

Diseño de una actividad didáctica para un curso de control automático basada en modelización matemática. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico

PATRICIA GUZMÁN¹

AVENILDE ROMO²

OLDA COVIÁN³

Abstract. In this paper, we present a methodological proposal of the design of an SRP, based on the paradigm of questioning the world and inspired by the methodology for the design of didactic activities based on mathematical modeling Consuelo Macias (2012). The analysis of a course of automatic control turns out to be a key element to determine the generatrix question that motivates the SRP. The analysis a priori shows the form in which the students might develop three stages of SRP and to use the differential equations to control the speed of an engine of direct current. The methodological proposal for the design of an SRP, it is considered to be useful for the vocational training.

Resumen. En esta comunicación, se presenta una propuesta metodológica del diseño de un REI, basada en el paradigma del cuestionamiento del mundo e inspirada en la metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática Consuelo Macias (2012). El análisis de un curso de control automático resulta un elemento clave para determinar la cuestión generatriz que motiva el REI. El análisis a priori muestra la forma en que los estudiantes podrían desarrollar tres etapas del REI y utilizar las ecuaciones diferenciales para controlar la velocidad de un motor de corriente directa. La ruta metodológica para el diseño del REI, se considera útil para las formaciones profesionales.

1. La Modelización en la formación de ingenieros

En diversas formaciones de futuros ingenieros, el lugar dado a la enseñanza de las matemáticas es muy importante, se ofertan cursos de cálculo diferencial, álgebra lineal, ecuaciones diferenciales, estadística, etc. Éstos son considerados básicos, ya que permiten acceder y cursar *exitosamente* la formación de especialidad, telecomunicaciones, robótica, biomédica, etc. Henry Pollak (1988), pone en evidencia que la modelización matemática debe constituir un nuevo paradigma educativo en estas formaciones:

Antes que todo, necesitamos tener conocimiento del hecho que el pensamiento matemático, el pensamiento analítico, estructural, cuantitativo, sistemático, puede ser aplicado al mundo real y generar observaciones de gran valor; en otros términos, que la modelización matemática es posible y puede ser eficaz. (H. Pollak, 1988, p. 32)

¹ Universidad Tecnológica de Nayarit, CICATA-IPN, México – paty_lgl@hotmail.com

² CICATA, Instituto Politécnico Nacional, México – avenilderv@yahoo.com.mx

³ CICATA, Instituto Politécnico Nacional, México – nadinne.olda@gmail.com

De lo anterior, se reconoce una variedad de pensamientos asociados a la modelización matemática. Chris Bissell y Chris Dillon (2012) señalan que, desde la ingeniería, el modelo matemático ha adoptado sofisticadas formas pictóricas, requiriendo adaptaciones en las matemáticas. Un ejemplo puede encontrarse en la electrónica digital, en la que el álgebra Booleana se utiliza para crear modelos matemáticos, los cuales describen el comportamiento del circuito diseñado; la ecuación que se muestra en la figura 1, expresa la salida de un circuito digital:

$$X = ABC + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC\bar{C}$$

Figura 1. Ecuación Booleana (Bissell y Dillon, 2012, p. 51)

El modelo matemático mostrado, puede evaluarse y simplificarse por medio de una técnica visual (Mapa de Karnaugh), la cual facilita el uso del modelo, como se ilustra en la figura 2.

	$\bar{A}\bar{B}$ (00)	$A\bar{B}$ (10)	AB (11)	$\bar{A}B$ (01)
$C(1)$	0	0	1	1
$\bar{C}(0)$	0	1	1	0

Figura 2. Técnica visual, Mapa de Karnaugh (Bissell & Dillon, 2012, p. 53)

Se pueden encontrar otros ejemplos de cómo los ingenieros han adaptado los modelos matemáticos a representaciones visuales, ya sean gráficas, mapas o tablas. Esta evolución del modelo matemático brinda nuevas formas de observar el lenguaje que emplean los ingenieros sobre todo en la práctica, donde ellos se enfocan en el diseño y construcción de dispositivos, y donde el pensamiento visual puede jugar un rol muy importante, y de acuerdo con Layton (Bissell & Dillon, 2012) « desde el punto de vista de la ciencia, el diseño no es nada, desde el punto de vista de un ingeniero, el diseño lo es todo ».

Así pues, la modelización matemática es una actividad que debe estar presente en la formación de ingenieros, generando un puente entre la formación y la industria (Jofré & Lutz-Westphal, 2013). Más precisamente, en Miguel Albertí, Sergio Amat, Sonia Busquier, Pilar Romero y Juan Tejada (2013) se propone que las competencias matemáticas que la industria requiere formen parte de los programas de estudio en ingeniería, de tal manera que la combinación de las competencias específicas y transversales, permita obtener mejores profesionistas. Por su parte, Tatsien Li (2013) y Qixiao Ye (2013) sugieren que los profesores que impartan matemáticas en nivel superior se involucren en la industria y de este modo puedan proponer actividades que sean reales, atractivas y donde se ponga en práctica la formación de especialidad. Lo propuesto por T. Li y Q. Ye, sugiere poner la visión de un ingeniero para mejorar el papel de la modelización matemática en la formación universitaria.

Desde nuestro punto de vista, la formación de especialidad constituye una institución intermediaria entre la enseñanza de las matemáticas y la práctica profesional de ingenieros (Avenilde Romo, 2009). Esto debido a que al ser una institución de enseñanza puede explicitar posibles relaciones con la enseñanza de las matemáticas (conocimientos matemáticos requeridos para cursarlas) pero también elementos de la práctica profesional, ya que su rol es dotar de herramientas para la práctica. Es por ello, que en nuestra investigación se analizaron elementos de un curso de control automático (disciplina ingenieril), en particular el rol de las ecuaciones

diferenciales y la visión de un ingeniero en el diseño de controladores, la cual se ilustra más adelante.

1.1. Modelo formativo de las universidades tecnológicas en México

Las universidades tecnológicas en México trabajan bajo un modelo de competencias profesionales, los grupos no son mayores a treinta alumnos, ofrecen una atención personalizada, proporcionan servicios de tutorías y asesorías, visitas y viajes de estudios a empresas locales y foráneas; dos periodos de estadías en empresas con una duración de cuatro meses cada uno; la oportunidad de obtener una licencia profesional realizando una estancia con duración de un año en el extranjero.

Este sistema de universidades ofrece dos títulos universitarios, el primero Técnico Superior Universitario (TSU) al culminar el sexto cuatrimestre y el segundo, si se decide continuar con los estudios, al término del décimo primer cuatrimestre se otorga el título de ingeniería o de licenciatura.

