EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p248-264

Des liens entre l'organisation de savoir et l'organisation de l'étude dans l'analyse praxéologique

MICHELE ARTAUD[1]

Abstract. In order to elaborate the praxeological model of a given piece of knowledge, it is necessary to consider separately of the knowledge organization on the one hand and, on the other hands, parts of the didactic organization which allows for the emergence of this knowledge organization. What could and what could not be included in the model of a praxeology? Which elements of a didactic organization could be included in a knowledge organization and how could they be? Then, what are the issues are pushed forward in the process? The aim of this paper is to examine these questions through examples taken from the study of mathematics and to bring into light the extent to which denial of the didactic constrains researchers in didactics even in the very heart of their work.

Résumé. L'élaboration d'un modèle praxéologique demande de distinguer entre les éléments de l'organisation de savoir enjeu de l'étude, d'une part, et, d'autre part, certains ingrédients de l'organisation de l'étude qui permet l'émergence de cette organisation de savoir. Que peut-on mettre dans le modèle d'une praxéologie et que ne peut-on y intégrer ? Quels sont les aspects d'une organisation de l'étude qui peuvent venir s'intégrer dans une organisation de savoir et comment peuvent-ils le faire ? Quels problèmes cela pose-t-il ? Ce sont principalement ces questions que nous examinons à partir d'exemples pris dans l'étude des mathématiques, et leur examen nous permet de mettre en évidence une manifestation de la contrainte du refoulement du didactique au cœur même travail des didacticiens.

1. Un problème d'écologie du didactique

L'analyse de tout processus d'étude nécessite de distinguer l'organisation ou praxéologie de savoir qui modélise ce qui est enjeu de l'étude, le « cœur » du système didactique $S(X, Y, ♥)$, de l'organisation ou la praxéologie didactique qui permet l'étude du savoir. On notera que le savoir considéré comme enjeu de l'étude peut être de toute nature, y compris didactique.

Les types de tâches didactiques, ceux qui permettent l'étude du savoir, ont du mal à exister en raison de conditions et de contraintes relevant des niveaux les plus élevés de l'échelle de codétermination didactique introduite par Yves Chevallard (voir figure 1 ; Chevallard, 2013), et notamment sous la contrainte du refoulement du didactique (Chevallard, 2008 & 2012), que nous placerons au niveau de la civilisation, contrainte qui se manifeste d'abord par le fait que les discours culturels et sociaux sont quasiment muets sur la chose à apprendre comme sur ce qu'il faut faire pour l'apprendre.

Humanité ⇆ Civilisation ⇆ Société ⇆ École ⇆ Pédagogie ⇆
Systèmes didactiques ⇆ Discipline(s) ⇆ Domaines ⇆ Secteurs ⇆
Thèmes ⇆ Sujets

Figure 1. Échelle des niveaux de codétermination didactique.

[1] ADEF, EA 4671, Aix-Marseille Univ. (ESPE), Marseille, France – michele.artaud@univ-amu.fr

El paradigma del cuestionamiento del mundo en la investigación y en la enseñanza
Eje 2. *El análisis praxeológico como herramienta de análisis e ingeniería didáctica*

Un effet de cette contrainte est principalement que, au niveau du système didactique, on peut tenir un discours qui mentionne les choses à apprendre – généralement de façon peu développée – mais qu'on a la plus grande difficulté à tenir le même type de discours sur ce qu'il faut faire pour les apprendre hors certains ingrédients relevant de la pédagogie.

Faute de pouvoir modifier l'écologie des systèmes didactiques « par le haut » de l'échelle de codétermination didactique, on peut alors souhaiter le faire « par le bas » de l'échelle en intégrant des types de tâches didactiques aux praxéologies de savoir dont l'existence est facilitée par une légitimité épistémologique et sociale plus grande – du moins aux niveaux considérés.

Dans cette perspective, nous nous placerons dans le cadre de la problématique primordiale (Chevallard, 2013), en considérant comme instance dans la suite de cet article un chercheur, ξ, qui a le projet d'étudier la faisabilité de l'intégration d'ingrédients didactiques dans les praxéologies de savoir. ξ débute son enquête par la tentative d'intégrer des éléments relatifs à la dialectique des médias et des milieux.

2. Dialectique des médias et des milieux

La dialectique des médias et des milieux est l'une des neuf dialectiques identifiées par Y. Chevallard dans l'accomplissement du processus d'enquête. Dans son travail de thèse récemment soutenu, Sineae Kim (2015) la présente ainsi :

> On dit qu'un média est un *milieu* pour une question déterminée si l'on a de bonnes raisons de penser que les messages émis par ce média à propos de cette question ne procèdent d'aucune autre intention que d'énoncer la vérité, et non par exemple de « faire plaisir » ou au contraire de déplaire, d'influencer dans un sens ou dans un autre les décisions ou croyances de ses « auditeurs », etc. La dialectique des médias et des milieux considère que toute assertion émise (par un média) est a priori une *conjecture* qui reste à prouver et que la recherche d'éléments de *preuve* est coextensive à la détermination de milieux pour la question étudiée. Notons que les expériences au sens des sciences expérimentales, les raisonnements et les calculs sont des types essentiels de milieux que l'enquêteur s'efforce de « faire parler ». Notons aussi que, contre la formule latine « Magister dixit » (le Maître l'a dit), le professeur *y*, à l'instar d'autres médias possibles, n'est pas regardé *ipso facto* comme un milieu pour toute question examinée sous sa direction[129]. D'une façon générale, le *degré de véridicité* (ou *de véracité*) accordé à un média doit être relié au *degré d'exotéricité* des acteurs qui produisent ou déterminent les messages de ce média. Une règle essentielle (dont la culture mathématique scolaire s'affranchit souvent) est qu'*un* milieu *ne saurait suffire à valider une assertion*. (p. 681)
>
> [129] Il s'agit là d'un principe de méthode, qui redessine le *topos* de l'élève, et non pas d'un précepte éthique, qui mettrait en cause la parole professorale. Notons à cet égard que, dans les instructions pour le second degré publiées par le ministère Jean Zay, on pouvait lire ceci (Prost & Ory, 2015, p. 73 ; c'est nous qui soulignons) : « La méthode d'autorité est *absolument étrangère* à l'esprit de cet enseignement. Les maîtres habituent les élèves à voir par leurs yeux et à penser de leur chef, puis à dire *librement, sincèrement* [c'est-à-dire comme des milieux], ce qu'ils auront vu et pensé; à ne s'incliner devant l'autorité d'aucun maître, *pas même le leur*, et à ne rendre les armes qu'à l'évidence, mais à les lui rendre *honnêtement, toujours* [comme un milieu, encore une fois]. »

Cette dialectique suppose donc notamment l'accomplissement de tâches des types « vérifier une assertion » et « contrôler un résultat ». Ces types de tâches relèvent de l'étude d'une praxéologie et ne sont pas spécifiques des mathématiques, mais nous les considérerons dans la suite dans le cadre de l'étude des mathématiques. On pourra voir apparaître, par exemple, des types de tâches tels que vérifier une assertion géométrique, contrôler le résultat d'un calcul numérique, vérifier le comportement d'une suite ou d'une fonction, etc.

