

A componente tecnológica -teórica dos sistemas de duas equações lineares na educação básica

The technological-theoretical component of the systems of two linear equations in basic education

FRANCISCO JAVIER UGARTE GUERRA¹

MARIA JOSÉ FERREIRA DA SILVA²

ROSA CECILIA GAITA IPARRAGUIRRE³

Resumo

O presente artigo é um dos resultados de um projeto de pesquisa conjunto entre os grupos PEA-MAT e DIMAT, respectivamente, da PUC-SP e PUCP que tem como objetivo apresentar uma organização matemática local relacionada ao ensino de sistemas de equações lineares. O referencial teórico é a Teoria Antropológica do Didático e a motivação para tal estudo foi a constatação de que tanto os professores de Brasil e Perú, que participaram da formação continuada no âmbito desse projeto, quanto os livros textos dos dois países privilegiam o saber-fazer desse conteúdo sem explicitar suas justificativas. Assim, fizemos uma reflexão, baseando-nos nas técnicas propostas pelos professores para uma determinada tarefa, no sentido de organizar uma praxeologia local que justifique tais técnicas por meio de um discurso tecnológico-teórico, em geral, ausente no ensino de tal conteúdo.

Palavras-chave: *Sistemas de Equações Lineares. Teoria Antropológica do Didático.*

Résumé

CET article est l'un des résultats d'un projet de recherche conjoint entre les groupes PEA-MAT et DIMAT, respectivement, de PUC-SP et PUCP, qui vise à présenter une organisation mathématique locale liée à l'enseignement des systèmes d'équations linéaires. La référence théorique est la théorie anthropologique du didactique et la motivation pour une telle étude était réside dans le fait que les enseignants du Brésil et du Pérou, qui ont participé à la formation continue dans le cadre de ce projet, mais aussi les manuels scolaires des deux pays favorisent le savoir-faire de ce contenu sans en clarifier les justifications. Ainsi, nous avons fait une réflexion, basée sur les techniques proposées par les enseignants pour une tâche particulière, afin d'organiser une praxéologie locale qui justifie de telles techniques par le biais d'un discours technologique-théorique, en général, absent dans l'enseignement de ce contenu.

Mots-clé : *Systèmes d'équations linéaires. Théorie Anthropologique du Didactique*

¹ IREM-PUCP, Perú, fugarte@pucp.edu.pe

² PUC-SP, Brasil, zeze@pucsp.br

³ IREM-PUCP, Perú, cgaita@pucp.edu.pe

Resumen

En el artículo se presentan algunos de los resultados obtenidos en el marco de un proyecto de investigación conjunto entre los grupos PEA-MAT y DIMAT, de la PUCSP y PUCP, respectivamente, cuyo objetivo es presentar una organización matemática local relacionada con la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales. El marco teórico considerado es la Teoría Antropológica de lo didáctico y la motivación para este estudio fue la verificación de que, tanto los profesores de Brasil y Perú que participaron de las formaciones continuas, realizadas en el marco del proyecto, así como los libros de texto empleados en ambos países privilegian el saber hacer de dicho contenido sin explicitar las justificaciones. Así, presentamos una reflexión, basándonos en las técnicas propuestas por los profesores para una tarea determinada, la cual se concreta en la propuesta de una praxeología local que justifique las técnicas empleadas a través de un discurso tecnológico-teórico que, en general, está ausente de la enseñanza de los sistemas ecuaciones lineales.

Palabras clave: *Sistemas de Ecuaciones Lineales. TAD*

Abstract

The article presents some of the results obtained in the framework of a joint research project between the PEA-MAT and DIMAT groups, of the PUCSP and PUCP, respectively, whose objective is to present a local mathematical organization related to the teaching of systems of linear equations. The theoretical framework considered is the Anthropological Theory of the Didactic and the motivation for this study was to note that teachers in service from Brazil and Peru, who participated in the continuous training carried out within the framework of the project, as well as the books of text used in both countries privilege the know-how about the linear equations systems but they don't know how to explain the reasons why they work. Therefore, we propose a local praxeology that justifies the techniques used by the teachers for a specific task, through a technological-theoretical discourse that, in general, is absent of the teaching practice.

