EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i5p230-245

A orquestração instrumental de uma situação matemática para o EFII

Orchestration instrumental of a mathematical situation for EFII

SONIA BARBOSA CAMARGO IGLIORI[1]
MARCIO VIEIRA DE ALMEIDA[2]

Resumo

Este artigo apresenta uma pesquisa destinada à formação de professores do EFII. Essa formação foi concebida para tratar da relação professores, estudantes e tecnologia sob a lente teórica da orquestração instrumental. Para isso foram elaborados uma situação matemática envolvendo a problemática do teorema de Euler para poliedros e recursos construídos com o software GeoGebra. Foram também propostas orquestrações instrumentais para orientar o desenvolvimento da situação matemática. Os procedimentos metodológicos foram levantamento bibliográfico, leituras e análises, internos a uma pesquisa teórica. O objetivo da pesquisa foi apresentar uma proposta de ensino, contendo recursos digitais para abordar um conteúdo de geometria espacial para o ensino fundamental II e com um modo de exploração desses recursos suportado em uma teoria da educação matemática. Consideramos que o resultado atende esse objetivo, pois a situação possibilita a exploração de vários conceitos matemáticos e a formação de atitudes frente a esses conhecimentos, os recursos são suficientemente ricos para auxiliar a condução da situação matemática e as propostas de orquestração complementam as ideias dos autores para a formação pretendida. Além disso possibilita a divulgação da orquestração instrumental entre formadores de professores de matemática da educação básica, comunidades de prática de professores e entre professores em formação, pois será disponibilizado no espaço digital ensinodematematica.com.

Palavras-chave*: formação de professores. ensino fundamental II. teorema de Euler para poliedros. pesquisa teórica. orquestração instrumental.*

Resumen

Este artículo presenta una investigación destinada a la formación de profesores secundarios. Esta formación fue concebida para tratar de la relación profesores, estudiantes y tecnología bajo la lente teórica de la orquestación instrumental. Para ello se elaboraron una situación matemática envolviendo la problemática del teorema de Euler para poliedros y recursos construidos con el software GeoGebra. También se propusieron orquestaciones instrumentales para orientar el desarrollo de la situación matemática. Los procedimientos metodológicos fueron levantamiento bibliográfico, lecturas y análisis, internos a una investigación teórica. El objetivo de la investigación fue presentar una propuesta de enseñanza, conteniendo recursos digitales para abordar un contenido de geometría espacial para la enseñanza fundamental II y con un modo de

[1] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil, sigliori@pucsp.br
[2] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil, marcioalmeidasp@gmail.com

explotación de esos recursos soportado en una teoría de la educación matemática. Consideramos que el resultado atiende ese objetivo, pues la situación posibilita la exploración de varios conceptos matemáticos y la formación de actitudes frente a esos conocimientos, los recursos son suficientemente ricos para auxiliar la conducción de la situación matemática y las propuestas de orquestación complementan las ideas de los autores para la formación deseada. Además, posibilita la divulgación de la orquestación instrumental entre formadores de profesores de matemáticas de la educación básica, comunidades de práctica de profesores y entre profesores en formación, pues estará disponible en el espacio digital ensinodematematica.com.

Palabras clave: *formación de profesores. colegio. teorema de Euler para poliedros. investigación teórica. orquestación instrumental*

Abstract

This article presents a research destined to the formation of secondary teachers. This training was designed to address the relationship between teachers, students and technology under the theoretical lens of instrumental orchestration. For this, a mathematical situation was elaborated involving the problem of the Euler theorem for polyhedral and resources built with GeoGebra software. Instrumental orchestrations were also proposed to guide the development of the mathematical situation. The methodological procedures were bibliographic survey, readings and analysis, internal to a theoretical research. The objective of the research was to present a teaching proposal containing digital resources to address a spatial geometry content for elementary education and with a mode of exploration of these resources supported by a theory of mathematical education. We consider that the result meets this objective, because the situation allows the exploration of several mathematical concepts and the formation of attitudes towards this knowledge, the resources are rich enough to assist the conduct of the mathematical situation and the proposals of orchestration complement the ideas of the authors for the intended training. In addition, it allows the dissemination of instrumental orchestration among teachers of mathematics teachers in basic education, communities of teachers practice and among teachers in training, as it will be made available in the digital space ensinodematematica.com.

