

TESES E DISSERTAÇÕES SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA COMBINATÓRIA: PERSPECTIVAS INVESTIGATIVAS

Theses and Dissertations on the Teaching and Learning of Combinatorics: Investigative Perspectives

Carlos Eduardo de **CAMPOS**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, Brasil
caducampos2012@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6804-7540>

Sonia Barbosa Camargo **IGLIORI**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, Brasil
sigliri@pucsp.br
<https://orcid.org/0000-0002-6354-3032>

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo ●

RESUMO

Este artigo tem por objetivo discutir os resultados de um levantamento bibliográfico de teses e dissertações defendidas no Brasil de 2015 a 2019 no âmbito do ensino e da aprendizagem da combinatória visando a identificar as perspectivas investigativas dessas produções. Buscou-se, desse modo, ampliar a compreensão do espaço investigativo sobre o ensino e aprendizagem da combinatória na escola básica e apontar caminhos para futuras pesquisas sobre esse tema. Por ser esse um estudo bibliográfico, de caráter inventariante e descritivo, ele se insere no rol das pesquisas denominadas *estado da arte*. Assim, foram analisadas vinte e duas produções: duas teses de doutorado; dez dissertações de mestrado acadêmico; dez dissertações de mestrado profissional. As análises dessas produções levaram à identificação de cinco perspectivas investigativas: propostas de ensino e/ou sequências didáticas para a análise combinatória; documentos curriculares e livros didáticos em que a análise combinatória está presente; formação de professores e análise combinatória; recursos para o ensino da análise combinatória; estratégias de resolução de problemas combinatórios.

Palavras-chave: Combinatória, Ensino e Aprendizagem, Perspectivas Investigativas

ABSTRACT

This article aims to present the results of a bibliographic survey of theses and dissertations defended in Brazil from 2015 to 2019 in the context of teaching and learning combinatorics to identify the investigative perspectives of these productions. In this way, we sought to expand the understanding of the investigative space on the teaching and learning of combinatorics in basic school and to point out ways for future research on this theme. As this is a bibliographic study, with an inventive and descriptive character, it is included in the list of researches called *state of the art*. Thus, twenty-two productions were analyzed: two doctoral theses; ten academic master's theses; ten professional master's theses. The analyzes of these productions led to the identification of five investigative perspectives: teaching proposals and / or didactic sequences for combinatorial analysis; curriculum documents and textbooks in which combinatorial analysis is present; teacher training and combinatorial analysis; resources for teaching combinatorial analysis; combinatorial problem-solving strategies.

Keywords: Combinatorics, Teaching and Learning, Investigative Perspectives

1 INTRODUÇÃO

O interesse em compreender o desenvolvimento do raciocínio combinatório e os fenômenos ligados ao ensino e à aprendizagem da combinatória têm levado pesquisadores da educação matemática, e até mesmo de outras áreas, a se dedicarem a essa temática.

Esse interesse teve seu marco com as investigações de Piaget e Inhelder (1951) sobre a dependência entre a formação dos conceitos de acaso e probabilidade na criança e a evolução de esquemas¹ combinatórios. Outros pesquisadores aprofundaram os estudos sobre o desenvolvimento do pensamento combinatório em crianças, como foram os casos de Fischbein (1975) e English (1988).

Também merecem ser mencionados os trabalhos desenvolvidos pelo Grupo de “Investigación sobre Educación Estadística” – GEEUG – da Universidade de Granada, na Espanha, sob a coordenação de Batanero. Dentre as pesquisas desse grupo destacamos a de Gea et al. (2019) sobre a linguagem e estratégias usadas por professores dos anos iniciais do ensino fundamental na resolução de problemas combinatórios e Roldán et al (2018) sobre o uso do diagrama de árvores como recurso intuitivo em situações de combinatória e probabilidade.

No Brasil, o Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatórios e Probabilísticos – GERAÇÃO – da Universidade Federal de Pernambuco e liderado por Borba, desenvolve e divulga estudos a respeito dessa área do conhecimento.

Em um desses estudos Silva & Pessoa (2015) buscaram mapear o que já fora produzido sobre esse tema a fim de identificar possíveis lacunas e guiar os avanços nas investigações sobre a combinatória. Assim as pesquisadoras organizaram os trabalhos mapeados em categorias: 1) estudos de sondagem de alunos em diferentes níveis de ensino; 2) relatos de experiências; 3) estudos com professores; 4) estudos de intervenções com alunos em diferentes níveis de ensino; 5) estudos com a utilização de recursos. Isso permitiu às pesquisadoras observarem que esses trabalhos, no contexto em que foram produzidos, indicavam: que os alunos são capazes de resolver problemas combinatórios mesmo sem uma formalização prévia dos conceitos envolvidos; que é importante a formação do professor no que diz respeito ao ensino e a aprendizagem da combinatória; que se deve ter cuidado na produção de livros didáticos quando apresentam problemas de combinatória; que recursos tecnológicos se constituem mais um suporte ao ensino e à

¹ A palavra *esquema* é aqui empregada no sentido dado por Piaget (2007), ou seja, a de ser uma organização invariante das habilidades intelectuais e das habilidades sensório-motoras do indivíduo.

aprendizagem dessa temática; que há interesse do professor em buscar meios de ensino baseados em recursos diversificados e na resolução de problemas.

Silva & Pessoa (2015) procuraram, também, incentivar estudos na forma de *estado da arte* visando a alargar a compreensão do desenvolvimento do raciocínio combinatório, ao considerarem que pesquisas dessa natureza

[..] poderão servir de base para uma prática de ensino [..], auxiliando assim na compreensão de como este raciocínio se desenvolve, no planejamento e acompanhamento de processos de ensino e de aprendizagem e que se possa avançar nas investigações e na melhor compreensão dos nossos objetos de pesquisa (Silva & Pessoa, 2015. p.690).