Si cette dialectique paraît essentielle pour l'accomplissement du processus d'étude, elle est difficile à faire exister dans les institutions scolaires où le primat du « *magister dixit* » reste important. On ne reviendra pas ici sur les conditions et les contraintes qui gênent, voire empêchent, l'existence de la dialectique des médias et des milieux, dont on trouvera des éléments d'analyse dans les travaux de Y. Chevallard notamment (voir par exemple Chevallard, 2007).

Notre chercheur en didactique qui a le projet d'étudier la faisabilité de pousser en avant la dialectique des médias et des milieux en l'intégrant à des organisations de savoir, souhaite donc constituer de telles organisations de savoir. Deux voies au moins nous semble-t-il s'offrent à lui : intégrer les types de tâches précédents dans les types de tâches de l'organisation de savoir ou les intégrer dans les techniques. Nous examinerons ces deux scénarios successivement avant de les confronter, en prenant comme base une organisation mathématique (OM) sur le thème des droites du plan en du secteur du programme intitulé « géométrie repérée » susceptible d'exister dans un lycée français en seconde (élèves de 15-16 ans). Pour simplifier l'exposé, nous ne considérerons ici que certains des ingrédients du modèle de la praxéologie mathématique à enseigner, ceux que l'intégration de la dialectique des médias et des milieux vient modifier.

2.1. Intégration de types de tâches de vérification ou contrôle comme types de tâches des organisations mathématiques

L'organisation mathématique qui nous sert de base, les droites en géométrie repérée, comporte deux types de tâches principaux : montrer que trois points sont alignés et déterminer la position relative de deux droites. La technique relative au premier type de tâches peut s'exprimer ainsi :

τ_{ali} : Si nécessaire, choisir un repère et déterminer les coordonnées des trois points A, B, C. Déterminer l'équation [réduite] de la droite (AB) et déterminer si C appartient à (AB).

Elle fait apparaître deux autres types de tâches : déterminer les coordonnées d'un point dans un repère orthogonal ; déterminer l'équation [réduite] d'une droite dans un repère orthogonal[2]. On peut noter que ces types de tâches apparaissent, dans une formulation proche mais non articulée, dans la colonne « Capacités » du programme (Ministère de l'éducation nationale, 2009) que nous reproduisons ci-dessous.

- Tracer une droite dans le plan repéré.
- Interpréter graphiquement le coefficient directeur d'une droite.
- Caractériser analytiquement une droite.
- Établir que 3 (*sic*) points sont alignés, non alignés.
- Reconnaître que deux droites sont parallèles, sécantes.
- Déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes. (p. 6)

2. Le programme de la classe de seconde en vigueur en France en 2016 ne comprend que les équations réduites de droite (de la forme $y = ax + b$ ou $x = c$), les équations cartésiennes de la forme $ux + vy + w = 0$ étant au programme des classes de premières scientifiques (élèves de 16-17 ans).

On doit donc avoir au moins quatre types de tâches de vérification ou contrôle : Vérifier que trois points sont alignés ; contrôler la position de deux droites ; vérifier les coordonnées d'un point dans un repère orthogonal ; contrôler l'équation [réduite] d'une droite dans un repère orthogonal. La technique de réalisation de chacun de ces types de tâches peut convoquer plusieurs milieux. On peut par exemple pour l'alignement de trois points faire une figure sur une feuille, et mettre en œuvre un programme comme le programme « alignement » figurant en annexe pour confirmer[3]. Ou encore, pour contrôler l'équation réduite d'une droite donnée par deux points, placer les deux points sur une figure, tracer la droite, vérifier qu'elle est verticale si elle est de la forme $x = c$, coupant l'axe des abscisses au point $(0 ; c)$ ou encore s'apercevoir que les points ont la même abscisse c ; si elle est de la forme $y = ax + b$, vérifier qu'elle coupe l'axe des ordonnées au point $(0 ; b)$ et l'axe des abscisses au point $(-b/a ; 0)$. Dans ce dernier cas, on peut également représenter la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ à la calculatrice, représenter les deux points définissant la droite et vérifier que la droite passe bien par ces deux points ; on peut ensuite confirmer par l'exécution du programme « équation » figurant en annexe. On pourrait bien évidemment choisir de faire les figures en utilisant un logiciel de géométrie dynamique mais nous ne considérons pas ce choix ici car, compte tenu des contraintes françaises, les élèves ne disposent pas encore véritablement d'un logiciel de géométrie dynamique dans l'ordinaire de leur travail.

On obtient donc une praxéologie mathématique locale comportant huit types de tâches, dont l'environnement technologico-théorique se trouve modifié par rapport à celui de la praxéologie initiale principalement par le biais de l'introduction des ingrédients d'algorithmique et de programmation nécessaires au travail à effectuer. Nous ne les détaillerons pas complètement ici ; ils comprennent au moins les instructions d'affectation, d'entrée, de sortie, instruction conditionnelle, la programmation d'un algorithme et la justification du fait que le programme est correct.

2.2. Intégration de types de tâches de vérification ou contrôle dans les techniques de l'organisation mathématique existante

On conserve ici les quatre types de tâches et c'est dans les techniques que va venir prendre place la dialectique des médias et des milieux. Nous prendrons comme pierre de touche, comme précédemment, le type de tâches « Montrer que trois points sont alignés ». La technique initiale, nous l'avons dit, peut se formuler ainsi compte tenu des contraintes du programme de la classe :

τ_{ali} : Si nécessaire, choisir un repère et déterminer les coordonnées des trois points A, B, C. Déterminer l'équation [réduite] de la droite (AB) et déterminer si C appartient à (AB).