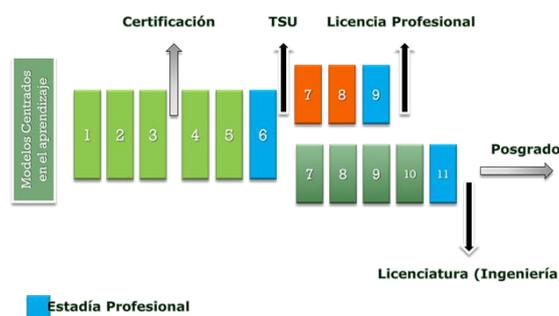


Figura 3. Formación Académica que otorga el Sistema de Universidades Tecnológicas (Coordinación General de Universidades Tecnológicas [CGUT], 2008, <http://cgut.sep.gob.mx/Areas/CoordAcademica/index.php>).

Este modelo pedagógico nació en México en 1991, considerando el modelo francés de los Institutos Universitarios de Tecnología, para crear una nueva opción de educación superior tecnológica.

El modelo de TSU, que en apariencia es reciente en México, se ha visto fortalecido por el aumento en su matrícula. De acuerdo con Pedro Flores (2009), este crecimiento se debe a la apertura de nuevas universidades tecnológicas (UT) y a que actualmente ofrecen la posibilidad de obtener una licencia profesional o bien el grado de licenciatura o ingeniería.

Para analizar este modelo y el lugar que las matemáticas ocupan, se ha elegido la carrera de ingeniería en mecánica de la Universidad Tecnológica de Nayarit (UTN).

1.2. Plan de estudios de la ingeniería en mecánica

La mecánica es la combinación de distintas ingenierías: mecánica de precisión, electrónica, informática, electricidad y control. Es una carrera de conocimientos de alta tecnología que permite desarrollar e implementar nuevos equipos y hacer más eficiente el uso de las fuentes de energía. Su propósito es el análisis, diseño y eficiencia energética de productos y de procesos de manufactura automatizados. Sus egresados serán capaces de diseñar sistemas eléctricos, mecánicos y electrónicos a través de proyectos integradores a fin de automatizar distintos procesos industriales (UTN, 2014, www.utnay.edu.mx).

En la tabla 1 se muestra el plan de estudios de ingeniería en mecánica, correspondiente a la formación de TSU.

I Cuatrimestre Matemáticas Informática Fundamentos de Estática y Dinámica Procesos Productivos Circuitos Eléctricos Inglés I Francés I Expresión Oral y Escrita I Formación Sociocultural I	IV Cuatrimestre Planos Eléctricos Técnicas de Análisis de CD y CA Potencia Eléctrica Instalaciones Eléctricas Máquinas Eléctricas Rotativas Inglés IV Formación Sociocultural IV
II Cuatrimestre Lógica de Programación Sensores Electrónica Analógica Control de Motores Eléctricos Sistemas Hidráulicos y Neumáticos Elementos Dimensionales Inglés II Francés II Formación Sociocultural II	V Cuatrimestre Luminotecnia Calidad y Eficiencia de la Energía Control Avanzado de Motores Eléctricos Subestaciones Eléctricas Energías Renovables Integradora II Inglés V Expresión Oral y Escrita II
III Cuatrimestre Sistemas de Control Automático Sistemas Digitales Controladores Lógicos Programables Sistemas Mecánicos Planeación de Proyectos de Automatización Integradora I Inglés III Formación Sociocultural III	VI Cuatrimestre Proyecto Estadía

Tabla 1. Plan Académico TSU en Mecatrónica (UTN, 2009).

La asignatura de sistemas de control automático requiere de un dominio de conocimientos matemáticos, los cuales permiten realizar el modelado de sistemas físicos. Sin embargo, la falta de disciplinas matemáticas dentro del mapa curricular ha provocado una fallida enseñanza de la materia, es por ello el interés de analizar la enseñanza de esta disciplina, situada en el tercer cuatrimestre, precedida únicamente por una asignatura de matemáticas “elementales”, en la que se estudian temas de álgebra: productos notables, factorización, ecuaciones lineales, ecuaciones simultáneas. También se estudian temas de trigonometría, números complejos, una introducción al cálculo diferencial, abordando temas relativos a funciones, derivadas y máximos y mínimos: Finalmente, dentro de la misma hoja temática (programa de estudios de la asignatura) del curso, se estudia una introducción al cálculo integral.

UNIDADES TEMÁTICAS	TEMAS	HORAS	
		Prácticas	Teóricas
Álgebra	Clasificación de los números	18	6

	Lenguaje algebraico Operaciones algebraicas Productos notables Factorización Ecuaciones lineales Solución de ecuaciones simultaneas		
Trigonometría y números complejos	Triángulo rectángulo Teorema de Pitágoras Funciones trigonométricas Números complejos	14	4
Introducción al cálculo diferencial	Funciones Concepto de derivada Reglas de derivación Máximos y mínimos	18	6
Introducción al cálculo integral	Concepto de integral Reglas de integración Integral indefinida y definida	18	6

Tabla 2. Plan de estudios asignatura Matemáticas (UTN, 2009).

Todo lo anterior es en un periodo de cuatro meses, seis horas por semana, durante quince semanas. Las asignaturas de automatización que preceden a sistemas de control automático son: sensores, control de motores, electrónica analógica. Otras materias como sistemas digitales, controladores lógicos programables se llevan a la par en el tercer cuatrimestre.

Los estudiantes no cursan ninguna asignatura de matemáticas, sino en la continuación de la ingeniería (después del sexto cuatrimestre). En este estudio nos centramos en la formación de TSU, que brinda una capacitación para el mundo laboral. El proceso de enseñanza-aprendizaje se ha intensificado para cubrir el plan académico en dos años, lo que ha derivado en que lo teórico se deje de lado en las asignaturas, concentrándose en el saber-hacer.

1.3. Sistemas de control automático, una enseñanza sin matemáticas y sus consecuencias

En esta sección se presenta el análisis de una de las asignaturas de especialidad que se imparten en el TSU en mecatrónica, sistemas de control automático. El programa para la asignatura de sistemas de control automático, de acuerdo con la hoja temática correspondiente (CGUT, 2009), está conformado por cinco unidades:

- 1.- Introducción a los sistemas de control
- 2.- Análisis de sistemas de control
- 3.- Características y modos de control
- 4.- Control aplicado a motores eléctricos CD y CA
- 5.- Control aplicado a hidráulica y neumática proporcional

En la primera unidad se describen los conceptos básicos de un sistema de control: entrada, planta, proceso, sensor, punto de suma, punto de comparación, acción de control, variable del proceso, punto de ajuste. Con lo anterior, los estudiantes deben reconocer e identificar en un diagrama o sistema físico las partes que lo conforman, así como diferenciar un sistema de lazo abierto y uno de lazo cerrado. En la unidad dos, análisis de sistemas de control, se trabaja con las ecuaciones diferenciales, ya que éstas se utilizan para representar un sistema físico, además de calcular los parámetros de la ecuación en función del tiempo y de la frecuencia para sistemas

de primer y segundo orden. Dicha tarea es muy complicada, debido a que los jóvenes desconocen qué es una ecuación diferencial y no tienen idea de cómo resolverla. En este punto la mayoría de los profesores que imparten estas asignaturas, se ven obligados a iniciar con un curso que englobe los conceptos de ecuación diferencial y que permitan comprender, qué es, cómo se resuelve y para qué se utiliza. Seguido de lo anterior el programa propone continuar con la enseñanza de la función de transferencia, su definición y la forma en que se utiliza en la modelización de sistemas físicos.