Neste artigo procurou-se por meio de um levantamento de produções acadêmicas – teses e dissertações – produzidas entre 2015 e 2019 e que tratam do ensino e da aprendizagem da combinatória na escola básica, identificar e compreender as perspectivas investigativas dessas produções.

Nas próximas secções são descritos os processos de seleção e de organização dos trabalhos que foram analisados.

2 METODOLOGIA

Sendo esse um estudo bibliográfico de caráter inventariante e descritivo, ele se insere no rol das pesquisas denominadas *estado da arte*. De acordo com Ferreira (2002, p. 258), pesquisas desse tipo:

parecem trazer em comum o desafio de mapear e de discutir uma certa produção acadêmica em diferentes campos do conhecimento, tentando responder que aspectos e dimensões vêm sendo destacados e privilegiados em diferentes épocas e lugares, de que formas e em que condições têm sido produzidas certas dissertações de mestrados, teses de doutorado, publicações em periódicos e comunicações em anais de congressos e seminários.

O levantamento das produções que constituirão o *corpus* de uma pesquisa nesses moldes, via de regra, é feito por meio catálogos *online* disponibilizados por instituições de ensino superior, órgãos de fomento à pesquisa, entre outros. Nesses catálogos, as produções podem ser consultadas por assunto, pela autoria, pela data de publicação, pela área de conhecimento, entre outros. Adotado um desses critérios, os trabalhos encontrados trazem como identificadores, além do título, o nome do autor e do orientador (no caso de teses e dissertações), da instituição onde se deu a produção, do ano de publicação, e dos resumos e palavras-chave que têm por finalidade “divulgar com maior abrangência os

trabalhos produzidos” (Ferreira, 2002, p. 262). Em muitos casos o texto completo das produções pesquisadas encontra-se disponível no formato pdf (Portable Document Format) permitindo ao pesquisador consultá-lo integralmente.

No caso de pesquisas feitas a partir do resumo de teses e dissertações obtidas em catálogos bibliográficos, Ferreira (2002) observa que para o pesquisador há dois momentos bem específicos.

- no primeiro procura-se extrair respostas às questões *quando? onde? quem?*. Em outras palavras, nessa etapa são feitos levantamentos quantitativos e de identificação de dados bibliográficos desses trabalhos, a partir de critérios como período especificado, locais em que foram produzidos e áreas de conhecimentos aos quais elas pertencem.
- no segundo, as questões que se impõem são *o quê? como?*, ou seja, aprofunda-se a investigação na busca de elementos de aproximação e de diferenças entre os trabalhos levantados (por exemplo, tendências investigativas ou opções teóricas e metodológicas) que permitam traçar um panorama do campo de conhecimento investigado.

O uso dos resumos de teses e dissertações pode tornar investigações desse tipo mais simples, mas há de se ter certo cuidado. Isso porque, a princípio, os resumos forneceriam ao leitor, de maneira breve, informações sucintas e objetivas do conteúdo das produções as quais se referem o que, na prática, nem sempre acontece. A respeito dessas limitações, Ferreira (2002, p. 268) pondera:

Deve-se reconhecer que os resumos oferecem uma História da produção acadêmica através de uma realidade constituída pelo conjunto dos resumos, que não é absolutamente a mesma possível de ser narrada através da realidade constituída pelas dissertações de mestrado e teses de doutorado, e que jamais poderá ser aquela narrada pela realidade vivida por cada pesquisador em sua pesquisa.

As observações ora apresentadas guiaram a constituição do *corpus* desse estudo, bem como a organização e a classificação dos trabalhos selecionados.

2.1 Constituição do *corpus* a ser estudado

O primeiro passo foi a da seleção das produções que constituiriam o *corpus* dessa pesquisa. Essa se deu em duas etapas e foi realizada usando como fonte de pesquisa o catálogo de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de

Níveis Superior – CAPES². Primeiramente, a partir da digitação da expressão *análise combinatória* foram identificados 126 relatórios de pesquisa, entre teses e dissertações, com publicação a partir do ano de 1999 até 2019. Alguns desses relatórios, porém, não se referiam a investigações envolvendo a combinatória numa perspectiva educacional o que exigiu uma segunda etapa. Nesta, a seleção foi feita a partir dos títulos de cada trabalho. Chegou-se, assim, ao número de 106 relatórios. O Quadro 1 resume como se deu em termos de quantidade a distribuição dessas produções no período de 1999 a 2019.

Quadro 1: Número de teses e dissertações sobre combinatória produzidas de 1999 a 2019

Ano	Número de Dissertações	Número de Teses	Total de Produções
1999 a 2004	4	1	5
2005 a 2009	5	-	5
2010 a 2014	41		41
2015 a 2019	53	2	55
Total	103	3	106

Fonte: Elaborado pelos autores

A partir os dados apresentados no Quadro 1, dois pontos são observados. O primeiro deles é o número de 55 trabalhos concluídos entre 2015 e 2019, o que corresponde a aproximadamente 52% das produções levantadas na segunda seleção. O segundo é que, dentre essas 55 produções, duas delas são teses defendidas em 2015 e 2018. Além delas, o Quadro 1 apresenta somente mais outra tese que foi defendida no período de 1999 e 2004.

Por conta dessas observações, a princípio essas 55 produções constituiriam o *corpus* desse estudo. Assim, elas foram organizadas pelo ano da publicação e pelo tipo de produção (dissertação ou tese), conforme resume o Quadro 2.