L'intégration de la dialectique des médias et des milieux conduirait par exemple à la modification suivante :

τ_{ali} : Si nécessaire, choisir un repère et déterminer les coordonnées des trois points A, B, C. Déterminer l'équation [réduite] de la droite (AB) et déterminer si C appartient à (AB). Vérifier sur

[3] . La technique de contrôle mise en forme dans le programme « alignement » repose sur le calcul des coefficients directeurs de deux droites, (AB) et (AC). On pourrait choisir cette technique comme technique principale et la technique τ_{ali} comme technique de vérification, ou encore produire une technique amalgamant les deux. Nous ne rentrons pas ici dans la discussion de tels choix, qui ne sont pas directement liés à notre propos.

une figure en traçant (AB) et en examinant si C est sur (AB). Contrôler les coordonnées des points, l'équation de la droite. Exécuter le programme « Alignement ».

L'environnement technologico-théorique sera complété comme précédemment, avec des ajouts comme par exemple la justification du fait que les résultats ont à être vérifiés – qui est loin d'être anecdotique comme nous le verrons ci-après.

Choix de l'intégration par les techniques

Si l'on compare les deux voies d'intégration, on obtient que l'intégration par les types de tâches conduit à l'institutionnalisation d'une organisation mathématique diffractée, non intégrée ; elle comprend des types de tâches du genre « vérifier » qui sont difficiles à faire exister et dont la mobilisation par les élèves et les professeurs est peu probable. Par contraste, l'intégration par les techniques produit une OM institutionnalisée qui fait apparaître la fonction de la dialectique des médias et des milieux et l'intègre pour augmenter la fiabilité ou la robustesse des techniques, ce qui peut en favoriser l'existence ; la dialectique des médias et des milieux fait alors partie du *topos* de l'élève dans le rapport institutionnel construit, avec des conditions qui favorisent l'occupation de ce topos, notamment si les techniques sont institutionnalisées. On obtient donc, dans ce dernier cas, une organisation mathématique qui correspond davantage à l'activité mathématique observée dans l'institution puisqu'elle en conserve les types de tâches et qui pousse en avant les fonctions de la vérification et du contrôle ; on crée alors des conditions qui pourraient favoriser, pousser en avant, permettre, l'existence d'un rapport fonctionnel aux mathématiques dans les institutions qui les manipulent (Artaud, 2010). On notera cependant que les choses sont loin d'aller de soi si l'on reste à ce niveau de l'échelle de codétermination didactique qu'est le secteur, voire même le domaine. Ainsi, dans le travail de Priscilla Gilardi-Ntie que nous avons dirigé dans le cadre d'un master de recherche en didactique des mathématiques (Gilardi-Ntie, 2013), on a pu noter la résistance à l'existence de ces types de tâches de vérification, même insérés dans les techniques, lorsque le travail n'avait pas commencé dès le début de l'année et qu'il s'agissait de le faire vivre dans une OM régionale, relative aux vecteurs en seconde ici. Voici par exemple un extrait d'un compte rendu d'une séance en classe, l'une des dernières sur ce secteur, et dans laquelle les élèves rendent un devoir qu'ils ont fait hors classe. Le professeur de la classe, un professeur débutant qui avait accepté de mettre en œuvre le travail élaboré pour la recherche, répond à quelques questions sur le devoir qui vient d'être rendu (Gilardi-Ntie, 2013, p. 69) :

E : Il fallait faire la vérification graphique ?

P : Il faut toujours faire la vérification graphique.

E : Mais c'était pas dit dans l'énoncé !

P : C'était implicite.

E : Ça va nous enlever des points si on l'a pas fait ?

P : On verra.

L'ambivalence du professeur se manifeste dans la non cohérence entre l'affirmation « il faut toujours faire la vérification » et le fait qu'il est possible que cela ne soit pas pris en compte dans l'évaluation. Le travail au niveau du *logos* des praxéologies professionnelles a sans doute à être nettement développé à cet égard, notamment sur la prise en compte d'un certain détail des techniques à la fois dans l'institutionnalisation mais aussi dans l'évaluation. Cela passe nous semble-t-il par un développement de l'articulation entre expérimentation et déduction mais nous ne développerons pas ce point ici.

3. La réalisation du moment d'institutionnalisation et l'amalgamation des organisations de savoir

Le moment de l'institutionnalisation des organisations de savoir est susceptible de remplir au moins deux fonctions : la mise en forme de la praxéologie qui a émergé et l'amalgamation de cette praxéologie aux praxéologies existantes. Dans le cadre d'un paradigme du questionnement du monde, cela suppose que la praxéologie de savoir soit insérée, d'une façon qui en permet notamment un usage fonctionnel, dans une organisation mathématique plus large, aux niveaux du thème mais aussi du secteur voire du domaine concernés. Il s'agit donc de produire une organisation mathématique qui ne soit pas simplement une juxtaposition des organisations mathématiques ponctuelles ou locales mais qui fournisse une *infrastructure mathématique adaptée* à l'usage institutionnellement visé et mettant au net ce qui sera intégré aux organisations de savoir et ce qui restera dans l'organisation didactique. Notre chercheur, ξ, se lance donc dans l'examen de la réalisation de ce moment pour poursuivre son étude de la viabilité de l'intégration du didactique dans les praxéologies de savoir, cette intégration passant par l'institutionnalisation de certains aspects qui pourraient rester dans l'OD.

3.1. Nécessité de la fonction d'amalgamation

Des conditions et des contraintes écologiques et économiques relatives à l'existence de techniques ont été identifiées de longue date (Chevallard, 1996 ; Artaud, 1999). Rappelons-en ici les principales. Si l'on considère dans une institution donnée, un type de tâches *T*, il y a une nécessité du fonctionnement institutionnel, et notamment de la lisibilité de l'activité au sein de l'institution, qui pousse en avant la mise en œuvre d'une seule technique associée à ce type de tâches : s'il existe deux techniques pour le même type de tâches, la reconnaissance dans l'activité de l'institution de l'accomplissement d'une tâche, spécimen du type de tâches *T*, par la technique mise en œuvre est rendu malaisé. Cela est accentué par le fait que, d'une part, il faut justifier l'acquisition d'une technique nouvelle par une portée plus grande ou du moins différente et, d'autre part, dans le cas où deux techniques coexisteraient, l'on aurait alors deux objets occupant la même niche au sein d'un habitat donné : au bout d'un certain temps, seul le plus adapté survivra (voir Artaud, 2003, pour un exemple relatif aux techniques utilisant les calculatrices).