El estudiante debe ser capaz de analizar y de utilizar la función de transferencia, de localizar y encontrar los polos y ceros, esto para construir el concepto de estabilidad del sistema. La función de transferencia, como lo ilustran varios autores Katsuhito Ogata (1998), Benjamin Kuo (1996), Willian Bolton (2001), Ricardo Hernández (2010), es el elemento clave que permite encontrar la solución de las ecuaciones diferenciales que representan los sistemas físicos de control y proseguir con la obtención de sus parámetros con la ayuda de la transformada de Laplace. Continuando con la unidad dos se propone el uso de software para simular los sistemas y la siguiente secuencia de aprendizaje:

- Descripción del sistema físico
- Ecuación correspondiente al sistema físico
- Ecuación en el dominio de la frecuencia
- Función de transferencia
- Diagrama de bloques del sistema
- Gráfica de la respuesta del sistema en el dominio del tiempo ante la aplicación de diferentes señales de entrada.

Lo anterior queda propuesto para un periodo de quince horas, pero es básicamente imposible cumplirlo, por lo que ocupa casi todo el cuatrimestre. Los temas que siguen requieren que las primeras dos unidades queden muy bien cimentadas para continuar trabajando los modos de control e implementar sistemas físicos en las siguientes unidades (control de motores y control en hidráulica y neumática). Sin embargo, la falta de bases de los estudiantes así como el pobre mapa curricular en cuestiones matemáticas que ofrece la universidad, hace que sea casi imposible llegar a realizar un control físico.

Algunos efectos de la organización del curso de sistemas de control automático, es el desconocimiento de una gran cantidad de conocimientos matemáticos que se involucran en el diseño. Lo que dificulta alcanzar el objetivo final del curso, la construcción de un sistema de control para manipular la velocidad y cambio de giro de un motor de corriente directa CD. Del mismo modo, ignoran el modelo que está detrás de él, únicamente obtienen la ganancia del controlador e identifican las partes del sistema de control.

La falta de enseñanza de matemáticas antes de esta asignatura obliga a que éstas sean parte del curso, lo cual es considerado por los estudiantes alejado del modelo que propone la UT. Los estudiantes prefieren únicamente armar los circuitos, realizar las mediciones físicas y trabajar con los datos obtenidos, en vez de realizar el análisis matemático correspondiente que favorece el estudio del sistema de control. Esta problemática que parece ser particular a un sistema de formación técnico profesional, puede ser abordada a partir de la siguiente pregunta de investigación, ¿cómo diseñar una actividad didáctica basada en modelización matemática que relacione la enseñanza de las matemáticas con la enseñanza de especialidad? Así nuestro

objetivo es diseñar un dispositivo didáctico (REI, como se precisará más adelante) que relacione la enseñanza de las matemáticas con la de control automático.

2. Aspectos teóricos

La teoría antropológica de lo didáctico (TAD) propuesta por Yves Chevallard (1999), ofrece un modelo epistemológico para el análisis de la actividad humana en su dimensión institucional. La actividad matemática y el estudio de las matemáticas están situados en el conjunto de actividades humanas desarrolladas en el marco de instituciones sociales.

Las instituciones, es decir, organizaciones sociales estables, enmarcan las actividades humanas y simultáneamente las hacen posibles por los recursos que estas instituciones ponen a disposición de sus sujetos. Estos recursos materiales e intelectuales han sido producidos por comunidades, a lo largo de procesos de enfrentamiento a situaciones problemáticas, para resolverlas con regularidad y eficacia. (Castela & Romo, 2011, p. 85).

Dentro de la institución formación profesional consideramos que la enseñanza de las matemáticas es una institución $E(M)$ y la enseñanza de especialidad, control automático $E(DI)$ es otra institución, lo que pretendemos en nuestra investigación es relacionar estas instituciones a través de una actividad didáctica. La actividad es vista en esta teoría a través de la praxeología $[T, \tau, \theta, \Theta]$, sus cuatro componentes son: tipo de tarea T , técnica τ , tecnología θ y teoría Θ . La tarea es lo que se hace, la técnica es la manera en que se hace, la tecnología es un discurso que produce, justifica y explica la técnica, la teoría a su vez produce, justifica y explica la tecnología. Las praxeologías de modelización matemática pueden ser producidas a través de un *recorrido de estudio e investigación* (REI), el cual se enmarca en el paradigma educativo del *cuestionamiento del mundo*, para dar sentido al estudio escolar de las matemáticas en su conjunto.

La indagación dirigida por x sobre Q abre un camino llamado recorrido de estudio e investigación. Para avanzar por este camino, el equipo de indagación X tiene que utilizar el conocimiento —relativo a las respuestas R^\bullet , así como a las obras O — hasta entonces desconocido para sus miembros, con el cual el equipo deberá familiarizarse para poder continuar por el camino hacia la respuesta R^\heartsuit (Chevallard, 2012, p. 170).

En este sentido el REI se centra en el estudio prolongado de preguntas vivas, es decir, que requieran como respuesta la construcción de toda una secuencia de praxeologías completas y articuladas. Para poder realizar una actividad con el REI, no se debe perder de vista que éste viene generado por el estudio de una cuestión viva y con fuerte poder generador, capaz de imponer un gran número de cuestiones derivadas (Chevallard, 2006). Así, debemos pensar en una primera cuestión capaz de generarlo, ésta se conoce como cuestión generatriz C , su estudio da lugar al planteo de muchas nuevas cuestiones derivadas, conduce a la búsqueda de respuestas provisionales (R^\bullet) y, con ello, a la construcción de un gran número de saberes, impulsando y provocando todo el proceso de estudio del proyecto. De este modo, durante la evolución de un REI el cuestionamiento de las respuestas provisionales que se van obteniendo, se incorpora en todo momento a la actividad de modelización para obtener la respuesta adecuada o considerada como la más óptima por la comunidad de estudio R^\heartsuit .