Keywords: *teacher training. middle school. Euler's theorem for polyhedral. theoretical research. instrumental orchestration*

Resumé

Cet article présente une recherche destinée à la formation des enseignants du secondaire. Cette formation était conçue pour aborder la relation entre enseignants, étudiants et technologie dans l'optique théorique de l'orchestration instrumentale. Pour cela, une situation mathématique a été élaborée impliquant le problème du théorème d'Euler pour les polyèdres et des ressources construites avec le logiciel GeoGebra. Des orchestrations instrumentales ont également été proposées pour guider le développement de la situation mathématique. Les procédures méthodologiques étaient des enquêtes bibliographiques, des lectures et des analyses internes à une recherche théorique. L'objectif de la recherche était de présenter une proposition d'enseignement contenant des ressources numériques pour traiter un contenu de géométrie spatiale destiné à l'enseignement élémentaire ainsi qu'un mode d'exploration de ces ressources reposant sur une théorie de l'enseignement mathématique. Nous estimons que le résultat atteint cet objectif, car la situation permet d'explorer plusieurs concepts mathématiques et de faire naître des attitudes à l'égard de *ces connaissances, les ressources sont suffisamment riches pour aider à la conduite de la situation mathématique et les propositions d'orchestration complètent les idées des auteurs. pour la formation prévue. En outre, il permet la diffusion de l'orchestration instrumentale parmi les enseignants de mathématiques en éducation de base, les communautés de professeurs et les enseignants en formation, comme il sera mis à disposition dans l'espace numérique ensinodematematica.com.*

Mots-clés: *formation des enseignants. collège. théorème d'Euler pour les polyèdres. recherche théorique. orchestration instrumentale.*

1. Introdução

Esta pesquisa leva em conta resultados de investigações que indicam que cada vez mais o professor de matemática tem buscado utilizar ferramentas digitais em suas aulas, e que a integração de ferramentas digitais em educação matemática tem sido considerada promissora, mas problemática. E assim sendo, a escolha e manuseio dessas ferramentas, a elaboração de recursos com elas e sua utilização em sala de aula precisam estar presentes tanto na formação inicial de professores como na continuada. Isto é, a integração do professor e dos estudantes com as ferramentas digitais é essencial para a prática docente. Nessa problemática podem, também, ser inseridos questionamentos como:

> O que é difícil, do ponto de vista do professor, integrar a tecnologia ao seu ensino de matemática? Robert e Rogalski (2005) apontam que as práticas dos professores são complexas, mas estáveis. Com base nisso, Lagrange e Monaghan (2009) argumentam que a disponibilidade de tecnologia amplia a complexidade e, como consequência, desafia a estabilidade das práticas de ensino: as técnicas que são usadas em configurações ‘tradicionais' não podem mais ser aplicadas em uma rotina, da mesma forma quando a tecnologia está disponível. (DRIJVERS *et al.*, 2010, p.214, tradução nossa).

Esta pesquisa trata dessa problemática e foi desenvolvida por meio de buscas, de leituras e de análises de material bibliográfico.

A escolha do referencial pela noção de orquestração instrumental fundamenta-se no germe da concepção do mesmo. Essa noção aparece no bojo da discussão sobre ser “necessário que a pesquisa educacional, fosse além dos relatos entusiastas dos primeiros adotantes que se dedicavam em pequena escala experimentos de design, e fosse firmemente baseado em fundamentos teóricos” (TROUCHE; DRIJVERS, 2014, p. 1, tradução nossa). Ela também atende a orientação que desejávamos adotar para a formação de professores, aquela de integrar ferramentas digitais em sua prática de modo a favorecer a aprendizagem de seus alunos. Além disso, tomamos também por base a teoria dos

Registros de representação semiótica que vai orientar as mudanças de representação entre os diferentes registros que aparecem em situações matemáticas que utilizam tecnologia.
Com essa perspectiva organizamos essa investigação em três momentos: elaboração de uma situação matemática com o teorema de Euler; elaboração de recursos digitais com a utilização do GeoGebra e análise e proposição de tipos de orquestração desses recursos com vistas à integralização pretendida.
A situação matemática envolve conhecimentos básicos sobre polígonos e poliedros como: identificação e classificação de figuras planas (polígonos simples e não simples; polígonos convexos e não convexos); conhecimento de propriedades relacionadas a curvas (aberta e fechada); identificação e classificação de sólidos geométricos (poliedros e não poliedros, poliedros convexos e não convexos), entre outros.

2. Componentes da pesquisa

2.1 Referencial teórico

Dois referenciais teóricos foram utilizados nesta pesquisa, a orquestração instrumental e a teoria dos registros de representação semiótica.
A orquestração instrumental introduzida por Trouche (2004) é reconhecida por vários pesquisadores como um aporte teórico que traz subsídios a investigações voltadas à interação do professor com a tecnologia, em sua prática docente, tendo a perspectiva de provocar a gênese instrumental de seus educandos. Em McKenzie (2001) e em Mariotti (2002) é revelado que a aprendizagem precisa ser guiada pelo professor orquestrando situações matemática. Em Kendal e Stacey (2002) e em Kendal, Stacey e Pierce (2004) é mostrado que os professores privilegiam técnicas de uso de tecnologias o que acarreta em orientar a aquisição de domínio das ferramentas e seus processos de aprendizagem pelos alunos.
A teoria dos Registros de Representação Semiótica é, segundo seu autor, o psicólogo francês Raymond Duval (2008), uma teoria que revela que a aprendizagem matemática depende, essencialmente da relação de um aprendiz com a existência de diversos registros de representação semióticas dos objetos matemáticos. E que essa relação é complexa, pois depende de transformações dessas representações as quais são de dois tipos, os tratamentos e as conversões. O tratamento é uma transformação de uma representação interna a um determinado registro, e a conversão, ao contrário, consiste em mudar de registro. Essa última é mais complexa porque envolve os fenômenos de

2.2 Questão de pesquisa

Que tipos de orquestração, isto é, de configurações didáticas e modos de exploração podem ser propostos para as diversas atividades que compõem a situação matemática apresentada nesta pesquisa?