Ce sont principalement ces ingrédients qui poussent en avant une amalgamation des organisations de savoir, ce qui suppose de regrouper les types de tâches et d'agréger des techniques en une technique unique comme nous l'avons mis en évidence dans notre communication au congrès d'Uzès (Artaud, 2010). Cela a pour incidence de regrouper des technologies ou de modifier quelque peu la ou les technologie(s), mais nous ne développerons pas ce point ici. Cette amalgamation se fait peu aujourd'hui dans l'institution scolaire, du moins par écrit, alors même qu'elle est identifiée par l'institution comme nécessaire par le biais d'un dispositif de « synthèses plus globales » ainsi qu'en témoigne ce passage du programme du collège (Ministère de l'Éducation nationale, 2008 ; c'est nous qui soulignons) :

> […] [I]l est nécessaire de proposer des situations d'étude dont le but est de *coordonner des acquisitions diverses*. Dans cette optique, l'enseignant réalise, avec les élèves, des *synthèses plus*

> *globales*, à l'issue d'une période d'étude et propose des problèmes dont la résolution nécessite *l'utilisation de plusieurs connaissances*. Le traitement de ces problèmes permet de *souligner le sens, l'intérêt, la portée des connaissances mathématiques*, que ce soit dans d'autres disciplines ou dans la vie quotidienne (pourcentages, échelles, représentations graphiques...).

Comme toujours en cette matière, les praxéologies permettant de réaliser « des synthèses plus globales » font défaut, de même que ce que serait le produit d'une telle synthèse.

3.2. Amalgamer en institutionnalisant

Lorsqu'on examine le produit du moment de l'institutionnalisation dans les traces écrites laissées aux élèves par les enseignants, comme dans les manuels d'ailleurs, on s'aperçoit que la mise en forme de l'organisation mathématique porte partiellement la trace de l'organisation de l'étude qui a permis de la produire. Nous en donnerons un exemple ici en examinant le produit du travail d'un professeur stagiaire de mathématiques dirigeant l'étude du thème « triangle rectangle et cercle » en classe de 4^{e} (élèves de 13-14 ans). Il a fait émerger les différents ingrédients par des activités et a fait noter la synthèse « au fur et à mesure ». Celle-ci porte donc la trace de certains éléments de la chronogénèse, en étant scindée en quatre paragraphes dont voici les titres :

> Montrer qu'un point appartient à un cercle ;
>
> Montrer qu'un triangle est rectangle à l'aide du cercle circonscrit ;
>
> Calculer une longueur ;
>
> Montrer qu'un triangle est rectangle à l'aide de la médiane.

Le contenu de ces paragraphes est structuré de la même façon : l'énoncé d'une propriété précède un « exemple générique » qui institutionnalise la pratique annoncée par le titre du paragraphe. Une organisation mathématique rendant compte de ce qui apparaît dans ces traces écrites devrait ainsi manifester que le type de tâches T_{rect}, montrer qu'un triangle est rectangle, apparaît diffracté en deux sous-types de tâches que l'on pourrait formuler ainsi :

> Montrer qu'un triangle dont on connaît le cercle circonscrit est rectangle ;
>
> Montrer qu'un triangle dont on connaît la longueur d'une médiane et du côté correspondant est rectangle.

Cela conduit, on l'a dit, à intégrer dans l'OM certains éléments de la chronogénèse et cela produit une OML qui n'est pas adaptée à l'usage qui doit en être fait dans l'institution et peu fonctionnelle : institutionnellement, c'est le type de tâches « déterminer si un triangle est rectangle » qui est présent.

On a donc ici à *amalgamer* l'OM autour de ce type de tâches, déterminer si un triangle est rectangle, en constituant une technique du type :

> Si on connaît la longueur d'un côté du triangle et de la médiane correspondante, on calcule le rapport de la longueur du côté à la médiane ; si c'est deux, on écrit que le triangle est rectangle, si non qu'il n'est pas rectangle.
>
> Si les sommets du triangle sont sur le même cercle, si ce cercle a pour diamètre le plus grand côté, on écrit que le triangle est rectangle ; si non qu'il n'est pas rectangle.
>
> […]

On pourrait ensuite ajouter deux ingrédients qui ont déjà émergé, de manière à réaliser l'amalgamation aux organisations mathématiques antérieurement étudiées :

> Si on connaît les longueurs des trois côtés du triangle, examiner si elles vérifient l'égalité de Pythagore ;
>
> Si on connaît la mesure de deux angles, examiner si la somme de ces deux mesures est 90°.

Les observables que nous avons considérés relèvent des éléments écrits de réalisation du moment d'institutionnalisation. L'observation clinique met en évidence que le travail oral d'institutionnalisation dans les classes amalgame les types de tâches mais que les techniques restent juxtaposées, et non reliées : on obtient alors une OML écologiquement fragile, qui comporte plusieurs types de tâches identiques, à la place d'une OMP pleinement fonctionnelle (voir Artaud, 2010).

4. Du didactique non intégrable dans les organisations de savoir

Ce qui précède dessine un ingrédient de réponse à la question étudiée par ξ relative à la possibilité d'intégrer du didactique aux organisations praxéologiques : une telle intégration peut s'opérer par l'intermédiaire des techniques de façon à augmenter le *topos* de l'élève et fonctionnaliser les éléments didactiques intégrés. Cependant, il y a du didactique qu'il n'est pas souhaitable d'intégrer dans les organisations de savoir parce que cette intégration conduirait à masquer certains aspects des processus d'étude en nuisant à leur diffusion, notamment dans la perspective de constituer des infrastructures pour la profession de professeur. Nous en avions donné un exemple dans une communication au troisième congrès sur la TAD (Artaud 2011) à propos de la distinction entre « calcul réfléchi » et « calcul automatisé » installée dans l'institution scolaire en France, exemple que nous reprendrons ci-après.

4.1. Différence épistémique versus différence didactique

Le document de la collection *Ressources pour les classes* portant sur « Le calcul numérique au collège » (Ministère de l'éducation nationale, 2007) donne d'abord, dans un tableau, « un cadre permettant de penser les différents moyens de traiter un calcul pour obtenir un résultat exact ou approché » que nous avons reproduit dans le tableau 1 ((Ministère de l'éducation nationale, 2007, p. 2).

	Calcul automatisé	**Calcul réfléchi ou raisonné**
Calcul mental	Résultats mémorisés Procédures automatisées	Procédures construites ou reconstruites Choix des arrondis
Calcul écrit (papier-crayon)	Techniques opératoires (calcul posé)	Procédures construites ou reconstruites Choix des arrondis
Calcul instrumenté (calculatrice, logiciel)	Calculs usuels (quatre opérations), racines carrées, calculs trigonométriques, utilisation des fonctions	– programmation d'un calcul complexe – adaptation de la procédure aux

	simples d'un tableur…	possibilités de la machine

Tableau 1. Différents types de calculs selon l'institution scolaire française.