3. Metodología

Para el diseño de un REI que posibilite una actividad de modelización matemática relacionada con el control automático, nos inspiramos en la metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática, propuesta por C. Macias (2012) y refinada en C. Macias y A. Romo (2014). Sus cuatro fases son: elección de un contexto extra-matemático, análisis praxeológico e identificación de un modelo matemático, análisis del modelo matemático identificado y su relación con la enseñanza de las matemáticas $E(M)$ y el diseño de la actividad didáctica para $E(M)$. En nuestro caso las tres primeras fases permitieron identificar la pregunta generatriz y la última fase se adaptó para el diseño del REI y su implementación. Por lo que, las fases metodológicas que conforman esta investigación son:

- 1.- Elección de un contexto extra-matemático: teoría de control
- 2.- Análisis praxeológico e identificación de modelos matemáticos
- 3.- Análisis de las ecuaciones diferenciales y la función de transferencia y su relación con $E(M)$
- 4.- Diseño de un REI de control: definiendo la cuestión generatriz

3.1. Elección de un contexto extra-matemático: control automático

En esta fase se propone elegir un contexto ingenieril para analizar praxeologías de modelización. Se ha elegido analizar el control automático o teoría de control, ya que en ésta se estudian los controles automáticos que son diseñados por los técnicos universitarios o por los ingenieros. Los conocimientos de la teoría de control proporcionan una base para entender el comportamiento de los sistemas dinámicos (Pérez, Pérez & Pérez, 2008). Para Jorge Gil y Ángel Díaz (2010) dentro de la teoría de control se formulan leyes matemáticas para el gobierno de sistemas físicos conforme a una serie de requerimientos o especificaciones.

3.2. Análisis praxeológico e identificación de modelos matemáticos

El análisis praxeológico se centra en el bloque tecnológico-teórico, con el objetivo de identificar los modelos matemáticos utilizados en el estudio de sistemas físicos y más precisamente de los *sistemas eléctricos*.

Los sistemas eléctricos se describen a partir de tres parámetros básicos, que son elementos pasivos fundamentales de un circuito eléctrico: resistencia, capacitor e inductor. Para analizarlos, es necesario emplear la ley de Ohm, en ocasiones es posible que esta sea insuficiente y sean necesarias las leyes de Kirchoff. De acuerdo con la ley de Ohm, el voltaje a través de una resistencia es directamente proporcional a la intensidad que fluye en ella, obteniendo el siguiente modelo:

$$v(t) = Ri(t)$$

Donde:

$v(t)$ es el voltaje y se mide en volts (V)

R es la resistencia y se mide en ohms (Ω)

$i(t)$ es la intensidad de corriente y se mide en amperes (A)

El modelo hace referencia al voltaje en una resistencia, para un inductor la diferencia de potencial (voltaje) a través de éste en cualquier instante depende de la tasa de cambio de la corriente que fluye en él:

$$v(t) = L \frac{di}{dt}$$

Donde:

$v(t)$ es el voltaje y se mide en volts (V)

L es el inductor y se mide en henrios (H)

$\frac{di}{dt}$ es la tasa de cambio de la intensidad de corriente y se mide en amperes (A)

Para un capacitor la diferencia de potencial depende del cambio de carga (q), entre las capas del capacitor en el instante deseado:

$$v = \frac{q}{C}$$

Donde C es la capacitancia (capacidad de almacenamiento de carga eléctrica), la corriente que circula en el capacitor es la tasa de cambio con la cual se mueve la carga hacia las placas:

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

Entonces la carga total de q en las cargas se describe como:

$$q = \int idt$$

Por tanto, la ecuación del voltaje en el capacitor se puede escribir como:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int idt$$

El sistema eléctrico básico se muestra en la figura 4, sus parámetros y características pueden describirse empleando la ley de Kirchoff.

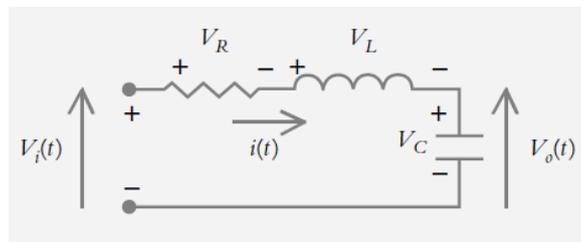


Figura 4. Circuito RLC (Hernández, 2010, p. 77)

Un sistema de control se modela a través de ecuaciones diferenciales que permiten representar un fenómeno físico, permitiendo analizar cuantitativamente el sistema, determinar sus características, su comportamiento y sus limitaciones. De igual modo, permite buscar alternativas para mejorar el funcionamiento del sistema. Para obtener el modelo matemático de un sistema es necesario emplear las leyes físicas que lo rigen. Por ejemplo, el sistema eléctrico que se muestra en la figura 5, resistencia- inductor-capacitor (RLC), cada uno de sus componentes ya tiene definido su modelo por la ley de Ohm (como se mostró en el apartado de sistema eléctrico).

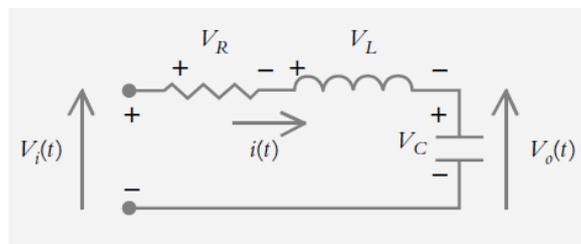


Figura 5. Circuito RLC (R. Hernández, 2010, p. 77).

La entrada de este sistema se define por el voltaje de alimentación, que de acuerdo con la ley de voltajes de Kirchoff (LVK) es igual a la suma individual de los componentes conectados en serie. La salida del sistema se marca como el voltaje del capacitor. Por lo tanto, la entrada $V_i(t)$ y la salida $V_o(t)$ queda definida como:

$$V_i(t) = V_R + V_L + V_C$$

$$V_o(t) = V_C$$

Se reescribe la entrada y la salida del sistema. Usualmente en la teoría de control, se utilizan tablas que muestran el modelo matemático de los componentes. Para los sistemas eléctricos es común ver la siguiente tabla:

Elemento	Modelo (voltaje)	Modelo (Intensidad)
Inductor	$V = L \frac{di}{dt}$	$i = \frac{1}{L} \int v dt$
Capacitor	$V = \frac{1}{C} \int i dt$	$i = C \frac{dv}{dt}$
Resistencia	$V = Ri(t)$	$i = \frac{v(t)}{R}$

Tabla 3. Modelos matemáticos de los elementos de un sistema eléctrico

Reescribiendo la entrada y la salida del sistema eléctrico:

$$V_i(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

$$V_o(t) = \frac{1}{C} \int i dt$$

Una vez establecida la ecuación diferencial de la función de entrada y de la función de salida, se establece la función de transferencia o ganancia:

$$FT = G = \frac{\frac{1}{C} \int i dt}{Ri(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt}$$

Función de transferencia (FT)

La relación entre la entrada y la salida del sistema se conoce como ganancia o función de transferencia (FT) y se expresa así:

$$FT = G = \frac{\text{ecuación diferencial de la salida}}{\text{ecuación diferencial de la entrada}}$$

$$FT = G = \frac{b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)}{a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t)}$$

W. Bolton (2001), define la FT como el cociente de la salida en estado estable entre la entrada en estado estable para un sistema o subsistema. De acuerdo con M. Pérez et al. (2008), la FT está definida solamente para sistemas lineales, invariantes en el tiempo, monovariantes y de parámetros concentrados. La FT es un modelo matemático que permite relacionar la variable de salida con la variable de entrada de un sistema. Tratar de encontrar la FT involucrando derivadas e integrales es muy complejo. Por esta razón se aplica la transformada de Laplace a la variable de entrada y a la variable de salida.