Quando 2: Número de teses e dissertações produzidas de 2015 a 2019

Ano	Número de dissertações		Número de Teses	Total de Produções
	Mestrado Acadêmico	Mestrado Profissional		
2015	4	11	1	16
2016	3	12	–	15
2017	2	12	–	14
2018	1	3	1	5
2019	–	5	–	5
Total	10	43	2	55

Fonte: Elaborado pelos autores

² <http://catalogodeteses.capes.gov.br/>

A distribuição dos trabalhos apresentada no Quadro 2 revela uma prevalência de produções oriundas de mestrados profissionais em relação aos mestrados acadêmicos. As características desse tipo de pós-graduação *stricto sensu* podem justificar esse dado. De acordo com o Portal da CAPES o mestrado profissional tem por objetivo capacitar os profissionais das diferentes áreas do conhecimento a fim de atenderem a necessidades do mercado de trabalho. O mestrado profissional e, mais especificamente, o mestrado profissional em educação seria então, na perspectiva de Ambrosetti e Calil (2016), um caminho a mais na trajetória formativa do docente, oferecendo a ele meios para que possa desenvolver e aprofundar conhecimentos profissionais que permeiem sua prática.

Das 43 dissertações de mestrados profissionais levantadas, 33 eram oriundas do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Trata-se de um programa de mestrado com abrangência nacional na modalidade semipresencial. De acordo com o seu site³, faz parte desse programa uma rede de instituições de ensino superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil/CAPES, sob a coordenação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e com o apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Esse programa procura oferecer aprimoramento profissional a professores de matemática que atuam na educação básica, sobretudo os das redes públicas de ensino, com atenção maior à formação matemática e para a prática docente.

De acordo com Silva (2015), as dissertações provenientes desse programa se diferenciam do modelo científico do mestrado acadêmico por permitir ao mestrando a apresentação dos resultados de seus estudos como relatos de experiências:

Mesmo mantendo o modelo científico de dissertação, o trabalho final de curso a ser apresentado pelo mestrando que cursa o PROFMAT se diferencia da do Mestrado Acadêmico. O mestrando pode apresentar o relato de uma experiência de implementação de novos produtos ou estratégias na área educacional, com a finalidade de melhorar a qualidade do ensino em uma área específica de Matemática. (Silva, 2015, p.29)

Por se tratarem de produções que trazem esse diferencial, optou-se por limitar o *corpus* desse estudo a 22 produções: 10 dissertações de mestrado acadêmico, 10 dissertações de mestrado profissional e 2 teses de doutorado.

³ <https://www.profmat-sbm.org.br/>

2.2 Organização e classificação dos trabalhos

O próximo passo foi a compilação, em fichas-resumo, dos objetivos, da modalidade de pesquisa, da fundamentação teórica e metodológica, dos meios de coleta dos dados, das análises feitas e dos resultados obtidos. A partir desse ponto foi possível desenhar um cenário das produções sobre o ensino da combinatória considerando cinco grupos de perspectivas investigativas:

Grupo 1: pesquisas que apresentam propostas de ensino e/ou sequências didáticas sobre análise combinatória;

Grupo 2: pesquisas que visam a investigar a análise combinatória presente em documentos curriculares e em livros didáticos;

Grupo 3: pesquisas que investigam a análise combinatória e a formação do professor.

Grupo 4: pesquisas que investigam recursos para o ensino da análise combinatória.

Grupo 5: pesquisas que investigam as estratégias de resolução de problemas combinatórios.

Quadro 3: Distribuições dos trabalhos nos grupos

Grupos	Dissertações		Teses	Total por Grupo
	Mestrado Acadêmico	Mestrado Profissional		
Proposta de Ensino/ Sequências didáticas	3	8	-	11
Documentos Curriculares/ Livros Didáticos	1	-	2	3
Formação do Professor	4	-	-	4
Recursos	1	2	-	3
Estratégias de resolução de problemas combinatórios	1	-	-	1
Total	10	10	2	22

Fonte: Elaborado pelos autores

Passamos a apresentar os trabalhos por grupo, destacando de cada um deles sua origem (mestrado acadêmico; mestrado profissional; doutorado), seu autor, seu título, a instituição onde foi realizado, e o ano de sua publicação. Em seguida são tecidas as análises concernentes a cada grupo.

3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

3.1 Grupo 1: Propostas de ensino e/ou sequências didáticas sobre análise combinatória

Foram analisadas 11 dissertações das quais 8 adinham de mestrados profissionais e, as demais, de mestrados acadêmicos, conforme o Quadro 4:

Quadro 4: Dissertações de mestrados acadêmicos do grupo 1

Origem da produção	Autor	Título	Instituição	Ano
Mestrado Profissional	ATZ, D.	<i>A análise Combinatória no 6º ano do Ensino Fundamental por meio da Resolução de Problemas</i>	UFRGS	2017
	BASTOS, A. C.	<i>Resolução de problemas: uma discussão sobre o Ensino da Análise Combinatória</i>	UNIGRANRIO	2016
	CONCEICAO, D. C.	<i>O Ensino De Análise Combinatória No Ensino Médio Por Atividades</i>	UEPA	2019
	DIAS, R. A.	<i>Proposta de Atividades Potencialmente Interdisciplinares Envolvendo Noções de Análise Combinatória e Probabilidades</i>	UNIGRANRIO	2015
	ROSAS, L. S.	<i>Ensino de análise combinatória por atividades</i>	UEPA	2018
	SILVA, D. P.	<i>A aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio</i>	UFAL	2017
	TREVIZAN, W. A.	<i>Ensinando Matemática por meio de situações potencialmente adidáticas: estudo de casos envolvendo análise combinatória.</i>	USP	2015
	WEBER, D. R. B.	<i>Elementos de Análise Combinatória no Ensino Fundamental: uma abordagem com mágicas e resolução de problemas</i>	UFSCar	2016
Mestrado Acadêmico	FONSECA, A. J. S.	<i>O ensino da Análise Combinatória: um estudo de registro de representações semióticas por meio de sequências didáticas.</i>	UFS	2015
	SILVA, F. S.	<i>Raciocínio Combinatório e Criatividade Matemática no Ensino Médio</i>	UESC	2017
	SILVEIRA, A. A.	<i>Análise Combinatória em sala de aula: uma proposta de ensino- aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas</i>	UEPB	2016

Fonte: Elaborado pelos autores

De um modo geral, as produções desse grupo propunham intervenções (propostas de ensino ou sequências didáticas) baseadas na metodologia da resolução de problemas dando ênfase ao uso do princípio multiplicativo.