Dans la partie traitant du calcul mental, le calcul mental réfléchi se voit caractériser, par contraste avec le calcul automatisé, de la façon suivante :

> Le calcul mental réfléchi nécessite l'élaboration de stratégies de calcul personnelles. Il met donc en jeu l'initiative, le raisonnement et des connaissances (explicites ou non) sur la numération et les propriétés des opérations. Sa pratique nécessite la mise en œuvre de relations entre calcul et raisonnement, d'où l'expression de calcul raisonné, parfois proposée pour le désigner. Donnons deux exemples :
>
> – Il n'est nul besoin de mémoriser la « règle » de la division par 0,1. L'utilisation de connaissances et procédures mémorisées y supplée avantageusement. Il suffit pour cela au niveau de la classe de 6e de savoir qu'un quotient de change pas quand on multiplie numérateur et dénominateur par un même nombre ($\frac{a}{0{,}1} = \frac{a \times 10}{0{,}1 \times 10} = a \times 10$) ou encore, à partir de la classe de 4e, que 0,1 c'est un dixième, que diviser par un nombre c'est multiplier par son inverse et que l'inverse de un dixième c'est 10. Il faut donc surtout savoir que $a : 0{,}1 = a \times \frac{1}{0{,}1} = a \times 10$.
>
> – Le calcul de 25 × 12 peut être effectué de différentes façons :
>
> – en utilisant le fait que 25 × 4 = 100 et que 12 = 4 × 3 (qui sont deux résultats mémorisés) ainsi que la maîtrise « en actes » de la propriété d'associativité de la multiplication ; ainsi : 25 × 12 = 25 × (4 × 3) = (25 × 4) × 3 = 100 × 3 = 300 ;
>
> – en utilisant le fait que 25 est le quart de 100 (après avoir repéré que 12 est divisible par 4) ; il suffit alors de prendre 100 fois le quart de 12 : $25 \times 12 = \frac{100}{4} \times 12 = 100 \times \frac{12}{4}$.
>
> – en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, la « règle » de la multiplication par 10 qui est une procédure automatisée et la connaissance des doubles de nombres usuels (résultats mémorisés) ; ainsi :
>
> 25 × 12 = 25 × (10 + 2) = (25 × 10) + (25 × 2) = 250 + 50 = 300.
>
> (Ministère de l'éducation nationale, 2007, p. 3)

La distinction faite est bien ici une affaire d'organisation de l'étude : ce qui permet la variation des manières de faire, c'est précisément que les types de tâches objet du « calcul réfléchi » n'ont pas été complètement étudiées au sens où on n'a pas par exemple ici découpé le type de tâches « multiplier un nombre par 25 » ou « multiplier un nombre par 12 » pour élaborer une technique à son propos. C'est d'ailleurs ce que l'on peut reconnaître dans le passage du document qui suit l'extrait précédent :

> En dehors de quelques procédures appelées à devenir automatisées (car très performantes et d'usage fréquent), l'explication des procédures ne doit pas donner lieu à l'institutionnalisation d'une procédure particulière, car ce qui est simple pour un élève ne l'est pas nécessairement pour un autre, la notion de simplicité étant fonction des connaissances numériques de chacun. (*Ibid,* p. 4)

Sur les types de tâches qui seront enjeu du calcul dit « réfléchi », on en reste à l'exploration et éventuellement à la constitution d'un environnement technologico-théorique, constitution qui ne sera que partielle puisque l'on ne met pas en perspective les portées des différentes techniques. Dans le cas du calcul « automatisé », on dispose par contraste d'une OM suffisamment travaillée (au double sens du moment de travail) pour penser qu'il s'agit dans la position d'élève de types de tâches routiniers. On est donc là face à *deux rapports institutionnels différents* à deux organisations mathématiques, la deuxième organisation mathématique devant alors être considérée dans l'institution examinée comme *faisant partie de l'organisation de l'étude* de l'organisation mathématique régionale relative au calcul d'une expression numérique : elle permet principalement de faire travailler son environnement technologico-théorique en lui faisant produire de nouvelles techniques. On pourrait en revanche examiner si le type de tâches « produire une technique alternative à un algorithme de calcul usuel » est un type de tâches de l'organisation de savoir devant exister : il semble que ce ne soit pas officiellement le cas, au sens où il n'est pas demandé d'institutionnaliser une technique relative à ce type de tâches, mais nous n'irons pas plus loin sur ce point.

Pourtant, dans les discours institutionnels, comme dans les discours noosphériens d'ailleurs, tout se passe comme si il y avait deux *natures* de calcul. Par l'intermédiaire d'un inventaire de propriétés attribuées au calcul mental (il suppose « une intuition des nombres […] une part d'initiative et de choix. Il opère sur des nombres et permet d'enraciner l'ordre de grandeur, le sens des opérations et leurs propriétés » (Ministère de l'éducation nationale, 2003, p. 33) et un changement de dénomination, « calcul réfléchi » ou « calcul raisonné », on glisse vers une opposition au « calcul posé » :

> L'expression de « calcul mental », signifie qu'entre l'énoncé du problème et l'énoncé du résultat, on renonce à utiliser toute opération posée (technique opératoire usuelle). Cela n'implique pas qu'aucun support écrit ne puisse intervenir dans la consigne, dans la formulation du résultat voire même dans le cours du calcul. Les expressions « calcul réfléchi » et « calcul raisonné », considérées comme équivalentes, sont clairement préférables à celle de « calcul rapide », autrefois en usage. Elles insistent sur l'importance donnée à la méthode (choix d'une stratégie, élaboration d'une procédure) plutôt qu'à la rapidité d'exécution, au moins en ce qui concerne les calculs complexes. (*Ibid.*)

La dernière phrase illustre pourtant clairement, lorsque l'on modélise à l'aide des moments de l'étude, que l'on a là un enjeu lié à l'organisation didactique comme nous l'indiquions plus haut – au moins pour les calculs dits « complexes » : le fait que l'on « élabore une procédure » signifie que l'on en est, pour le type de tâches considéré, au moment exploratoire, en utilisant comme nous l'avons explicité précédemment un environnement technologico-théorique déjà produit par ailleurs. La « part d'initiative et de choix » attribuée au calcul mental est d'abord la marque du fait que l'étude effectuée à son propos est partielle et que les techniques n'auront pas la possibilité de se routiniser, notamment parce que l'on variera beaucoup les types de tâches ou les sous-types de tâches à accomplir. On fait donc comme si il y avait deux OM à institutionnaliser alors qu'il n'y en a qu'une mais deux types de rapport à l'étude : l'un qui va jusqu'à institutionnaliser et faire travailler l'OM qui a émergé, l'autre qui fait émerger quelques techniques à partir de tâches et qui n'ira jamais jusqu'à identifier des types de tâches, institutionnaliser des techniques pour ces types de tâches, les travailler, etc. Le fait d'inclure ce travail mathématique dans l'*enjeu de l'étude* devant exister et *non dans l'organisation de l'étude* induit d'abord une modification des objectifs institutionnels : s'il est possible que cette modification soit souhaitée par une instance, il n'en reste pas moins que la modélisation de l'OM qui doit exister ne comprend pas les pratiques de calcul réfléchi. Mais il masque surtout cette variabilité des rapports à l'étude que nous avons soulignée et participe ainsi au renforcement du refoulement du didactique, dans une institution où l'on aurait besoin de le contrebattre pour qu'un rapport au didactique puisse exister et se développer pleinement.