Transformada de Laplace

La técnica basada en la transformada de Laplace es una herramienta matemática utilizada para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y lineales en la teoría de control. Este uso se debe a que la FT de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial lineal, e invariante en el tiempo, se define una vez aplicada la transformada de la manera siguiente: el cociente entre la transformada de Laplace de la salida o respuesta del sistema y la transformada de Laplace de la entrada o función de excitación, bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero. Además, de acuerdo a Stuart Bennett (1996) en la historia del control automático muchos

ingenieros optaron por tomar este enfoque, porque muestra el comportamiento en términos reales, es decir, el comportamiento del sistema en función del tiempo.

Continuando con el ejemplo del sistema eléctrico, se ha establecido la siguiente FT:

$$FT = G = \frac{\frac{1}{c} \int idt}{Ri(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} \int idt}$$

Para la entrada como la salida, debe aplicarse la transformada de Laplace, quedando:

$$FT(s) = G(s) = \frac{\frac{1}{Cs} I(s)}{RI(s) + LsI(s) + \frac{1}{Cs} I(s)}$$

Una vez que la FT se encuentra en términos de Laplace, es posible realizar una manipulación algebraica, que simplifique la ganancia del sistema, quedando:

$$FT(s) = G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Esta última ecuación permite identificar todas las características del sistema. Por ejemplo, se puede identificar que el sistema es de segundo orden (por el grado de la variable s), que no tiene ceros (no hay variable s en el numerador), que hay dos polos (por el grado de la variable s en el denominador). Además la identificación de los polos en el plano cartesiano (raíces del denominador) permite determinar la estabilidad del sistema (estable si se ubican al lado izquierdo del plano cartesiano) e incluso la salida del sistema sin necesidad de recurrir a la transformada inversa de Laplace.

3.3. Análisis de las ecuaciones diferenciales y la función de transferencia, así como su relación con $E(M)$

En un curso ordinario de ecuaciones diferenciales se presentan diferentes técnicas para resolverlas. En la teoría de control sólo se emplea la técnica basada en la transformada de Laplace, donde no se requiere probar su existencia ni ningún otro elemento tecnológico. Es muy común emplear tablas donde aparecen las transformadas de Laplace de diversas funciones, como se muestra en la tabla 4.

Transformada de Laplace	Función del tiempo
$F_1(s) + F_2(s)$	$f_1(t) + f_2(t)$
$aF(s)$	$af(t)$
$sF(s) - f(0)$	$\frac{d}{dt}f(t)$
$s^2F(s) - sf(0) - \frac{df(0)}{dt}$	$\frac{d^2}{dt^2}f(t)$
$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - \frac{d^{n-1}f(0)}{dt^{n-1}}$	$\frac{d^n}{dt^n}f(t)$
$\frac{1}{s}F(s)$	$\int f(t)$

Tabla 4. Transformadas de Laplace para las funciones de tiempo más comunes dentro de la teoría de control

De igual forma, en un curso de ecuaciones diferenciales, se suele enseñar la transformada inversa de Laplace y en cursos más teóricos se prueba su existencia. En el control automático no es necesario probar su existencia, ya que sólo se transforman ecuaciones, para las cuales existe la transformada inversa. Para *facilitar* el uso de la técnica, se utiliza una tabla de las transformadas inversas de Laplace más comunes.

3.4. Diseño de un REI de control: definición de la cuestión generatriz

Los análisis desarrollados en las tres fases anteriores, nos han posibilitado para definir una cuestión generatriz:

¿Cómo realizar el control de velocidad proporcional analógico de un motor de Corriente Directa?

Tomando en cuenta las restricciones que tiene el control clásico, sólo se puede trabajar con ecuaciones diferenciales ordinarias. Por lo que, se restringe la actividad de control al uso de la acción de control proporcional, con posibilidad de emplear el control integral, derivativo y sus combinaciones. Esta restricción pareciera contraponerse a la naturaleza del REI, sin embargo, plantear la cuestión generatriz dentro de un proyecto de ingeniería, le devuelve su esencia de libertad, pues en un proyecto, siempre hay restricciones puestas por la empresa, desde lo económico hasta ciertos elementos que deben ser empleados.

De este modo, se plantea una pregunta que involucra el control clásico, con alguna de sus tres acciones de control, y empleando elementos analógicos. Estos últimos permiten el uso de los sistemas físicos y de su descripción por medio de las ecuaciones diferenciales, con base en la ley de Ohm.

La cuestión generatriz debe favorecer que el estudiante emplee el uso de la ecuación para describir al controlador a utilizar, y de este modo pueda diseñarlo empleando el concepto de función de transferencia o ganancia, y la técnica de la transformada de Laplace que permite su solución.

De esta manera, se propuso la situación problemática que enmarca la cuestión generatriz:

REI diseño de un control de velocidad proporcional de un motor de CD

La empresa Truper fabricante de una amplia gama de material de ferretería y línea de herramientas mecánicas y eléctricas, es muy reconocida por los más de 5000 productos que ofrece en el mercado. Algunos de los productos de su gama eléctrica son taladros, dremel y destornilladores. Uno de los factores que hacen que esta empresa sea la más reconocida en el mercado ferretero en México es que está en constante renovación. De hecho, un equipo de innovación de Truper nos ha contactado para generar un nuevo destornillador, solicitándonos el diseño de control de velocidad proporcional analógico para un motor de corriente directa (CD) de imanes permanentes de 5V a 12V, pues desean que el destornillador sea activado por medio de baterías de CD con las siguientes especificaciones:

- Que sea económico
- De simple mantenimiento
- De fácil montaje en un área pequeña
- Posibilidad de mejora (por ejemplo, inversión de giro, tiempo de respuesta, entre otros)

Este REI parte de una cuestión de estudio que involucra mayormente el control automático, y una actividad ingenieril de automatización, que genera el proceso de estudio y que se considera presentará un conjunto de praxeologías relativamente completas y articuladas.