Nesse grupo foram identificadas pesquisas qualitativas, intervencionistas e pedagógicas. Em dois desses trabalhos os autores afirmaram ter usado a engenharia didática como metodologia no processo de coleta e análise de dados.

Algumas dessas pesquisas buscaram agregar outras perspectivas como a criatividade matemática (Silva, 2017), a história da matemática (Bastos, 2016), a interdisciplinaridade (Dias, 2015), as representações semióticas (Fonseca, 2015), as situações adidáticas⁴ (Trevisan, 2015) e atividades de carácter lúdico (Weber, 2016; Conceição, 2019). Arelados às perspectivas estão os quadros teóricos como a Resolução de Problemas segundo Onuchic e Allevado, a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, o Registro de Representações Semióticas de Duval, as ideias de Vale, Gontijo e Pinheiro sobre Criatividade Matemática e a Zona de Desenvolvimento Proximal concebida por Vygotsky.

Em quase todas as produções (09), as intervenções se deram em turmas do segundo ano do ensino médio de redes públicas de ensino. As exceções foram Atz (2017) e Weber (2016) que apresentaram estudos com alunos do ensino fundamental, e, Dias (2015) que realizou aplicações com professores.

Sobre os resultados, todos os autores relataram que as intervenções conduzidas se mostraram eficazes no que diz respeito à aprendizagem dos conceitos relacionados à análise combinatória. Em dois desses trabalhos foram apresentados os produtos das dissertações: um roteiro didático com base na resolução de problemas para o ensino da combinatória no 6º ano do ensino fundamental (Atz, 2017); e um livro que apresenta os conceitos combinatórios alicerçados na resolução de problemas e na história da matemática (Bastos, 2016).

Em todos esses trabalhos analisados parece haver um sentimento comum de que o ensino da análise combinatória baseado em classificação de problemas e o respectivo uso de fórmulas é pouco eficaz e que é necessário buscar meios de se propiciar um ensino que garanta a construção do raciocínio combinatório. Esse sentimento justifica um número maior de produções que apresentam propostas de intervenções baseadas na resolução de problemas e no uso do princípio multiplicativo.

Contudo, há ainda necessidade de se ampliar as discussões dos resultados obtidos por essas investigações, analisando mais profundamente outras questões como as de ordem epistemológica e didática inerentes ao ensino e à aprendizagem da combinatória. E, nesse sentido, torna-se importante o investimento em pesquisas que envolvam estudantes de diferentes níveis de ensino, a começar dos anos iniciais do ensino fundamental, a fim de

⁴ De acordo com Almouloud (2016), as situações adidáticas são tais que, embora não tenham sua intencionalidade didática revelada ao aluno foram planejadas e construídas pelo professor visando a oferecer condições para a apropriação de um novo saber que se pretende ensinar

se compreender os processos de formação do raciocínio combinatório do aluno ao longo de sua vida (Borba, 2016; Pessoa & Borba, 2010; Placha & Moro, 2009).

3.2 Grupo 2: A análise combinatória em documentos curriculares e livros didáticos

Neste grupo se inserem as duas únicas teses analisadas e uma dissertação. O Quadro 5 apresenta esses trabalhos:

Quadro 5: Teses e dissertação do grupo 2

Origem da produção	Autor	Título	Instituição	Ano
Doutorado	MELO, M. A. P.	<i>Ecologia do Saber: o caso da análise combinatória em documentos oficiais e livros didáticos da educação básica</i>	UFPE	2018
	PINHEIRO, C. A. M.	<i>Análise Combinatória. Organizações Matemática e Didáticas nos livros escolares no período entre 1895 e 2009</i>	PUC-SP	2015
Mestrado Acadêmico	SILVA, M. C.	<i>A Combinatória: abordagem em documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos do Ensino Fundamental</i>	UFPE	2016

Fonte: Elaborado pelos autores

As investigações desse grupo – todas de natureza bibliográfica documental – tiveram por objetivo os diferentes contextos e abordagens da combinatória nos livros didáticos e nos documentos curriculares brasileiros ao longo dos anos. Pinheiro (2015) focou na identificação de características de inserção dos saberes da Análise Combinatória no universo escolar brasileiro por meio dos livros didáticos. Melo (2018), por sua vez, procurou estudar esse conteúdo em momentos importantes para a educação brasileira: nas reformas educacionais de Campos e Capanema, nos programas mínimos de Simões Filho, no movimento da matemática moderna e na educação matemática. Silva (2016) objetivou analisar as abordagens da combinatória — e as possíveis consonâncias entre elas — presentes em documentos oficiais, em pesquisas sobre o conhecimento dos alunos e o ensino deste tema, e, em livros didáticos.

As duas teses analisadas se apoiaram na Teoria Antropológica do Didático – TAD de Chevallard. Pinheiro (2015) considerou, além da TAD, os Modelos Didáticos de Gascón enquanto Melo (2018) apoiou-se em outros dois conceitos bem próximos à TAD: a Transposição Didática e a Ecologia do Saber. No estudo de Silva (2016), a análise dos

dados foi conduzida a partir dos pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, sobretudo, na fase de análise de livros didáticos.

