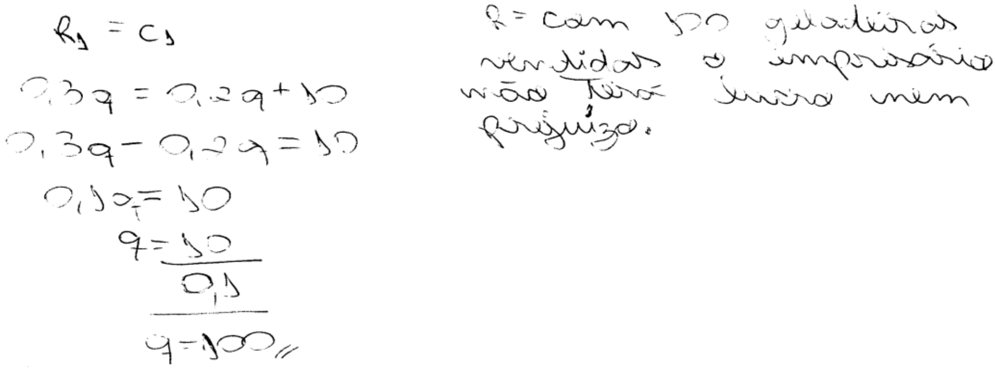


Figura 8

Transcrição – **Não reconhecemos equação, mas utilizamos, pois na forma que resolvemos, fica visível que é uma equação do 1° grau. Nós separamos o que tinha letra de um lado e o que não tinha do outro, etc.**

Atividade 1 - Situação g

Resolva, em R, determinando o conjunto solução:

$\log_2(2x-5) = 2$

Conforme ilustrado na figura 9 e na transcrição a seguir, os alunos da dupla 1 utilizaram-se de três tentativas para buscar a solução da situação acima:

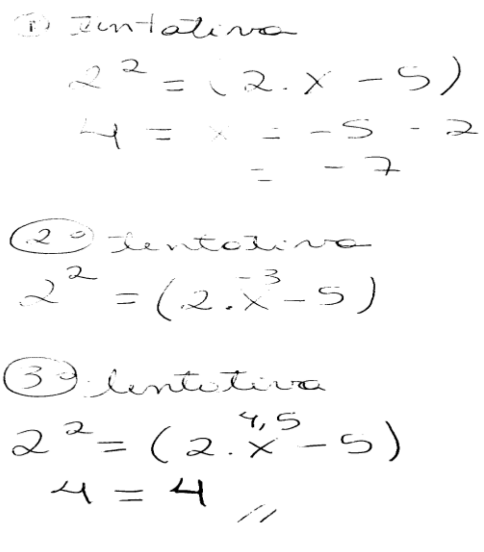


Figura 9

Pudemos notar que, em todas as tentativas, a dupla 1 utilizou seus conhecimentos referentes à equação logarítmica, porém não desenvolveu uma resolução dentre as previstas em nossas análises preliminares. Os alunos chegaram ao resultado correto da situação, mas não usaram os procedimentos e as técnicas ensinados em sala de aula. Com isso, concluímos que, em uma primeira análise, a dupla 1 não contemplou o significado processual-tecnicista. Entretanto, ao analisar o áudio resultante da coleta de dados, verificamos que os alunos declaram reconhecer e utilizar o conceito de equação, muito embora não tenham lançado mão de nenhuma técnica ou procedimento "específico".

Transcrição - ***Reconhecemos e utilizamos equação. Reconhecemos porque sabíamos que tínhamos que resolver o log, que é uma equação. Porém tivemos dificuldade para resolver esta situação, porque não lembramos dos detalhes do log.***

Atividade 1 – Situação h

Num laboratório é realizada uma experiência com um material volátil, cuja velocidade de volatilização é medida pela sua massa, em gramas, em função do tempo *t*, em horas, de acordo com a fórmula $m = 3^{2t} + 3^{t+1} - 108$. Assim sendo, calcule o tempo máximo de que os cientistas dispõem para utilizar esse material antes que ele se volatilize totalmente.

Nessa situação da atividade 1, os alunos não desenvolveram a resolução da equação exponencial utilizando processos e técnicas, e, mais uma vez, resolveram-na por meio de tentativas. Em nossas análises preliminares, apontamos como possíveis estratégias de resolução da equação exponencial o uso das propriedades das potências, ou ainda, a utilização de uma tabela para desenvolver a situação. Em ambos os casos, entendemos que o problema proposto pode remeter ao significado processual-tecnicista. Todavia a dupla 1 resolveu corretamente a situação, conforme verificamos na Figura 10, utilizando-se de três tentativas: substituíram t por 9, por 3 e por 2, concluindo que este último satisfazia a igualdade. Havíamos previsto essa resolução.

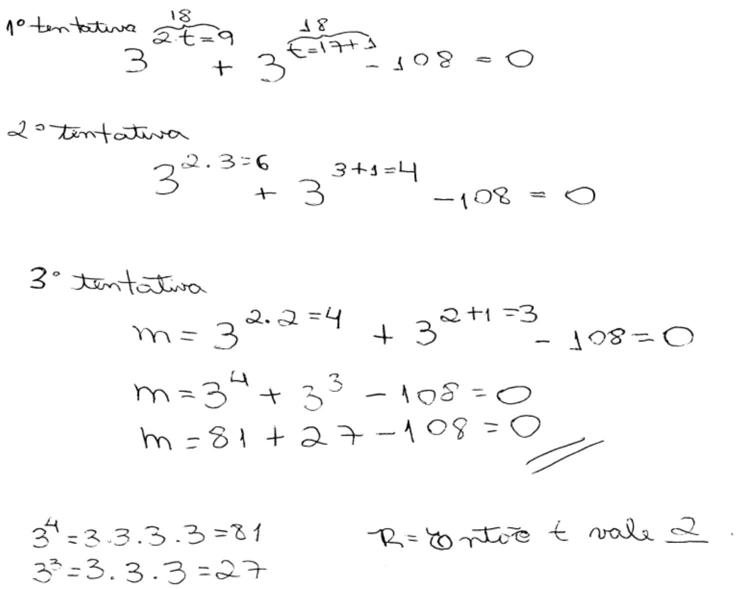


Figura 10

Com relação à atividade 2, a dupla 1 explicitou, segundo transcrição abaixo, que não reconheceu equação na situação (h) da atividade 1. Além disso, os alunos deixaram claro que não utilizaram equação para encontrar a solução.