Además, su estudio se realizará por equipos de estudiantes, quienes serán los responsables del mismo. La dialéctica de medios y medias, asociada a los REI's, les permitirá validar sus respuestas, explicar y evaluar su proceso de modelización, y quizá institucionalizar, para encontrar la respuesta más adecuada a la problemática que se les solicita. De igual forma, la

dialéctica preguntas y respuestas, será la protagonista de este proceso, ya que permitirá a los estudiantes continuar investigando y validando la información.

Para proponer y analizar la viabilidad del REI, se identifican dos contextos de la formación, cercanos a la práctica profesional de los ingenieros, el área de proyectos de innovación y de mejora continua así como la estadía en empresas. En el primero, generalmente un grupo de ingenieros, ante ciertas necesidades y problemáticas detectadas proponen por medio de la investigación, proyectos que ayuden a subsanarlas. El trabajo en equipo es muy común, la discusión, la lluvia de ideas y el debate son acciones que dan paso al planteamiento de cuestiones “vivas” del tipo: ¿cómo realizar?, ¿cómo diseñar?, ¿cómo mejorar?, ¿cómo obtener?, entre otras. En el segundo, la estadía, que forma parte de su primera formación como TSU, se realiza en una empresa local, nacional o incluso internacional, para la cual deben proponer un proyecto que mejore, innove o bien solucione una problemática que se presente en el momento en que ellos están como prestadores de servicio.

El REI diseño de un control de velocidad proporcional de un motor de CD, se desarrolla de manera muy similar a un proyecto de mejora. El rol del profesor es el de un asesor académico y empresarial, que examina las propuestas entregadas en las fases e interroga sobre la validez y viabilidad de la propuesta. Dada la naturaleza del REI, es difícil decir qué y cómo va a suceder, pero considerando que el REI comparte muchos elementos de los proyectos de ingeniería que se desarrollan en las empresas, se puede tomar el rol de ingeniero experto, responsable del proyecto para proponer un posible desarrollo del REI. A partir de este primer análisis, simulando este comportamiento, se han propuesto tres etapas para desarrollar el REI, que enuncian y detallan a continuación.

Etapas 1. Investigación para atender la demanda. En esta etapa se espera que los estudiantes investiguen sobre cómo controlar el motor. Lo que puede llevarlos a encontrar nociones de control, como son lazos de control, elemento controlador, qué es y cómo se diseña el control proporcional de acuerdo a determinadas características. Al final de esta fase, deben entregar un documento en el que se detalle una pre-propuesta con la información para realizar un control de velocidad proporcional para un motor de CD.

Etapas 2. Selección del controlador. Se considera que en esta etapa tendrá lugar el análisis, la selección y un primer trabajo con el controlador que será empleado. Esto involucrará muy posiblemente la exploración de un modelo matemático asociado al controlador y la realización los cálculos para seleccionar los elementos electrónicos que lo componen. El documento que se entregue al final de esta etapa debe mostrar el diseño del control proporcional, con los elementos y dispositivos seleccionados para la construcción.

Etapas 3. Construcción de prototipo. Se espera que se construya y pruebe físicamente el control de velocidad del motor, de tal forma que puedan utilizar las respuestas a las subcuestiones generadas en las etapas anteriores; argumentando el diseño del control, comparando con los datos obtenidos de manera virtual (software de simulación de circuitos electrónicos) y física. Esta tercera etapa debe concluir con la entrega del prototipo funcionando.

4. Un esbozo del REI inspirado en un análisis a priori

Dada la naturaleza abierta del REI *control de velocidad proporcional de un motor de CD* es difícil realizar un análisis a priori, pero asumiendo el rol de ingeniero experto (como es el caso

de la primera autora), es posible esbozar, las preguntas que pueden aparecer en las etapas 1, 2 y 3 del REI.

4.1. Etapa 1

Los equipos de estudiantes, en la búsqueda de la respuesta a la cuestión generatriz, pueden encontrar más de una técnica para llegar a lo que se pide, entre éstas es posible omitir el modelo matemático (ecuaciones diferenciales). En ese caso podría recurrir al uso de modelos matemáticos asociados al álgebra Booleana, que en apariencia son más sencillos. Los estudiantes deberán probar la pertinencia de estos modelos considerando las características específicas de la demanda de la empresa, y que se piden:

La empresa Truper les pide realizar el diseño de **control de velocidad proporcional analógico** para un motor de CD de imanes permanentes de 5V a 12V, pues desean que el desatornillador sea activado por medio de baterías de CD.

Figura 6. Tipo de control que se pide en el proyecto

En la tabla 5 se presentan posibles cuestiones y subcuestiones relativas al desarrollo de esta etapa.

C₀ ¿Cómo realizar el control de velocidad del motor de CD del destornillador?

C₁ ¿Cuáles son los fundamentos y aspectos para realizar el control proporcional?

C_{1,1} ¿Qué es control?

C_{1,2} ¿Qué son los lazos de control y de cuántos tipos hay?

C_{1,3} C_{1,3,1} ¿Qué es el elemento controlador?

¿Cuáles son los elementos del control?

C_{1,3,2}

¿Cómo realiza la acción el controlador?

C_{1,3,2,1}

¿Tipos de control?

C_{1,3,2,1,1}

¿Qué es el control proporcional?

C_{1,3,2,1,1,1}

¿Cómo se define su señal de error?

C_{1,3,2,1,1,2}

¿Cómo se define su función de transferencia?

C_{1,3,2,1,2}

¿Qué es el control digital?

C_{1,3,2,1,2,1}

¿Qué elementos forman parte del control digital?

C_{1,3,2,1,2,2}

¿Cómo variar velocidad por medio de ancho de

- pulso?
- C_{1,3,3} ¿Cómo se realiza la acción del control de velocidad en un motor?
- C_{1,3,4} ¿Qué es la función de transferencia?

Tabla 5. Posible REI para el control de velocidad proporcional de un motor de CD

La cuestión C_{1,3,2,1} podría permitir llegar al concepto de control proporcional y a los elementos teóricos que forman parte de éste. Para realizarlo, podrían contribuir las cuestiones C_{1,3,2,1,1}, C_{1,3,2,1,1,1} y C_{1,3,2,1,1,2}.

Esta primera etapa, será realizada por futuros ingenieros mecánicos, quienes tienen alguna noción sobre el control, pero es posible que aún no tengan un concepto unificado entre ellos, o que éste sea muy parcial. Así pues, se espera que cada equipo realice una investigación sobre lo que es control, lazos de control, elementos que lo forman, qué es el elemento controlador, tipos de control, características de cada uno de ellos, así como definición de sus señales de error, de función de transferencia y las características de los niveles de voltaje que se manejan. Por lo tanto, se requiere trabajar bajo un modelo matemático que les ayude a manipularlo y a tomar las decisiones que aumenten o disminuyan la velocidad del motor.