Os resultados de Pinheiro (2015) e Melo (2018) sugerem que, durante um longo período, a maneira como os livros didáticos abordaram a análise combinatória sofreu pouca variação, sendo apresentada como parte do conteúdo do 2º ano do ensino médio. Com a implementação de documentos curriculares como os Parâmetros Curriculares Nacionais nos idos da década de 1990 e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), no final de 2017, os livros didáticos passaram a inserir a combinatória já nos anos iniciais do ensino fundamental.

As investigações de Silva (2016) tiveram por objetivo analisar o tema análise combinatória presente em documentos curriculares, em livros didáticos e em pesquisas a fim de observar possíveis convergências nas abordagens desse conteúdo. Os dados coletados levaram-na a considerar haver congruência entre o tratamento que livros didáticos dão à combinatória e o tratamento dado por pesquisas e documentos oficiais sobre esse mesmo tema. A pesquisadora pondera, porém, que há necessidade de atenção maior aos anos iniciais do ensino fundamental e de orientações mais concisas nos livros didáticos visando a auxiliar o professor em suas aulas.

Por esses estudos observa-se que o livro didático continua sendo o principal recurso usado pelo professor no ensino de análise combinatória. Por esse motivo, entende-se haver espaço para implementar investigações que envolvam, por exemplo, as relações entre o professor que ensina combinatória e o uso dos recursos.

3.3 Grupo 3: A análise combinatória e a formação do professor

Esse grupo contém quatro dissertações de mestrados acadêmicos, conforme o Quadro 6.

Quadro 6: Dissertações do grupo 3

Origem da produção	Autor	Título	Instituição	Ano
Mestrado Acadêmico	CUNHA, M. J. G.	<i>Elaboração de Problemas Combinatórios por professores de Matemática do Ensino Médio.</i>	UEPE	2015
	LIMA, A. P. B.	<i>Princípio Fundamental da Contagem: conhecimentos do Professores de matemática sobre seu uso na resolução de situações-problema.</i>	UFPE	2015
	LIMA, R. G. A.	<i>Problemas de Combinatória: um estudo de conhecimentos mobilizados por licenciandos em Matemática Campo Grande – MS. 2015.</i>	UFMS	2015

	MARTINS. G. G.	<i>Ensino de Análise Combinatória: um estudo das representações de professores de matemática do Ensino Médio público de São Mateus.</i>	UFES	2018
--	-------------------	---	------	------

Fonte: Elaborado pelos autores

Essas pesquisas buscaram estudar: a) os professores e a elaboração de problemas combinatórios (Cunha, 2015); b) os licenciandos em matemática e os conhecimentos combinatórios (Lima, 2015); c) os professores e suas representações sobre combinatória (Martins, 2018); c) os professores e estratégias de resolução de problemas combinatórios (Lima, 2015).

Em relação às perspectivas teóricas, os pesquisadores se apoiaram: nos estudos de Ball, Thames e Phelps sobre o domínio de conhecimentos necessários aos professores de matemática; nos pressupostos da História Cultural (representação, prática e apropriação, propostos por Roger Chartier; estratégias e táticas, por Michel De Certeau; cultura escolar, por Dominique Julia e disciplinas escolares, por André Chervel); na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau; e na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

A coleta dos dados foi realizada por meio de protocolos provenientes da aplicação de sequências didáticas e de testes, de entrevistas semiestruturadas gravadas em áudio, de questionários e, também, de observações sobre os participantes da pesquisa.

Os resultados dessas investigações sugerem que:

1. tanto estudantes de licenciatura em matemática quanto professores em exercício apresentam dificuldades em lidar com situações de combinatória.
2. professores até se utilizam do princípio multiplicativo, mas não explicitam e/ou não estabelecem relação entre esse princípio e as fórmulas de arranjo, permutação e combinação, e nem com estratégias de resolução de problemas combinatórios baseadas no diagrama de árvores, no raciocínio recursivo, entre outras.
3. a elaboração de problemas combinatórios pelo próprio professor permite que ele possa refletir sobre os conceitos em jogo nas diferentes situações combinatórias, bem como pensar em aspectos pedagógicos e curriculares relacionados a esse objeto matemático.

Esses resultados reforçam a importância da formação inicial e continuada dos docentes em combinatória em razão da influência que os saberes docentes exercem na construção do conhecimento combinatório dos alunos (Borba et al., 2015; Rocha et al., 2015; Sabo, 2010) .

3.4 Grupo 4: Recursos para o ensino da análise combinatória

Aqui foram listadas três produções que se encontram detalhadas no Quadro 7.

Quadro 7: Dissertações do grupo 4

Origem da produção	Autor	Título	Instituição	Ano
Mestrado Profissional	AMBROZI, L.	<i>Jogos em uma sequência didática para o Ensino de Análise Combinatória.</i>	UCS	2017
	TAVARES, P. C. M.	<i>Ensino da Análise Combinatória por meio de um aplicativo para Android.</i>	PUC-MG	2017
Mestrado Acadêmico	TAVARES, C. A. G.	<i>Raciocínio Computacional no Ensino de Análise Combinatória e Probabilidade: o Uso da Linguagem de Programação R e do Construtivismo na Educação Básica.</i>	UFBA	2017

Fonte: Elaborado pelos autores

As investigações desse grupo procuraram: a) estudar o uso de jogos no planejamento, na aplicação e na avaliação de uma sequência didática para o ensino de combinatória (Ambrozi, 2017); b) desenvolver um aplicativo para o ensino de análise combinatória (Tavares, 2017); c) estudar as contribuições do raciocínio computacional no ensino de combinatória (Tavares, 2017).

Os recursos abordados nessas produções foram associados a sequências ou atividades didáticas e aplicados a professores, alunos e licenciandos em matemática em estudos de pesquisa-ação (Tavares, 2017; Ambrozi, 2017) e de estudo de caso com abordagem qualitativa e quantitativa (Tavares,).