4.2. Les mathématiques du didactique

Cette part de travail mathématique qui constitue un élément du didactique se rencontre également dans l'analyse des séances ou des séquences d'enseignement. Nous en donnerons un exemple ici à propos d'une séance en classe qui fait partie d'une séquence thématique sur le cosinus en classe de 4e (élèves de 13-14 ans). On pourra se reporter à la communication de Gisèle Cirade (2018) pour d'autres exemples.

La séance étudiée est la deuxième séance de la séquence, et dure 55 minutes. Le travail effectué lors de la première séance est rappelé brièvement au début : dans la première séance, les élèves sont, semble-t-il, partis d'un problème de modélisation conduisant au calcul de la longueur du côté adjacent à un angle de 60 ° dans un triangle rectangle dont on connaît la longueur de l'hypoténuse. Ils ont mis en évidence que le rapport du côté adjacent et de l'hypoténuse était constant et valait 0,5 dans ce cas. Ils ont alors produit une conjecture, testée dans le cas d'un angle de 70 ° : « il y a un rapport entre l'angle et ce coefficient entre le côté adjacent et l'hypoténuse ». Ils ont conclu en proposant de poursuivre la mise à l'épreuve de la conjecture avec un logiciel de géométrie dynamique, Geogebra, ce qui se déroule effectivement pendant la plus grande partie de cette deuxième séance. Les élèves construisent un triangle rectangle, mesurent l'un des angles aigus[4], calculent le rapport à l'hypoténuse du coté adjacent à cet angle et vérifie que ce rapport est bien constant en faisant varier les mesures des côtés des triangles (ils doivent obtenir au moins cinq valeurs des côtés). Le travail effectué aboutit au bilan suivant : « dans un triangle rectangle, pour un angle aigu donné, il existe un rapport entre la mesure de l'angle et le quotient de la mesure du côté adjacent et de la mesure de l'hypoténuse ». Les quotients trouvés expérimentalement sont rappelés, le professeur énonce qu'on le nomme cosinus d'un angle et distribue une table de cosinus. Les élèves contrôlent que les valeurs qu'ils ont trouvées sont bien cohérentes avec celles de la table. Une feuille où figurent trois « applications » est enfin distribuée ; en voici les énoncés :

> Application 1 : ABC est un triangle rectangle en B. On sait que BAC = 60 ° et que AB = 12 cm. Combien mesure le segment [AC] ?
>
> Application 2 : EFG est un triangle rectangle en G. On sait que EFG = 45 ° et que EF = 10 cm. Combien mesure le segment [FG] ? (Arrondir à 0,1 près.)
>
> Application 3 : IJK est un triangle rectangle en I. On sait que JK = 5 cm et que IJ = 4 cm. Quelle est la mesure arrondie à l'unité de l'angle IJK ?

Les deux premières sont à effectuer pour la séance suivante, et les quelques minutes restantes sont consacrées à une explicitation collective du travail à mener pour la résolution de l'application 1.

---

4. Le compte rendu n'est pas assez explicite pour savoir si c'est bien un triangle rectangle d'angle de mesure donnée qui a été construit (ce qui rend la mesure de l'angle fixe quand on fait varier les côtés du triangle) et si la mesure intervient comme vérification. On voit cependant apparaître à un moment que beaucoup d'élèves ont construit un triangle de la façon automatique proposée par le logiciel et qu'ils ont obtenu un angle de 45 °.

Une analyse de première prise pourrait faire apparaître T_{rap}, déterminer dans un triangle rectangle d'angle donné le rapport entre le côté adjacent de l'angle et l'hypoténuse, comme un type de tâches faisant partie de l'organisation mathématique enjeu de l'étude. Il est net cependant que l'enjeu de l'étude de la séance est de faire émerger la notion de cosinus d'un angle, élément technologique principal d'une OM locale dont deux types de tâches apparaissent dans les exercices donnés à la fin de la séance : déterminer la mesure d'un côté d'un triangle rectangle et déterminer la mesure d'un angle d'un triangle rectangle. Cela est confirmé par la considération du programme de la classe, qui explicite, sur le thème « triangle rectangle : cosinus d'un angle », la capacité « [u]tiliser dans un triangle rectangle la relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs des côtés adjacents » (Ministère de l'éducation nationale, 2008, p. 31). La relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs des côtés adjacents est donc un ingrédient technologique et les types de tâches associés sont à rechercher en s'interrogeant sur la fonction de cette relation. Le type de tâches T_{rap} est donc un ingrédient de l'organisation de l'étude : il participe à la réalisation du moment technologico-théorique, en justifiant l'existence d'un rapport constant qui ne dépend que de l'angle entre le coté adjacent de l'un des angles aigus d'un triangle rectangle et son hypoténuse et en produisant certaines valeurs de ce rapport pour des angles de mesures données. D'autres éléments viennent corroborer l'analyse, et notamment le fait que, comme le montre clairement le compte-rendu, le type de tâches T_{rap} n'est pas un type de tâches problématique au niveau considéré et a donc toute chance de faire partie du milieu pour l'étude menée. Une première méprise dans l'analyse intègrerait donc Trap comme type de tâches de l'OM mise en place au lieu de lui attribuer un rôle dans l'organisation de l'étude.

La situation est un peu différente pour le type de tâches « déterminer la valeur du cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle » que l'on pourrait vouloir intégrer dans l'OM. La séance présentée met en évidence que ce type de tâches ne sera pas isolé mais intégré dans la technique de calcul de longueur ou de détermination d'un angle. Les questions posées par l'intermédiaire des exercices en fin de séance l'attestent et ce type de tâches n'aura existé isolément que pendant un temps assez bref avant d'être amalgamé et intégré dans les techniques.