Transcrição - ***Não reconhecemos equação, não sabemos se utilizamos. Resolvemos a situação através de tentativas, "chutando" os números para chegar ao resultado.***

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Retomando nosso objetivo de pesquisa – **Investigar os Significados que Alunos do Ensino Médio atribuem ao conceito de equação –** apresentamos a seguir algumas respostas e reflexões por nós encontradas, assim como questionamentos que gostaríamos de deixar como sugestões para pesquisas futuras.

Na busca de respostas aos nossos questionamentos iniciais, desenvolvemos uma pesquisa de caráter qualitativo, composta por duas atividades: a primeira buscou verificar o significado que os alunos poderiam atribuir/utilizar para cada uma das oito situações matemáticas apresentadas; a segunda buscou observar se o aluno reconheceria a equação presente em cada uma das oito situações da primeira atividade.

Nesse sentido o estudo realizado por Dorigo (2010) traz-nos informações relevantes e confirma as pesquisas realizadas, pois os alunos investigados utilizaram procedimentos e técnicas, porém, nas transcrições dos resultados, parecem não entender com clareza o que estão fazendo. Manipulam as estruturas das equações, porém sem nenhum sentido para eles, corroborando com as pesquisas desenvolvidas por Dreyfus e Hoch (2004).

Percebemos também que os alunos resolveram os problemas pelo método de tentativa que utiliza primeiro o coeficiente da variável para testar a igualdade. Observamos que quando resolviam o problema pelo método da tentativa, os alunos usavam, para sua primeira tentativa, o coeficiente numérico da equação.

Constamos que os significados processual-tecnicista e o intuitivo pragmático estão muito presentes na aprendizagem dos alunos e que somente eles foram explicitamente regulares e aparentes na pesquisa. Por esse fato, sugerimos que os outros significados concebidos por Ribeiro (2007) sejam discutidos com os alunos.

Acreditamos que com essas constatações, seja necessária a continuidade de um projeto mais amplo, quer seja, investigar quais as contribuições que a discussão dos Multisignificados de Equação pode oferecer. Os futuros pesquisadores poderão verificar quais significados de equação precisam ser apresentados e/ou aprimorados, trazendo para os atuais e futuros professores de Matemática, contribuições relevantes a fim de ampliar seus conhecimentos de equação.

Nesse sentido acreditamos que Os Multisignificados de Equação concebidos por Ribeiro (2007), tornem-se importantes e eficazes para explorar essa diversificação, utilizando situações que tratem do processual, do intuitivo, do estrutural, do dedutivo, do geométrico e dos significados que envolvem relações entre conjuntos. Gostaríamos de deixar como sugestão para professores de Matemática que trabalhem outros significados com seus alunos, o que lhes pode possibilitar um repertório e um instrumental mais amplo, principalmente quando estiverem envolvidos com a resolução de problemas que contemplem tal ideia matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, Y. O. Multisignificados de Equação: uma investigação sobre as concepções de professores de matemática. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2009. p. 194.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares nacionais: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 1998.p.115, 116.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares nacionais: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 2000.

COTRET, R. S. Problématique à propos de la mise en équation de problèmes écrits. In: SEMINAIRE FRANCO-ITALIEN DE DIDACTIQUE DE ALGÈBRE, 9., 1997, p. IX-23- IX-37.

DORIGO, M. Investigando as concepções de equação de um grupo de alunos do Ensino Médio. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010. p. 137.

DREYFUS, T.; HOCH. M. Equations: a structural approach. In: CONFERENCE OF INTERNATIONAL GROUP FOR THE PME, 28th., Bergen, Noruega, 2004. Proceedings… p. 1-152 - 1-155.

GIL, K. H.; PORTANOVA, R. Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA — ENEM —, 9., 18 a 21 julho de 2007, Belo Horizonte – MG.. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/posteres.html>. Acesso em: 12 jul. 2009, às 11h00.

LIMA, R. N. Equações algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da Matemática. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. p.358.

POMMER, M.W. Equações diofantinas lineares – um desafio motivador para alunos do Ensino Médio. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo,, 2008. p.63

RIBEIRO, A. J. Analisando o desempenho de alunos de Ensino Fundamental em Álgebra, com base nos dados do SARESP. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001. p. 116

____________. Equação e seus multisignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. p. 141.

SÃO PAULO. Secretaria Estadual da Educação. São Paulo Faz Escola - Ensino Médio. Jornal do aluno. São Paulo: SEE-SP, 2008. p. 44.

SÃO PAULO. Secretaria Estadual da Educação. Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar (SARESP): Matemática – 3º EM. São Paulo: SEE-SP, 2007.

ZENERE, L. C. S. Álgebra: Como Encontrar o “x” da Questão? Lajeado: UNIVATES, 2005. p.8.

Submetido: novembro de 2010

Aprovado: setembro de 2010