A respeito dos aportes teóricos, identificamos no trabalho de Ambrozi (2017) referência aos estudos de Piaget como fundamentação teórica de sua investigação e de Zabala para embasar a construção de uma sequência didática.

Os resultados dessas pesquisas apontaram para: a potencialidade do recurso didático empregado pelo pesquisador no ensino e na aprendizagem da combinatória (Ambrozi, 2017); a possibilidade de contribuição de recursos baseados nas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) para ensino de matemática, em especial da análise combinatória (Tavares, 2017); a necessidade de aprofundamento e de aplicação de linguagens de programação na formação inicial e contínua de professores, bem como na educação básica (Tavares, 2017).

Observa-se, pois, haver uma preocupação dos pesquisadores em se considerar recursos didáticos que sejam capazes de motivar e prender a atenção dos alunos, que

facilitem a construção do conhecimento combinatório e que tornem o aprendizado desse conteúdo mais prazeroso. Porém, nas dissertações observadas, constatou-se a ausência de quadros teóricos que auxiliassem os pesquisadores na análise dos dados obtidos considerando os recursos empregados. A esse respeito, Almouloud & Silva (2019, p. 78) pontuam:

O referencial teórico, juntamente com outros elementos constitutivos de uma pesquisa, fundamenta a razão de ser da mesma. Sua importância pode ser evidenciada na fase de análise dos achados, mas também nas conclusões da pesquisa.

Logo, a questão da relação entre os professores e os recursos didáticos de um modo geral e, particularmente, no ensino da combinatória merece aprofundamento tanto teórico quanto metodológico.

Um construto teórico que tem se constituído um referencial importante na análise dessa relação para o ensino da matemática é a Abordagem Documental do Didático (Trouche et al., 2020). O ponto central dessa abordagem é a busca por compreender de que maneira os professores selecionam e modificam recursos no preparo de suas aulas e de que maneira eles próprios são modificados por esses recursos no que tange a suas práticas docentes. Espíndola (2019), por exemplo, usou esse construto teórico como um dos referenciais na identificação do sistema de recursos de um professor para o ensino da combinatória em uma turma do 2º ano do nível médio.

3.5 Grupo 5: Estratégias de resolução de problemas combinatórios

Nesta categoria encontramos uma única produção originária da Universidade Estadual de Santa Cruz, em Ilhéus, Bahia.

Quadro 8: Dissertação do grupo 5

Origem da produção	Autor	Título	Instituição	Ano
Mestrado Acadêmico	PINHEIRO, T. S	<i>Desempenho e estratégias desenvolvidas por estudantes do 2º ano do Ensino Médio ao resolver problemas combinatórios</i>	UESC	2016

Fonte: Elaborado pelos autores

Esse trabalho é uma dissertação que buscou analisar o desempenho e as estratégias que alunos do 2º ano do ensino médio de uma escola pública baiana desenvolveram antes e depois de terem estudado a análise combinatória. Para esse fim foram elaborados testes

em que constavam problemas dos tipos: produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação. Esses testes foram aplicados *a priori* e *a posteriori* das aulas que já estavam destinadas a abordar o tema análise combinatória e que seriam ministradas pelo próprio professor da turma. A pesquisadora investigou o desempenho dos estudantes, tendo em consideração a porcentagem de acertos e as variáveis “tipo combinatório, repetição e ordem de grandeza” (Pinheiro, 2016, p. 101); As estratégias usadas pelos estudantes, por sua vez, foram mapeadas tomando por base as questões em que eles apresentaram as respostas certas.

Além dos testes, Pinheiro (2016) também analisou os dois livros didáticos usado pelo professor da turma na suas aulas. Tomando-se por base outros estudos sobre livros didáticos e combinatória, foram considerados os seguintes critérios nessa análise: o número de páginas destinadas à combinatória; a forma como o livro aborda esse tema; o tipo de problemas combinatórios que figuram neste livro; as formas de representação simbólica. Segundo a autora, esses critérios foram associados às estratégias que os alunos apresentaram no testes *a posteriori*, contribuindo para seu estudo.

As análises, fundamentadas nos estudos de Piaget e na Teoria dos Campos Conceituais, levaram a pesquisadora a observar que:

1. as aulas sobre combinatória não “interferiram na aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória” (Pinheiro, 2016, p.141), considerando o número de acertos que os estudantes tiveram nos testes *a priori* e *a posteriori*;
2. os alunos tiveram um êxito maior nos problemas de produto cartesiano, sendo seguido pelos de arranjo, permutação e combinação, nessa ordem;
3. os alunos tiveram melhor desempenho em problemas nos quais os números em jogo tinham “ordem de grandeza pequena” (Pinheiro, 2016, p. 141) e naqueles que não envolviam repetição;
4. o uso de estratégias como registro de operação, princípio multiplicativo e listagem de possibilidades foram usadas pelos alunos em ambos os testes;
5. estratégias ligadas ao uso do princípio multiplicativo foram empregadas mais em questões que envolviam o produto cartesiano;
6. a listagem de possibilidades evoluiu de uma listagem não sistemática (teste *a priori*) para uma sistemática (teste *a posteriori*).
7. outras estratégias como o uso de desenhos, do diagrama de árvores, da adição de parcelas repetidas e do uso de fórmulas também foram observadas.