Cette seconde méprise conduirait à diffracter l'OM et, par là, dans la conduite de l'étude de cette OM, à enlever du *topos* aux élèves ; cela peut aller, avec des professeurs débutants, jusqu'à masquer l'enjeu principal de l'étude pour se centrer sur l'accomplissement de tâches du type « déterminer la valeur du cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ». La première méprise, elle, masque la réalisation du moment technologico-théorique – et donc participe du refoulement du didactique –, et peut conduire à produire des infrastructures mathématiques inadaptées à la direction de l'étude. On la retrouve dans des travaux de recherches en dehors de l'analyse de séances ou de séquences en classe et j'en donnerai ici un exemple relatif à la constitution d'un modèle praxéologique sur le théorème de Lagrange issu du travail de thèse de Sébastian Xhonneux (2011) en suivant la publication d'une partie de ce travail qu'il a faite avec Valérie Henry au 12e congrès EMF (Xhonneux & Henry, 2012).

4.3. Infrastructures mathématiques inadaptées

Maggy Schneider (2017) a souligné lors du dernier congrès sur la TAD l'usage peu, voire pas, phénoménotechnique de ce modèle praxéologique, (désigné par le sigle MER dans la publication citée), qu'elle attribue à plusieurs facteurs dont l'un est l'évitement de la description par le chercheur « à la lumière de la TAD et du regard articulé qu'elle autorise sur les OM et les OD, par quels processus les "blocs technologico-théoriques" des praxéologies OM_1 et OM_2 sont transformés en tâches » (p. 168), évitement permis entre autres par le recours aux notions de « types de tâches procédurales » et « types de tâches structurales » en référence à la différence entre « *operational conceptions* » et « *structural conceptions* » introduite par Anna Sfard (1991).

Le modèle présenté par les auteurs comprend en effet cinq OM qui sont présentées ainsi :

> Notre MER inclut cinq organisations mathématiques, OM_1, OM_2, OM_3, OM_4 et OM_5, relatives aux types de tâches suivants :
>
> T_1 : Chercher des candidats à être extremum d'un problème d'optimisation sous contrainte d'égalité.
>
> T_2 : Résoudre un problème d'optimisation sous contraintes d'égalité.
>
> T_3 : Exploiter la signification du multiplicateur de Lagrange.
>
> T_4 : Construire les éléments théoriques relatifs au théorème de Lagrange.
>
> T_5 : Construire les éléments théoriques relatifs au multiplicateur de Lagrange.
>
> Précisons dès à présent que les tâches T_4 et T_5 pourraient être considérées au premier abord comme les éléments technologico-théoriques des tâches T_1, T_2 et T_3 respectivement. Néanmoins la spécificité des enseignements théoriques à l'université nous a amenés à les considérer comme des types de tâches à part entière bien que d'un genre différent des trois premières. (p. 763)

Le problème sur lequel nous voulons porter l'attention est donc le découpage de T_4 et T_5 : l'embarras des auteurs est manifeste, comme l'indique le commentaire qui suit l'annonce des cinq « types de tâches », et l'expression « tâches T_4 et T_5 » employée est loin d'être anodine. Car en effet T_4 et T_5 sont bien des tâches mathématiques, que l'on ne va accomplir qu'une fois, et qui relèvent d'un type de tâches que l'on pourrait formuler ainsi : « Justifier un élément technologique d'une OM ». Ces tâches relèvent donc de l'élaboration de l'environnement technologico-théorique et leur produit constitue une partie de cet environnement technologico-théorique. On est ainsi clairement dans la réalisation du moment technologico-théorique, comme dans l'exemple précédent de la séance en classe sur le cosinus d'un angle, et c'est cela qui est, à nouveau, masqué. Il est clair que si l'on s'intéresse, comme les auteurs, à l'enseignement du théorème de Lagrange à l'université aujourd'hui, la majorité des cours que l'on va pouvoir observer seront relatifs à l'environnement technologico-théorique du type de tâches T_2, et se situeront dans le moment technologico-théorique et le moment d'institutionnalisation de cette OM autour de T_2, avec un moment technologico-théorique dont la présence sera plus ou moins forte selon les cas – et qui pourra, dans certains cas, être absent. Et bien entendu, ce qui sera institutionnalisé sera la plupart du temps l'environnement technologico-théorique de l'OM enjeu de l'étude.

Notons que l'on n'est pas, nous semble-t-il contrairement à ce que suggèrent V. Henry et S. Xhonneux, dans la situation que Carl Winslow avait voulu pointer en parlant de « transformer la théorie en tâches » (Winslow, 2008) à propos de l'enseignement de l'analyse à l'université. On a dans le travail de C. Winslow véritablement une modification du découpage des types de tâches enjeu de l'étude, liée nous semble-t-il à une modification à l'université de la raison d'être du travail mené qui se cristallise notamment autour de la justification d'une assertion à portée technologique et de la détermination d'une classe d'objets vérifiant certaines conditions – ces deux types de tâches étant issus d'exemples donnés dans l'article de C. Winslow et son annexe. Certains des éléments du travail de C. Winslow relèvent d'une question d'organisation de l'étude, celle de la non identification, par l'enseignement délivré, des types de tâches enjeu de l'étude et, par conséquent, la non institutionnalisation de techniques relatives à ces types de tâches, dès lors laissées à la charge de l'étudiant, mais ils ne peuvent pas être comparés à la situation analysée par S. Xhonneux et V. Henry.

Pour revenir à leur travail, nous sommes en présence d'un modèle praxéologique qui n'est pas adapté à l'identification de phénomènes didactiques parce qu'au moins deux des types de tâches découpés n'en sont pas : ce sont des tâches didactiques qui concourent à la réalisation du moment technologico-théorique relatif à des OM choisies comme objet d'étude, constituées autour du théorème de Lagrange.

5. Lutter contre le refoulement du didactique

L'une des manifestations du refoulement du didactique, aux niveaux de l'École ou de la discipline notamment, nous paraît consister en l'attribution « au savoir » d'éléments qui sont proprement liés au processus d'étude. La TAD donne des éléments pour analyser et mettre en lumière les effets de cette contrainte, ce que d'autres élaborations théoriques, notamment les plus anciennes, ne permettent pas.