Sin embargo, es posible que los estudiantes al observar que se enfrentan a un modelo matemático complejo, que involucra ecuaciones diferenciales, decidan tomar otro camino y argumentar las ventajas de este nuevo modelo.

Así que, para este posible camino, el REI puede seguir en la cuestión C_{1,3,2,1} ¿Cuáles son los tipos de control? Dando paso a C_{1,3,2,1,2}, C_{1,3,2,1,2,1} y C_{1,3,2,1,2,2}.

Cabe mencionar, que la variación de velocidad por medio de ancho de pulso (C_{1,3,2,1,2,2}), que usualmente es la técnica más empleada en el control con elementos digitales, está asociada a un modelo matemático, el cual emplea la ley de Ohm y el concepto de la constante τ , que se conoce como el tiempo de descarga de un capacitor.

De igual forma, aunque se espera que los estudiantes realicen una investigación sobre control, existe la posibilidad de que sólo busquen un circuito que cubra el control de velocidad de un motor de CD, dejando de lado todas las condiciones de la demanda empresarial. Esto, porque cuando se pide esta “clase de proyectos” en la formación, no se pide que se argumente el diseño que entregan, sólo que se garantice el funcionamiento. Las matemáticas que podrían emplearse en su justificación se convierten en un mero pretexto para observar las “aplicaciones” que pueden tener.

Tomando en cuenta esta última opción, es posible que la pregunta C_{1,1}, cambie a ¿Cuáles circuitos realizan control de velocidad?, quedando para la primera etapa el siguiente recorrido:

- C_{1,1} ¿Cuáles circuitos realizan control de velocidad?
- C_{1,2} ¿Cómo funcionan los circuitos?
- C_{1,3} ¿Qué elementos y dispositivos electrónicos los integran?

Lo anterior, cierra toda posibilidad del uso de un modelo matemático, puede dejar fuera las leyes físicas que rigen el comportamiento del diseño, pues como ya se ha comentado existe la posibilidad de que al observar las matemáticas decidan tomar una ruta “rápida”. Dicha ruta podría inhibir sus nuevas responsabilidades como “investigadores”, encontrando respuestas que integren y a su vez permitan generar nuevas cuestiones que enriquezcan el conocimiento que puede estar en producción. Para evitar lo anterior, y asegurar que se trabaje con el tipo de control pedido, el profesor fungirá como el gerente encargado del proyecto, revisará cada

propuesta y dará puntos de mejora, observaciones e incluso cuestionará cada elección, asumiendo su rol de director que gestiona el proceso. En consecuencia, podrán aparecer nuevas preguntas, y por lo tanto los estudiantes tendrán que indagar para encontrar nuevas respuestas (R^*) que den paso a la construcción de la respuesta adecuada (R^*). De ese modo, se trata de asegurar que en la segunda etapa se trabaje con el control pedido, cómo y por qué se llegó a él y fundamentar por qué su diseño encaja con el que solicita la empresa Truper.

4.2. Etapa 2

La etapa 2 puede tener como principal objetivo el diseño del controlador. Los estudiantes, en su nuevo rol como investigadores, propondrán el paso a seguir, eligiendo los *media* necesarios y seleccionando los *medios*, tal y como lo hacen los ingenieros dentro del área de innovación.

De acuerdo a la experiencia como asesor académico, los estudiantes suelen controlar el proceso de estudio, considerando los tiempos establecidos para la entrega de avances y del proyecto final. Aunque se espera que para esta etapa ellos comiencen a trabajar con el modelo matemático que describe el comportamiento del elemento controlador, se pretende que cada equipo de cuatro personas genere su propuesta y esta se ponga en discusión con los otros equipos; pues se desea que entre ellos se organicen para entregar un solo diseño (ver Figura 7).

Como parte de sus procesos de mejora continua, actualmente está trabajando en el diseño de un nuevo destornillador, han pedido a la Universidad Tecnológica de Nayarit, que los alumnos del área de TSU en mecatrónica sean parte del nuevo proyecto, esperando encontrar ideas frescas y funcionales.

Figura 7. Petición de la empresa.

Cada equipo podrá cuestionar el diseño propuesto por los otros y el « gran equipo » podrá generar más cuestiones e incluso integrar mejoras al control propuesto, atendiendo así la solicitud de la empresa Truper.

Como parte de su diseño debe considerar las siguientes especificaciones:

- Económico
- Simple mantenimiento
- Fácil montaje en un área pequeña
- Posibilidad de mejora (por ejemplo inversión de giro, tiempo de respuesta, entre otros)

Figura 8. Consideraciones pedidas por la empresa

Tratar de determinar un posible REI para esta sección se vuelve muy complicado. Se espera que los estudiantes analicen, argumenten y justifiquen dentro de cada equipo y con los otros equipos, antes de tomar una decisión sobre el diseño del controlador. A pesar de que ello es difícil, pues se les ha dado toda la libertad de organizarse del modo que consideren más conveniente.

Por lo cual la segunda etapa del REI, el cuestionamiento C_2 , $C_{2,1}$, $C_{2,2}$... y los que se desprendan de él y unan con la rama de las cuestiones C_1 , se conocerán hasta la implementación de la actividad, y es posible que estos sean distintos en cada equipo.

4.3. Etapa 3

Se espera que en la etapa 3 se trabaje sobre la construcción del prototipo. Al igual que en la etapa 2, esta etapa será definida por los estudiantes. Sin embargo, es probable que una vez realizada la investigación teórica y la selección del controlador, se empiecen a hacer pruebas en

el software de simulación de circuitos, a comparar los cálculos realizados con la información que puedan obtener de las simulaciones y a realizar de manera física el prototipo que entregarán.

Para esta última parte, la tarea diseñar el control de velocidad proporcional para el destornillador ya habrá derivado en diferentes caminos, pues realmente los estudiantes no conocen una técnica que les permita efectuar la petición de la empresa Truper. Así pues, la cuestión problemática evolucionará desde ¿Cómo determinar el diseño? a ¿Cómo determinar si éste es proporcional? e incluso a ¿Cómo determinar si los elementos elegidos son los adecuados? Dando paso a la necesidad de elaborar una técnica que permita resolver la tarea y justificarla (producir la tecnología). Esto, puede posibilitar propuestas de mejora: la inversión de giro, la sintonización del control proporcional o incluso algún equipo que llegue al control proporcional-integral-derivativo (PID). Este último se considera como óptimo dentro de la teoría de control, pues evita los errores que puede provocar el control proporcional cuando está solo.