Os estudos de Pinheiro (2016) apontam para um conjunto de estratégias que, em certa medida, traduzem os conceitos mobilizados pelo aluno no enfrentamento de situações de combinatória. A identificação de tais estratégias torna-se, assim, uma grande aliada de pesquisadores e de professores na busca por compreender como se constitui o raciocínio combinatório no indivíduo e que variáveis devem se ter em conta no planejamento de situações potencialmente desenvolvedoras desse tipo de pensamento. Para Pessoa e Borba (2010, p. 20):

[...] é preciso que a escola reconheça esse desenvolvimento e busque aproveitar as pistas fornecidas pelas diversas formas que o aluno utiliza para resolver e responder os problemas combinatórios, para que possa auxiliá-los nos processos de sistematização, aprofundamento, ampliação e formalização dos seus conhecimentos referentes à Combinatória. Diante dos resultados, é preciso que a escola reconheça esse desenvolvimento e busque aproveitar as pistas fornecidas pelas diversas formas que o aluno utiliza para resolver e responder os problemas combinatórios, para que possa auxiliá-los nos processos de sistematização, aprofundamento, ampliação e formalização dos seus conhecimentos referentes à Combinatória.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo foram apresentados os dados de um levantamento que visou a identificar sob quais perspectivas investigativas o ensino e aprendizagem da combinatória vêm sendo estudado. Usou-se como fonte o banco de teses e dissertações da CAPES, sendo selecionadas 22 produções, das quais 2 eram teses e as demais, dissertações.

Foram identificadas cinco perspectivas investigativas: propostas de ensino e/ou sequências didáticas sobre análise combinatória; a análise combinatória presente em documentos curriculares e nos livros didáticos; a análise combinatória e a formação do professor; recursos para o ensino da análise combinatória; estratégias de resolução de problemas combinatórios.

As propostas de ensino e/ou sequência didáticas para o ensino da combinatória foram as que mais figuraram. De um modo geral, essas propostas de intervenção foram baseadas na metodologia da resolução de problemas e no uso do princípio multiplicativo como forma de resolução e tinham como público-alvo alunos do 2º ano do ensino médio. Os resultados apresentados sugerem que essas intervenções foram eficazes no propósito de construção do raciocínio combinatório. No entanto, há espaço para que outras questões possam ser abordadas e/ou aprofundadas, tais como: qual a origem dos erros cometidos pelos alunos no enfrentamento dos problemas de contagem? Que variáveis devem ser consideradas na construção de propostas de intervenção?

Os trabalhos que versaram sobre a análise combinatória presente em livros e documentos oficiais deram um panorama da presença desse tema nesses dois ambientes no decorrer do tempo. Seus resultados mostraram as variações na abordagem da combinatória pelos livros didáticos, ao longo dos anos, e as mudanças advindas com a introdução dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Tendo em vista que o livro didático continua sendo um dos recursos mais usados pelos professores (Marim & Souza, 2015) e a sua relação com os documentos curriculares oficiais, há ainda outros aspectos que poderiam ser investigados como: de que modo o professor articula o currículo prescrito, os livros didáticos e outros recursos no preparo e no desenvolvimento das aulas sobre combinatória? Quais os impactos das orientações curriculares para o ensino da combinatória na formação do raciocínio combinatório dos alunos?

As produções que se ocuparam de investigar o professor – conhecimento e prática – frente à análise combinatória evidenciaram que as dificuldades enfrentadas por licenciandos e docentes com esse tema esbarram na sua formação, quer seja a inicial, quer seja a continuada. Por esse motivo, tornam-se relevantes pesquisas que discutam a maneira como a combinatória se faz presente em cursos de formação de professores de matemática (ou que ensinam matemática) ou, ainda, que pesquisadores e professores se articulem em estudos de natureza colaborativa, visando à construção do conhecimento conjuntamente.

Assim como as propostas de intervenção, as produções sobre recursos didáticos no ensino da análise combinatória buscaram aliar qualidade do conhecimento a ser construído à questão motivacional. Foram apresentados resultados do uso de jogos, de aplicativos e de materiais concretos como meios de interação em associação a sequências didáticas visando ao desenvolvimento do raciocínio combinatório. Há de se considerar, porém, a falta (constatada) do uso de referenciais teóricos por parte dos pesquisadores que os apoiassem na análise dos resultados obtidos. Essa ausência pode limitar os estudos a respeito do uso de recursos didáticos à simples comprovação de sua eficácia no ensino da combinatória deixando de lado outras questões como as relações entre o professor e os recursos didáticos quando mediadas pelo propósito do ensino da combinatória.

Sobre as pesquisas que se propuseram investigar as estratégias de resolução de problemas combinatórios foi observada uma proveniente de um mestrado acadêmico o que corresponde a cerca de 4,5% das produções que constam do *corpus* desse estudo. Todavia, a busca por compreender os processos de construção do raciocínio combinatório

tem um ponto forte nas investigações sobre as estratégias empregadas pelos alunos. Essa afirmação encontra respaldo, por exemplo, em Duro & Becker (2015, p. 860) que assim explicitaram os objetivos de seus estudos sobre a psicogênese do pensamento combinatório:

Procura-se investigar as estratégias utilizadas pelos estudantes durante a realização de experimentos, levando em conta a estruturação do seu raciocínio e os esquemas previamente construídos que possibilitam ou limitam a construção da combinatória.

Desse modo, o investimento em pesquisas sobre as estratégias de resolução de problemas combinatórios se faz necessário na medida em que contribui para aprofundar a compreensão da constituição do próprio raciocínio combinatório.

Espera-se que os resultados aqui apresentados possam contribuir para a ampliação das investigações sobre o ensino e a aprendizagem da combinatória, considerando as perspectivas descritas e outras que venham a surgir.