Ainsi, la différence entre *operational conception* et *structural conception* due à A. Sfard (1991), que nous avons vu M. Schneider lire comme autorisant une confusion entre OM et OD, peut être interprétée comme une tentative de mettre en lumière certains aspects mathématiques du processus d'étude mais cette tentative reste insuffisamment développée faute de se donner les moyens de penser le processus d'étude. On peut en effet y voir un repérage de la distinction entre *praxis* et *logos*, la reconnaissance du fait qu'il s'agit « des deux faces de la même pièce » et le constat que l'enseignement peine à prendre en charge cette articulation. Mais le problème de la construction d'une organisation didactique de nature à favoriser le dépassement de cet obstacle est seulement évoqué de façon allusive à la fin de l'article, et l'idée qu'il faut également constituer des organisations mathématiques adaptées à l'écologie institutionnelle totalement absente – le fait de ne pas considérer le processus historique de formation d'un concept comme un processus d'étude étant une condition invalidante à cet égard, tout comme la non prise en charge de la relativité institutionnelle de la connaissance.

Si un chercheur en didactique peut vouloir produire un modèle praxéologique à enseigner *à destination de la profession* incluant certains ingrédients de l'OD, comme par exemple certains éléments de la dialectique des médias et des milieux, la communication de ce modèle à la communauté de recherche ou la constitution d'un modèle praxéologique à enseigner destiné au chercheur nous semble devoir soigneusement distinguer ce qui relève de l'enjeu de l'étude officiel et ce qui relève de la manière de l'étudier, de façon à pouvoir débusquer le refoulement du didactique et analyser son fonctionnement : de notre point de vue, c'est à ce prix que nous aurons peut-être quelques chances d'améliorer l'existence du didactique, au sein des institutions didactiques et au-delà.

Références

Artaud, M. (1999). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. Dans M. Bailleul, C. Comiti, J.-L. Dorier, J.-B. Lagrange, B. Parzysz & M.-H. Salin (Éds), *Actes de la IXe école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 101-139). Caen : ARDM et IUFM.

Artaud, M. (2003). Analyser des praxéologies mathématiques et didactiques "à calculatrice" et leur écologie. In J.B. Lagrange, M. Artigue, D. Guin, C. Laborde, D. Lenne et L. Trouche (Éds), Intégration des Technologies dans l'Enseignement des Mathématiques, Reims.
https://halshs.archives-ouvertes.fr/edutice-00001315/document

Artaud, M. (2010). Conditions de diffusion de la TAD dans le continent didactique. Les techniques d'analyse de praxéologies comme pierre de touche. Dans A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Éds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 233-253). Montpellier : IUFM.

Artaud, M. (2011). Les moments de l'étude : un point d'arrêt de la diffusion ? Dans M. Bosch et al. (Éds), *Un panorama de la TAD* (pp. 141-162). Barcelone, Espagne : CRM.

Chevallard Y. (1996). La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. In R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (Éds), *Actes de la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques* (pp .83-122). Clermont IREM de Clermont-Ferrand.

Chevallard, Y. (2007). Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_-_Sem_nat_DDM_-_23_mars_2007.pdf

Chevallard, Y. (2008). Didactique fondamentale. Notes et documents. Leçon 2. Cours de licence de sciences de l'éducation de l'année 2007-2008. Université de Provence.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Didactique-fondamentale-2-2.pdf

Chevallard, Y. (2012). *Fondements et méthodes de la didactique*. Cours du Master de didactique des mathématiques de l'année 2011-2012. Université d'Aix-Marseille.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/FM_DM_UE35_YC_Lecons.pdf

Chevallard, Y. (2013). *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Enseignement pour le parcours « Didactique » du master « Mathématiques et applications » de l'université d'Aix-Marseille.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=219

Cirade, G. (2018). Infrastructures didactiques pour la formation des professeurs : le cas de l'étude des praxéologies d'enseignement. Citad 5.

Kim S. (2015). *Les besoins mathématiques des Non-Mathématiciens quel destin institutionnel et social ? Études d'écologie et d'économie didactiques des connaissances mathématiques.* Université Aix-Marseille (Thèse de doctorat).
http://www.atd-tad.org/documentos/les-besoins-mathematiques-des-non-mathematiciens-quel-destin-institutionnel-et-social-etudes-decologie-et-deconomie-didactiques-des-connaissances-mathematiques/

Ministère de l'éducation nationale. (2003). Documents d'accompagnement des programmes. Mathématiques. École primaire. Collection École. Paris: CNDP.

Ministère de l'éducation nationale. (2007). *Le calcul numérique au collège.* Ressources pour les classes de collège.

http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/1/doc_acc_clg_calcul_numerique_109171
Ministère de l'éducation nationale. (2008). Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques. *Bulletin Officiel spécial n° 6 du 28 août 2008.*
http://media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf
Schneider, M. (2017). Utiliser les potentialités phénoménotechniques de la TAD : quel prix payer ? dans G. Cirade et al. (Éds) *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 157-184). https://citad4.sciencesconf.org.
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.
Winslow, C. (2008). Transformer la théorie en tâches : La transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. Dans A. Rouchier, I. Bloch (Éds.), *Perspectives en didactique des mathématiques* (Cédérom). Grenoble : La Pensée Sauvage.
Xhonneux, S. (2011). *Regard institutionnel sur la transposition didactique du Théorème de Lagrange en mathématiques et en économie* (Thèse de Doctorat). Université de Namur, Belgique.
Xhonneux, S. & Henry, V. (2012). Le théorème de Lagrange en mathématiques et en économie : une étude didactique du savoir enseigné. Dans J.-L. Dorier & S. Coutat (Éds), *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF 2012* (GT5, pp.760-771).
http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Annexe
Programmes pour vérifier l'alignement de trois points et l'équation d'une droite

Les programmes ci-après sont écrits dans le langage d'une calculatrice TI-83, dont l'usage est répandu en France dans les classes du lycée (élèves de 15 à 18 ans). Les coordonnées des points sont entrées en utilisant les matrices de façon à améliorer la lisibilité du programme.

```
Programme alignement
  Input « A= », A
  Input « B= », B
  Input « C= », C
  If A[1] = B[1] Then
   If C[1] = A[1] Then
       Disp « alignés »
   Else
   Disp « non alignés »
   End
  Else
   (B[2]-A[2])/(B[1]-A[1])→U
   If A[1]≠C[1] Then
```

```
            (C[2]-A[2])/(C[1]-A[1])→V
            If U=V Then
                Disp « alignés »
            Else
                Disp « non alignés »
            End
        Else
            Disp « non alignés »
        End
    End
```

```
Programme « équation »
    Input « A= », A
    Input « B= », B
    If A[1] = B[1] Then
      Disp « la droite a une équation de la forme x = c »
      Disp « c= », A[1]
    Else
      (B[2]-A[2])/(B[1]-A[1])→M
      A[2]-A[1]*M→P
      Disp « la droite a une équation de la forme y = mx+p »
      Disp « m= », M
      Disp « p= », P
    End
```