2.3 Procedimentos metodológicos

Essa pesquisa se insere no âmbito de uma pesquisa teórica e assim sendo os procedimentos metodológicos adotados foram de consultas e análises de material bibliográfico, como artigos científicos; textos e vídeos da internet, entre outros. Para o desenvolvimento da pesquisa utilizamos, essencialmente, indicações de tipos de orquestrações de casos ocorridos, trabalhos sobre o ensino do teorema de Euler e apresentações da discussão sobre as controvérsias geradas pelo teorema.

3. Situação Matemática

A situação matemática proposta nesta pesquisa, para o ensino do teorema de Euler para poliedros, inclui conceitos matemáticos do enunciado e da demonstração desse teorema. Ela trata de identificação de padrões, classificação de objetos geométricos, realização de conversões entre representações de objetos, levantamento de conjecturas e demonstração de resultados matemáticos.

O objetivo geral dessa situação, no que se refere à formação de professores, é o de explorar as possibilidades de um quadro teórico para organizar e gerir uma situação matemática com o uso de tecnologia. No que se refere ao aluno o objetivo é o de envolver nos questionamentos e solução dos problemas que compõem a situação.

3.1 Análise *a priori*

Uma análise *a priori*, subsidiou a elaboração da situação matemática, a qual foi realizada a partir de elementos histórico-epistemológicos, de orientações didáticas constantes do PCN (BRASIL, 1998) para EFII, e de experiências profissionais dos autores do artigo em formações de professores.

3.2 elementos histórico-epistemológicos

O teorema de Euler[3] para poliedros foi descoberto mais ou menos, ao acaso, em 1758 quando ele descobriu a existência de uma relação entre o número de faces, vértices e arestas de um poliedro convexo. Ele buscava uma classificação dos poliedros em função do número de faces, assim como a existente para os polígonos.

Inicialmente Euler busca classificar poliedros convexos, com o mesmo número de faces, em dois tipos pirâmide ou prisma. Mas, a partir de seis faces aparece uma terceira categoria de poliedros com configuração bem distinta, e, Euler observa que os poliedros de mesmo número de faces podem ter um número de vértices diferentes. Isso lhe sugere classifica-los pelo número de vértices, o que também não resultou, pois havia poliedros com o mesmo número de faces e de vértices, mas sem nenhuma semelhança entre eles. Euler então pensa em categorizar pelo número de arestas, poliedros que tivessem o mesmo número de faces e o mesmo número de vértices. Ele observa que poliedros com seis faces e oito vértices têm o mesmo número de arestas. Julga poder ser uma situação específica dos poliedros de seis faces, ele vai então buscar uma classificação semelhante para poliedros de sete faces e dez vértices. Ele encontra em todos, quinze arestas. Conjectura então que deve haver uma relação entre esses números, que será a sua conhecida fórmula $F + V - A = 2$.

Várias demonstrações para essa fórmula foram propostas, em campos muito diferentes da matemática, mais ou menos completas e mais ou menos rigorosas. Uma das mais conhecidas é a demonstração de Cauchy (1813 *apud* LIMA, 1985) e uma das mais simples é a de Legendre, usando-se a fórmula de Girard. Lakatos, em seu livro Provas e Refutações (1976), utiliza a demonstração do teorema de Euler sobre poliedros para discutir a questão das provas matemáticas, a partir de uma análise crítica da prova de Cauchy. Lima (1985) considerou que Lakatos não finaliza sua análise crítica à demonstração de Cauchy, e apresenta uma proposta. De fato, Euler que não conceituou poliedro, admitia que sua fórmula era válida sempre. E há muito tempo que se sabe que seu teorema representa uma condição apenas necessária, isto é, um poliedro convexo satisfaz a fórmula, mas, essa fórmula pode valer para poliedros não convexos. Logo a condição suficiente não é válida, isto é um poliedro pode satisfazer a fórmula e não ser convexo. Euler não percebeu isso. A controvérsia sobre o teorema de Euler perdurou mais de um século. Sua história está escrita nas notas de rodapé do livro Lakatos (1976). A solução definitiva dessa controvérsia deve-se a Poincaré. (LIMA, 1985)

[3] O suíço Leonard Euler (1707-1783) é um dos maiores génios de todos os tempos na matemática e na física.