REFERÊNCIAS

- Almouloud, S. A. (2017). Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 11(2), 109. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2016v11n2p109>
- Almouloud, S. & Silva, M. J. F. (2019) Construção do referencial teórico de uma pesquisa educacional. In: G. P. Oliveira. *Pesquisa em Educação Matemática - um olhar sobre a metodologia* (pp. 49-79). Curitiba: CRV.
- Ambrosetti, N. B., & Calil, A. M. G. C. (2016). Contribuições Do Mestrado Profissional Em Educação Para a Formação Docente. *Reflexão e Ação*, 24(3), 85. <https://doi.org/10.17058/rea.v24i3.7526>
- Borba, R. E. S. R.; (2016). ANTES QUE SEJA TARDE : aprendendo Combinatória desde o início da escolarização. *Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana - ISSN: 2177-9309*, 7(1), 1–17.
- Borba, Rute Elizabete Souza Rosa, Rocha, C. de A., & Azevedo, J. (2015). Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29(53), 1348–1368. http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2015000301348&lang=pt%0Ahttp://www.scielo.br/pdf/bolema/v29n53/1980-4415-bolema-29-53-1348.pdf
- Duro, M. L., & Becker, F. (2015). Análise Combinatória: do método aleatório à combinatória sistemática. *Educação & Realidade*, 40(3), 859–882. <https://doi.org/10.1590/2175-623641714>
- English, L. D. (1988). *Young children's competence in solving novel combinatorial problems*. Unpublished Ph.D. dissertation, University of Queensland, Australia.

- Espindola, E. B. de M. (2019). Análise combinatória: recursos de um professor em diferentes níveis de sua atividade. *Educação Matemática Pesquisa: Revista Do Programa de Estudos Pós-Graduados Em Educação Matemática*, 21(5), 289–299. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i5p289-299>
- Ferreira, N. S. de A. (2002). As pesquisas denominadas “estado da arte.” *Educação & Sociedade*, 23(79), 257–272. <https://doi.org/10.1590/s0101-73302002000300013>
- Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Dordrecht, Holland: D. Reidel Pub. Co.
- Gea, M. M., Batanero, C., & Venegas, A. (2019). Práxis Práxis. *Revista Praxis Educional*, 15(n. 33), 208–232.
- Marim, V., & Souza, A. B. (2015). Os Livros Didáticos De Matemática : Concepção Do Professor Do Ensino Médio Nas Escolas Públicas Textbooks Math : Designing the High School Teacher. *Revisda de Educação, Ciências e Matemática*, v.5(n.2), 111–124.
- Pessoa, C. A. S., & Borba, R. E. S. R. (2010). O Desenvolvimento Do Raciocínio Combinatório Na Escolarização Básica. *Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana - ISSN: 2177-9309*, 1(1), 1–22.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *A origem da ideia do acaso na criança*. Rio de Janeiro: Record.
- Placha, K. C., & Moro, M. L. F. (2009). Problemas de produto cartesiano, raciocínio combinatório e intervenção do professor. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 25(1), 007–017. <https://doi.org/10.1590/S0102-37722009000100002>
- Rocha, C. D. A., Lima, A. P. B. de, & Borba, R. E. de S. R. (2015). Conhecimentos de Professores para Ensinar Combinatória : Contribuições de Pesquisas. *VI Seminário Internacional de Pesquisa Em Educação Matemática, November*, 1–13.
- Roldán, H., Batanero, C., & Beltrán, P. (2018). El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria. *Épsilon: Revista de Educación Matemática*, 100(January 2018), 49–63. https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon100_8.pdf
- Sabo, R. D. (2010). *Saberes Docentes: A análise combinatória no Ensino Médio. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática)*. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUC-SP. São Paulo.
- Silva, F. A. da. (2015). *Uma Análise dos Impactos e Tendências Apontadas nas Dissertações de Mestrado do PROFMAT, Produzidas na UFG - Regional Catalão de 2014 a 2016*. Universidade Federal de Goiás Regional Catalão.
- Silva, M. C., & Pessoa, C. A. dos S. (2015). a Combinatória: Estado Da Arte Em Anais De Eventos Científicos Nacionais E Internacionais Ocorridos No Brasil De 2009 a 2013. *Educação Matemática Pesquisa*, 17(4), 670–693.
- Trouche, L., Gueudet, G., & Pepin, B. (2020). *A abordagem documental do didático Luc Trouche , Ghislaine Gueudet & Birgit Pepin Adaptação ao português : Cibelle Assis e Katiane Rocha Revisor: Sonia Iglioni*. Encyclopedia of Mathematics Education. <https://hal.archives-ouvertes.fr/DAD-MULTILINGUAL>

NOTAS

TÍTULO DA OBRA

Teses e Dissertações sobre o Ensino e a Aprendizagem da Combinatória: Perspectivas Investigativas

Carlos Eduardo de Campos

Doutorando em Educação Matemática
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, Brasil
caducampos2012@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6804-7540>

Sonia Barbosa Camargo Iglori

Doutora em Matemática
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, São Paulo, Brasil
sigliri@pucsp.br
<https://orcid.org/0000-0002-6354-3032>

Endereço de correspondência do principal autor

Rua Antenor de Souza Melo, 700, apto. 31 – Sabiá, 08775-370, Mogi das Cruzes, SP, Brasil.

AGRADECIMENTOS

Ana Paula Ximenes Flores

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA

Concepção e elaboração do manuscrito: C. E. Campos, S. B. C. Iglori

Coleta de dados: C. E. Campos

Análise de dados: C. E. Campos

Discussão dos resultados: C. E. Campos, S. B. C. Iglori

Revisão e aprovação: S. B. C. Iglori

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA

Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO

Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM

Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES

Não se aplica.

LICENÇA DE USO – uso exclusivo da revista

Os autores cedem à **Revemat** os direitos exclusivos de primeira publicação, com o trabalho simultaneamente licenciado sob a [Licença Creative Commons Attribution](#) (CC BY) 4.0 International. Esta licença permite que **terceiros** remixem, adaptem e criem a partir do trabalho publicado, atribuindo o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico. Os **autores** têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicada neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista

Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no [Portal de Periódicos UFSC](#). As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista

Mérciles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista

Recebido em: 06-01-2021 – Aprovado em: 12-02-2021