5. Conclusiones

En esta comunicación se ha presentado el análisis realizado para la definición de una cuestión generatriz que, al abordarla, las ecuaciones diferenciales sean utilizadas como modelos matemáticos bajo las condiciones de la teoría de control. El diseño del REI se inspira en la metodología propuesta en C. Macias (2012) y permite definir la cuestión ¿Cómo realizar el control de velocidad proporcional analógico de un motor de Corriente Directa? Que debe ser estudiada por equipos de estudiantes que son parte del gran equipo (clase entera) para hacer una única propuesta a la empresa Trupper, señalada como la que hace la demanda del control de velocidad del motor de corriente directa.

A pesar de que este trabajo está motivado por una problemática muy precisa de la Universidad Tecnológica de Nayarit, consideramos que puede ser útil para otras formaciones, ya que en el REI diseñado se establece una relación entre lo matemático y lo no matemático (conocimientos de ingenieriles y prácticos) a través de la actividad de modelización. En muchas formaciones se asume que la enseñanza de modelos, nociones y técnicas matemáticas es suficiente para que los estudiantes puedan convertirlas en herramientas generales que permitan resolver una diversidad de problemas. Desde nuestro punto de vista, esto no es posible, la actividad de modelización matemática se genera bajo condiciones precisas y es necesario conocerlas, explicitarlas y hacerlas parte de la enseñanza de las matemáticas. Para ello, resulta necesario analizar los contextos de ingeniería donde la modelización tiene lugar, ya sean de enseñanza de especialidad, por ejemplo, teoría de control, o de una práctica profesional. Se reconoce que la participación de un experto en el área de la ingeniería en el diseño del REI y su implementación garantiza la presencia de la lógica de la modelización matemática en ingeniería. Esto implica la conformación de un equipo multidisciplinario, que suele ser complejo, pero garantiza el establecimiento de una relación más sólida entre la enseñanza de la ingeniería y de las matemáticas.

Referencias

Albertí, M. Amat, S. Busquier, S. Romero, P. & Tejada, J. (2013). Mathematics for engineering and engineering for mathematics. (English). En A. Damlamian, J. Rodrigues & R. Sträber

- (Eds.), *Educational interfaces between mathematics and industry* (Vol. 16 pp. 185-198). Report on an ICMI-ICIAM-study. The 20th ICMI study. Cham: Springer (ISBN 978-3-319-02269-7/hbk; 978-3-319-02270-3/ebook).
- Bennett, S. (1996). A brief history of automatic control. *IEEE Control Systems Magazine*, 16(3), 17-25.
- Bissell, C. & Dillon, C. (2012). *Ways of thinking, ways of seeing: Mathematical and other Modelling in Engineering and Technology*. Automation, Collaboration and e-Services, 1. Berlin: Springer.
- Bolton, W. (2001). *Ingeniería de control* (2ª ed.). México D.F.: Alfaomega.
- Castela, C. & Romo, A. (2011). Des mathématiques a l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(1), 79-130.
- Chevallard, Y. (1999). La recherche en didactique et la formation des professeurs : problématiques, concepts, problèmes. En J.L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot y R. Floris (Eds.), *Actes de la X Ecole d'été de Didactique* (pp. 98-112). Francia: Académie de Caen.
- Coordinación General de Universidades Tecnológicas (2008). *Fortalecimiento del subsistema de universidades tecnológicas "su evolución al nivel de estudios 5A"*. <http://cgut.sep.gob.mx/Areas/CoordAcademica/FSUTcgut.pdf>
- Flores, P. C. (2009). *Trayectoria del Modelo de las Universidades Tecnológicas en México (1991-2009)*. Serie Cuadernos de Trabajo, UNAM, México, D. F., (pp. 1-76).
- Gil, N. & Díaz-Cordovés, A. (2010). *Fundamentos de Control automático de Sistemas Continuos y Muestreados*. San Sebastián: Unicopia.
- Hernández, R. (2010). *Introducción a los sistemas de control: conceptos, aplicaciones y simulación con MATLAB*. México: Pearson Educación.
- Jofré, A. & Lutz-Westphal, B. (2013). The mathematics-industry interface. (English). En A. Damlamian, J. Rodrigues & R. Sträber (Eds.), *Educational interfaces between mathematics and industry* (Vol. 16 - pp. 397-400). Report on an ICMI-ICIAM-study. The 20th ICMI study. Cham: Springer (ISBN 978-3-319-02269-7/hbk; 978-3-319-02270-3/ebook).
- Kuo, B. (1996). *Sistemas de control automático* (7ª ed.). México: Prentice Hall.
- Macias, M. (2012). *Uso de las nuevas tecnologías en la formación matemática de ingenieros*. Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México.
- Macias, M. & Romo, A. (2014). Metodología para el diseño de actividades didácticas basadas en modelización matemática. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 461-469). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Ogata, K. (1998). *Ingeniería de control moderna* (3ª ed.). México: Prentice Hall.
- Pérez, M. Pérez, A. y Pérez, E. (2008). *Introducción a los sistemas de control y modelo matemático para sistemas lineales invariantes en el tiempo*. Facultad de Ingeniería, Departamento de Electrónica y Automática. Universidad de San Juan.
- Pollak, H. (1988). Mathematics as a service subject: why? En A. Howson, J. Kahane, P. Lauginie, & E. Turckheim (Eds.), *Mathematics as a service subject* (pp. 28-34). Great Britain: Cambridge University Press.

- Romo-Vázquez, A. (2009). *Les mathématiques dans la formation d'ingénieurs*. Paris: IREM de Paris.
- Tatsien, L. (2013). Mathematical Modeling Education is the Most Important Educational Interface Between Mathematics and Industry. (English). En En A. Damlamian, J. Rodrigues & R. Sträber (Eds.), *Educational interfaces between mathematics and industry*. (Vol. 16, pp. 51-58). Report on an ICMI-ICIAM-study. The 20th ICMI study. Cham: Springer (ISBN 978-3-319-02269-7/hbk; 978-3-319-02270-3/ebook).
- Universidad Tecnológica de Nayarit. (2009). *Hoja de asignatura temática*. México: Autor.
- Universidad Tecnológica de Nayarit. (2014). *Historia, valores, vinculación y carreras impartidas*.
<http://www.utnay.edu.mx/modeloeducativo.html>
- Ye, Q. (2013). Incorporating the ideas and methods of mathematical modeling into calculus teaching. En En A. Damlamian, J. Rodrigues & R. Sträber (Eds.), *Educational interfaces between mathematics and industry*. (Vol. 16, pp. 385-394). Report on an ICMI-ICIAM-study. The 20th ICMI study. Cham: Springer (ISBN 978-3-319-02269-7/hbk; 978-3-319-02270-3/ebook).