3.2 Elementos didáticos e pedagógicos

A natureza da situação matemática foi pensada em explorar um conteúdo matemático, com o objetivo de levar os alunos a se debrucem sobre os problemas envolvidos nela, a fazerem conjecturas, a se interessarem por demonstrar resultados matemáticos, e participarem das discussões sobre as controvérsias existentes.

No que tange aos professores o interesse dos autores foi propor tipos de orquestrações visando a revelar o papel que eles podem desempenhar durante a execução das atividades, o uso de recursos e com a finalidade de ultrapassarem um ensino destinado a algoritmos e técnicas, em síntese elaborar configurações didáticas para uma situação matemática e organizar modos de exploração dos recursos envolvidos. Uma das formas de exploração da fórmula de Euler F +V – A = 2 é a seguinte: são dados os números de faces e de vértices do poliedro e se buscam o número de arestas, ou variação disso. Nesta proposta a situação matemática tem a perspectiva de levar os alunos a chegarem a essa fórmula e de perceberem as questões ligadas à discussão da generalidade dessa fórmula.

É previsto que os alunos tenham estudado polígonos em anos anteriores, e que eles e os professores tenham conhecimentos elementares de utilização do GeoGebra. O tempo de duração das atividades depende, como é usual, dos conhecimentos dos alunos, das condições da organização e gestão da sala de aula, da possibilidade do uso do computador e de tela de projeção, além do apoio institucional para o uso de tecnologias. Para essa proposta admitimos que cada atividade que compõe a situação deva ter a duração de uma aula de 50 minutos.

3.3 Orquestrações

Nesse subitem apresentamos tipos de orquestrações apresentados em artigo de um dos teóricos da noção de orquestração instrumental e que foram utilizados como exemplos.

> Seis tipos de orquestrações foram identificados por meio de uma combinação de análise baseada em teoria e baseada em dados; esses tipos foram denominados de *Technical-demo*, *Explain-the-screen*, *Link-screen-board*, *Discus-the-screen*, *Spot-and-show*, e *Sherpa-at-work*. (DRIJVERS *et al*, 2010, p.219)

É muito importante destacar que há tantos tipos de *orquestrações* quantos um professor pode pensar para a sua aula, e da mesma forma os modos de *execução* de uma tarefa matemática com recursos digitais, ou outros. Um professor orquestra sua aula definindo configurações didáticas e modos de execução de uma situação matemática da forma que ele considerar mais adequada. Nossas escolhas nortearam-se pelas experiências como professores, ou como formadores de professores. E tem por objetivo tratar dessa perspectiva na formação de professores.

3.4 As atividades que compõem a situação matemática

A situação matemática, aqui proposta, é desenvolvida em sete atividades A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 e A_7.

As atividades foram organizadas com uso do GeoGebra e constam de um espaço que pode ser acessado por meio de links indicados no texto de descrição das mesmas.

Atividade A_1: Responder à questão: O que é um polígono?

Objetivos: desenvolver competências de classificar e de realizar conversão do registro representação geométrico para língua natural. O modo de execução dessa atividade foi apoiado nessa conversão realizado em dois passos. $P1_1$ identificação de polígonos entre figuras planas. $P1_2$: Levar os alunos a proporem uma 'definição' de polígono por meio da conversão da representação, do registro geométrico para língua natural.

Essa atividade pode ser organizada pela orquestração instrumental do tipo: *Sherpa-at-work* (DRIJVERS *et. al*, 2010, p. 220). Esse tipo de orquestração supõe uma configuração didática que conta com a participação de um estudante escolhido pelo professor, antes de começar a sessão. Esse aluno, denominado *Sherpa*, é a figura central na manipulação da tecnologia. O ambiente da sala de aula deve favorecer esse trabalho de modo a que o aluno *Sherpa* possa ficar no controle do uso da tecnologia, e que os demais alunos estejam em condições de acompanhar o que vai ser projetado em uma tela, e as orientações do professor. Consideramos conveniente esse tipo de configuração porque o professor fica mais livre para acompanhar a produção dos demais alunos e por se tratar de conhecimentos já adquiridos, a participação do *Sherpa* pode ser centralizada. No passo $P1_1$ o alvo é identificar objetos matemáticos, os polígonos. Para isso foi elaborada uma tarefa com o GeoGebra, constando em https://ggbm.at/e6rpvzmn. Essa tarefa é compatível com os objetivos da atividade, pois, favorece a classificação de figuras. O professor inicia A_1 passando o comando ao *Sherpa* que divulga o link a todos os alunos. O professor anda pela sala para conferir se os alunos estão informados do que é preciso fazer. Em seguida o *Sherpa* projeta, na tela, a tarefa cuja consigne é conhecida. Essa tarefa pode ser resolvida individualmente, ou em grupo. Um tempo para a realização da tarefa é proposto, o qual pode ser alterado, em função do que o professor percebe na sala de aula. Ao final do tempo estipulado, o professor solicita ao *Sherpa* que projete a resolução da tarefa na tela (classificando uma a uma das figuras propostas). O professor, então, desencadeia a discussão com a sala toda solicitando que os alunos indiquem suas concordâncias e suas discordâncias, em relação ao que consta na tela. A atividade se encerra quando os polígonos estiverem distinguidos das demais figuras. O passo $P1_2$ é relativo à conversão da representação do registro de representação geométrico para língua natural. Durante o passo $P1_1$ o professor pode marcar na lousa palavras chave faladas, durante a discussão, por exemplo, ser fechado, não ser redondo, etc. O *Sherpa* escreve na lousa uma proposta de 'definição' e toda a discussão se repete até o momento que o professor perceba que pode sistematizar uma definição de um polígono, que pode ser apresentada assim:

> Um polígono é constituído de vértices e lados tais que:
> Os vértices formam um conjunto finito (ordenado) de pontos em um mesmo plano;
> Os lados são segmentos de reta que possuem extremidades nos vértices;
> Dois lados consecutivos nunca estão alinhados (colineares);
> Qualquer vértice é extremidade de exatamente dois lados;
> Os vértices e os lados formam uma figura conexa (em uma única parte); (MICHEL *et al.*, s. d., p. 39, tradução nossa).

Atividade A_2: Responder à questão: O que é um polígono convexo?

Objetivos: desenvolver competências de classificar, identificar polígonos convexos a partir dos registros de representação geométrico e da língua natural. O modo de execução se apoia em conversão de representações, e na apresentação de uma noção intermediária, a de polígono simples, com a intenção de realçar condições que um polígono deve satisfazer para ser um polígono convexo.

A atividade é desenvolvida em três passos. Passo $P2_1$: identificar polígonos simples e não simples em um conjunto de polígonos. Passo $P2_2$: identificar polígonos convexos e não convexos entre polígonos simples. $P2_3$: chegar, no registro de representação em linguagem natural, à definição de um polígono convexo, passando primeiro pela definição de polígono simples.

A atividade A_2 é orientada pelas orquestrações dos tipos *Explain-the-screen* e *Sherpa-at-work* (DRIJVERS *et al*, 2010, p. 220). Na configuração *Explain-the-screen* o professor dá explicações à classe toda utilizando-se recursos digitais ou não. Consideramos adequado o acréscimo dessa configuração devido ao fato que está prevista a introdução de conceitos novos, e nos parece mais complicado o comando do *Sherpa* em momentos como esses. Mas, não descartamos a configuração do *Sherpa*, pois há situações em que a participação dele parece essencial. Como modo de execução é prevista a apresentação pelo professor, de definições escritas (registro da língua natural) de um polígono simples e de um polígono convexo. Definições escritas: 1) *polígonos simples*- um polígono *é simples* se e somente se dois lados não consecutivos não se interceptam, e, é *não simples* se há dois lados consecutivos que se interceptam. 2) *polígonos convexos*: um polígono é *convexo* se e somente se todo segmento fechado e determinado por dois pontos quaisquer do polígono está inteiramente contido nele, e, é *não convexo* se existem, ao menos dois pontos do polígono, tais que o segmento fechado cujos vértices são esses dois pontos, não está inteiramente contido no polígono. Cada definição deve ser seguida de exemplos e contraexemplos desenhados na lousa ou apresentados em figuras recortadas em papelão, ou desenhados no computador. Em seguida a professora solicita ao aluno *Sherpa* que projete a tarefa https://ggbm.at/ZpDzzTfC na tela**.** A partir daqui ocorrem a discussão e a finalização, da mesma forma como proposto na atividade A_1. Inclui-se o reconhecimento da inclusão, não propriamente, do conjunto dos polígonos convexos no conjunto dos polígonos simples, como https://ggbm.at/ZpDzzTfC.

Atividade A_3: analisar e demonstrar a situação plana do teorema de Euler.

Objetivos: Identificar padrões, transitar entre os registros de representação geométrico e língua natural, por meio de conversões desses registros nos dois sentidos. Essa atividade foi proposta como preparação ao estudo do teorema para o caso espacial, ou seja, para os poliedros.

Tipo de Orquestração instrumental proposta: Explain-the-screen. (DRIJVERS et. al, 2010, p. 220) isto é o professor é o responsável por controlar a tecnologia, e ao mesmo tempo dar atendimento à classe toda. Esse tipo foi escolhido pela característica da atividade em que o professor precisa introduzir conceitos e proposições novas. Como modo de execução sugere-se que o professor envolva os estudantes em todos os passos dessa atividade sempre os motivando a entrar nos problemas propostos, em três passos.

$P3_1$: Introduzir a noção de uma rede plana de polígonos, nos registros de representação geométrico e língua natural. O professor introduz a noção de uma rede plana de polígonos, em um dos registros de representação, e solicita aos alunos que faça a conversão. Depois desse trabalho de conversões de representações, o professor informa o link https://ggbm.at/k8yrdpvn. para a formalização dessa noção como: Uma rede plana de polígonos é constituída de faces, vértices e arestas tais que: as faces são polígonos simples, as arestas são intersecções de duas faces ou fronteira da rede; os vértices são intersecções de duas arestas; as faces, os vértices e as arestas formam um conjunto conexo (em uma parte). É importante trabalhar com os alunos, em seus computadores, que trabalhem a tarefa proposta de obtenção do número de faces, vértices e arestas.

$P3_2$ **-** Demonstrar a proposição: O número F + V – A não se altera se os polígonos da rede forem triangularizados. Para isso é preciso inicialmente construir com os alunos a triangularização de um polígono simples nos dois casos possíveis https://www.geogebra.org/m/k8yrdpvn. E discutir para confirmar que um polígono simples qualquer com n lados, pode ser transformado em (n-2) triângulos. Com o auxílio de tabelas pode-se mostrar em casos particulares, que o número resultante de F + V – A não se altera se um dos polígonos da rede for triangularizado. A verificação é realizada para as duas possibilidades de triangulação de um polígono particular. https://www.geogebra.org/m/k8yrdpvn. Sugere-se que a mesma situação pode ser repetida para todos os polígonos da rede, e ao final, obtém-se o mesmo número existente antes da triangularização. Pode-se trabalhar com redes e subredes para visualizar o que ocorre.

$P3_3$: Verificar que o número F + V – A de uma rede não se altera se se subtrai um triângulo. conferir https://www.geogebra.org/m/k8yrdpvn. Com simulações suprimos outro triângulo da rede resultante e confirmamos que o número de faces, mais vértices subtraindo do número de arestas é o mesmo que F + V – A inicial. A rede construída no GeoGebra favorece o entendimento de que o procedimento de suprimir triângulos pode continuar até que reste apenas um triângulo T, e então $F_T + V_T – A_T = 1 +3 – 3= 1$.

Atividade A_4: Responder à questão: O que é um poliedro?
Objetivos: desenvolver competência de classificar, e, de realizar conversão de registros. Por questão do número de páginas do artigo sugerimos a mesma configuração didática e o mesmo meio de execução da atividade A_1. Com o apoio da classificação das figuras espaciais em poliedros e outros, como pode ser visto em https://ggbm.at/kkfrnjkn. Todos os meios de execução devem levar à caracterização dos poliedros. Espera-se obter como definição: ‘Um poliedro é constituído de faces, de vértices e de arestas tais que: as faces são polígonos, as arestas são intersecções de duas faces, as extremidades das arestas são os vértices, as faces, os vértices e as arestas fazem um conjunto convexo (em apenas uma parte); duas faces contiguas não são coplanares, cada vértice pertence a apenas um ângulo poliedro.

Atividade A_5: Responder à questão: O que é um poliedro convexo?
Objetivos: desenvolver competência de classificar, identificar um poliedro convexo a partir dos registros de representação geométrico e língua natural. Repetir a orquestração

da atividade A_2 com a seguinte atividade: https://www.geogebra.org/m/ugm7tykb. Definição na língua natural: Um poliedro é convexo, se e somente se, para toda face f o poliedro pertence a uma das regiões R_1 ou R_2 que o plano α que contém face f divide o espaço.

Atividade A_6: enunciar e demonstrar o teorema de Euler para poliedros convexos. Essa é a atividade central e alvo da situação matemática descrita neste artigo.

Os objetivos são classificar, identificar padrões, e demonstrar.

Tipos de orquestração. Sugere-se dois tipos de configurações didáticas, acontecendo em conjunto. Em parte do trabalho o professor precisa tomar o comando da tecnologia e trabalhar com a classe toda, como por exemplo quando introduz a noção de diagrama de Schlegel. Para esses momentos sugerimos a configuração didática tipo D*iscuss-the-screen* (DRIJVERS et al, 2010, p. 219). Em outros momentos em que as situações são assemelhadas ao caso plano, o professor tem mais a função de selecionar respostas e coordenar discussões sugerimos o tipo *Sherpa-at-work*. Essa atividade tem como modo de execução a realização em cinco passos, orientados pelo encaminhamento das ideias desenvolvido pelo próprio Euler, e pelas possibilidades do GeoGebra. No passo $P6_1$ os alunos analisam, com o apoio do Sherpa que projeta na tela, uma figura com poliedros separados pelo número de faces. (https://www.geogebra.org/m/xgcvztfc). O Sherpa conduz a discussão de possível categorização desses poliedros, com em prismas ou pirâmides (https://www.geogebra.org/m/xgcvztfc). Conferir que essas duas categorias não são suficientes para poliedros com seis ou mais faces. (https://www.geogebra.org/m/xgcvztfc). Discute-se então a categorização pelo número de vértices e depois pelo número de arestas (https://www.geogebra.org/m/xgcvztfc). Repetem-se a ausência de padrão. Busca a categorização por poliedros que tenham o mesmo número de faces e de vértices. No passo $P6_2$, o professor entra e apresenta à classe toda, os encaminhamentos de Euler, de que poliedros com seis faces e oito vértices tinham 12 arestas. Repetiu essa análise com poliedros, de sete faces e dez vértices e constatou regularidade no número de arestas, todos tinham 15 arestas. Euler então conjecturou que poderia haver alguma regularidade entre esses números. $P6_3$. O professor desafia, então, os alunos para descobrir essa regularidade (ou padrão), uma fórmula proposta e demonstrada por Euler, entre o número de faces, de vértices e de arestas, de um poliedro convexos, e passa a coordenação do trabalho com software e projetor ao Sherpa, que projeta na tela uma tabela (https://www.geogebra.org/m/xgcvztfc) e o professor anda pela sala para acompanhar as tentativas dos alunos. Pode-se supor que algum dos alunos, ou o

Sherpa estabeleça alguma relação com o caso do plano. E se isso não ocorrer o professor vai ao próximo passo. $P6_4$ Enunciar a fórmula de Euler a partir de casos particulares. Ele solicita ao Sherpa que faça algumas simulações com somas e subtrações entre os números de faces, vértices e arestas. Esse comando leva os alunos a se lembrarem que no caso dos polígonos as operações realizadas eram F+V-A, e passam a efetuar, junto com o Sherpa essas operações em cada poliedro exposto na tabela e propõem a fórmula F+V-A= 2. Referendando esse resultado o professor retoma a configuração didática Discuss-the-screen, pois vai trabalhar com a demonstração do teorema no passo $P6_5$. Ele projeta a (https://www.geogebra.org/m/xgcvztfc) com o diagrama de Schlegel para alguns poliedros. E com a ajuda do GeoGebra e o apoio do Sherpa analisam junto com a classe, uma possível correspondência entre número de faces, vértices e arestas de um poliedro e da rede plana de polígonos correspondente (https://www.geogebra.org/m/xgcvztfc). O alvo é constatar que os números de vértices e arestas se mantém e os de faces diminuem de 1. Essa constatação leva à fórmula de Euler, pois se um poliedro tem F faces, V vértices e A arestas, o seu diagrama de Schlegel terá (F-1) faces, V vértices e, A arestas. Pela atividade A3 é verdade que $(F – 1) + V – A = 1$ o que implica que $F + V – A = 2$.

Atividade A_7. Informações muito gerais sobre o teorema, incluindo as controvérsias.

Objetivo: Apresentar um poliedro *não convexo* que satisfaz o teorema, e um outro que não satisfaz essa fórmula de Euler. Concluir que essa fórmula não é, portanto, geral, para os poliedros. Dar conhecimento de que outro matemático chamado Poincaré continuou esse trabalho e obteve formulações gerais. Configuração didática *Explain-the-screen* Modos de exploração em dois passos. $P7_1$. Colocar na tela dois poliedros *não convexos* (https://www.geogebra.org/m/hsa64zwg). Relacionar faces, vértices e arestas dos dois poliedros. Verifica-se que um deles satisfaz a fórmula de Euler, mesmo sendo não convexo (https://www.geogebra.org/m/hsa64zwg). Mas o outro não (https://www.geogebra.org/m/hsa64zwg). Conclui-se que essa fórmula não é geral para os poliedros. Esse fato trouxe controvérsias durante bastante tempo. O fato é que Euler não definiu poliedro. Hoje se sabe que a característica dos poliedros para satisfazerem a fórmula de Euler são aqueles homeomorfos a uma esfera. Nesse nível de ensino, pode-se propor uma imagem, a de se assoprar um poliedro e ele ter condição de virar uma bola como a de futebol. Essa informação vem de Poincaré que generalizou a fórmula de Euler, para objetos geométricos do espaço, cuja caracterização é de sua deformação contínua. Mas isso é para outros estudos.

Considerações finais

Finalizamos este artigo analisando a questão de pesquisa, “Que tipos de orquestração, isto é, de configurações didáticas e modos de exploração podem ser propostos para as diversas atividades que compõem a situação matemática apresentada nesta pesquisa? “

Julgamos que podemos responder que no caso deste artigo sim, pois o alvo principal, era preparar uma proposta de formação de professores visando explorar a noção de orquestração instrumental. Os exemplos apresentados em artigo de um dos autores dessa noção podem apresentar os elementos essenciais dessa organização de uma situação didática em busca de desempenhar o papel do maestro que comanda os participantes de um concerto. No entanto, deve-se reconhecer que a análise dos processos de instrumentação e instrumentalização essenciais para uma orquestração, fica faltando em uma pesquisa desse teor, teórica. As leituras e consultas de apoio, além das experiências profissionais dos autores foram importantes, mas faltaram os dados da prática específica, que se espera contemplados por meio de contatos virtuais ou efetivos com a sala de aula. Isso porque o acompanhamento de uma situação prática vai revelar as diferentes concepções de ensino que orientam as práticas pedagógicas. Entre elas transmitir conhecimento; treinar; indicar; e punir (no sentido de dar uma lição a alguém) (PINO, 2004).

Este artigo apresenta um *constructo teórico, a* orquestração, inserido na teoria da didática da matemática, Gênese Instrumental, que abarca uma concepção de ensino “indicar”, segundo a qual a

> [...] aquisição do conhecimento é concebida como resultado de uma atividade de procura que o sujeito que aprende (S2) deve fazer seguindo as indicações e orientações do sujeito que ensina (S1). Subjacente a esta concepção está a ideia de que o conhecimento é resultado de um trabalho de investigação e descoberta com a ajuda do outro. No caso do ensino escolar, esse outro é o professor (S1), cujo papel fundamental é ser “guia” do aluno (S2). Esta concepção aponta no sentido de que a atividade de conhecer não é apenas receber informações a respeito do objeto de conhecimento (OC), mas procurar compreender a significação desse objeto, o que exige procura e investigação por parte do sujeito que aprende (S2), mas contando com a orientação de quem ensina (S1). (PINO, 2004, p. 441).

E, em complemento:

> [..] inserimos algumas reflexões, sobre o trabalho dos professores e dos saberes que eles trazem em sua prática, elas levam em consideração que em uma sala de

> aula há tantas particularidades que só o docente que se ocupa dela e ninguém mais tem condições de equacionar as dificuldades dos alunos e propor abordagens de ensino para elas. (ABAR; IGLIORI, prefácio, 2012, adaptado).

Neste artigo, o que trazemos ao professor são contribuições advindas de uma teoria da didática da matemática, as quais sempre podem e devem ser filtradas por sua prática.

Referências

ABAR, C. A. A. P; IGLIORI, S. B. C.. **A reflexão e a prática no ensino - Matemática**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2012. v. 1. 168p.

BRASIL. Ministério da Educação e Desporto. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais Primeiro e Segundo Ciclos do Ensino Fundamental** – Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

DRIJVERS, P.; DOORMAN, M.; BOON, P.; REED, H.; GRAVEMEIJER, K.. The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. **Educational Studies in mathematics**, v. 75, n. 2, p. 213-234, 2010.

DUVAL, R.. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de Representação Semiótica**. 4. ed. Campinas: Papirus, 2008, p. 11-34.

KENDAL, M.; STACEY, K.. Teachers in transition: Moving towards CAS-supported classrooms. **ZDM – The International Journal on Mathematics Education**, v. 34, n. 5, p. 196– 203, 2002.

KENDAL, M.; STACEY, K.; PIERCE, R.. The influence of a computer algebra environment on teachers' practice. In. GUIN, D.; RUTHVEN, K.; TROUCHE, L. (Eds.), **The Didactical Challenge of Symbolic Calculators:** turning an computational device into a mathematical instrument. Dordrecht: Kluwer, 2004, p. 83–112.

LAKATOS, I.. **Proofs and Refutations: the logic of mathematical discovery**, Cambridge: Cambridge University Press. 1976.

LIMA, E. L.. O Teorema de Euler sobre poliedros. **Revista Matemática Universitária**. Rio de Janeiro: SBM, n. 2, 1985.

MARIOTTI, M. A., Influence of technologies advances in students' math learning. In. ENGLISH, L. D. (Ed.), **Handbook of International Research in Mathematics Education**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2002, p. 757– 786.

MCKENZIE, J.. Head of the class: How teachers learn technology best. **American School Board Journal**, v. 188, n. 1, p. 20-23, 2001.

MICHEL, D.; JÉRÉMY, D.; SAMUEL, H.; CINDY, L.; ANGELO, M.. **Relation d'Euler et les polyèdres sans "trou":** Cellule de Géométrie - Catégorie pédagogique la

HEH. Elaborada pelo Centre de Rechercher HAUTE ECOLE - Ecole Normale iSEP. Disponível em: <http://www.cellulegeometrie.eu/documents/pub/pub_12.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2018.

PINO, A.. Ensinar-aprender em situação escolar: perspectiva histórico-cultural. **Contrapontos**, v. 4, n. 3, p. 439-459, 2009.

TROUCHE, L.. Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. International **Journal of Computers for mathematical learning**, v. 9, n. 3, p. 281, 2004.

TROUCHE, L.; DRIJVERS, P.. Webbing and orchestration. Two interrelated views on digital tools in mathematics education. **Teaching Mathematics and Its Applications: International Journal of the IMA**, v. 33, n. 3, p. 193-209, 2014.