Key words: *Systems of Linear Equations, ATD.*

Introdução

No âmbito do projeto Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos, desenvolvido de forma colaborativa pelos grupos de pesquisa PEA-MAT, da PUC-SP e DIMAT do *Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas* (IREM) da PUC-Peru, um dos temas era investigar o ensino e a aprendizagem da álgebra escolar.

Um dos objetivos era identificar qual o modelo epistemológico dominante na instituição e propor um alternativo. Para esse processo seria necessário apoiar professores na organização de conteúdos em diferentes pontos de vista e ressaltar o desenvolvimento de sequências didáticas que favorecessem uma rotina de aula produtiva. Com esse propósito, entre outros, realizamos formações continuadas no Brasil e no Peru com professores de Matemática do Ensino Básico.

A primeira, realizada em São Paulo, tinha como objetivo discutir, de forma colaborativa, questões do ensino de álgebra escolar. Depois de alguns encontros e discussões gerais os professores começaram a focar em Sistemas de Equações Lineares. As principais questões eram referentes às técnicas de resolução e as dificuldades dos alunos. No entanto, quando questionados a respeito de como justificavam as técnicas para os alunos, não souberam explica-las e perceberam que conheciam diferentes técnicas, mas não as justificavam, nem para si, nem para os alunos. Dessa forma, conduzimos a formação com os professores peruanos focando nesse tema e, da mesma forma, as justificativas não ocorreram completamente. Depois do tema ser escolhido em São Paulo fizemos uma revisão bibliográfica (Gaita e Silva, 2018, no prelo) e notamos que esse conteúdo tem sido muito estudado por vários pesquisadores que, em grande parte se preocuparam ou com as dificuldades apresentadas pelos alunos ou em aplicar uma sequência com o objetivo de sanar tais dificuldades. É raro encontrar trabalhos que questionem o currículo ou os conhecimentos dos professores para ensinar. Outro aspecto que consideramos fundamental e que não apareceu nas investigações revisadas, exceto no trabalho de Coulange (2000), se refere a razão de ser dos sistemas de equações lineares na educação básica.

Baseando-nos na Teoria Antropológica do Didático buscamos nessas formações que os professores desenvolvessem um discurso tecnológico-teórico para as técnicas de resolução que apresentavam, isto ocorreu parcialmente nos dois casos, pois alguns professores já haviam desenvolvido suas próprias formas de lidar com o tema em sala de

aula, ou seja, já tinham hábitos difíceis de serem reformulados. Assim, neste artigo, temos como objetivo em primeiro lugar reconhecer algumas das técnicas empregadas pelos professores ao resolver sistemas de equações lineares e fazer uma reflexão a respeito de possíveis justificativas para algumas técnicas utilizadas em tal formação sob o ponto de vista de organizações matemáticas locais. No que segue apresentaremos o referencial teórico que embasou a formação.

Referencial teórico

Para Chevallard (1999) o saber matemático organiza uma forma particular de conhecimento. O conhecimento e o saber, entendido como certa forma de organizar conhecimentos, entram em jogo com a noção de relação, pois um objeto existe se um sujeito ou uma instituição o reconhece. A noção de “relação” trata então das práticas sociais que se realizam em uma instituição e que envolvem o objeto em questão. Assim, a existência de um objeto depende do reconhecimento e do relacionamento de, pelo menos, uma pessoa ou instituição com esse objeto.

De acordo com Almouloud (2015) a Teoria Antropológica do Didático – TAD – estuda condições, possibilidades e funcionamento de sistemas didáticos, ou seja, das relações entre sujeito, instituição e saber. Em outras palavras a TAD estuda o homem frente a situações matemáticas, ou melhor, ao saber matemático. Para Chevallard (1999) sua teoria é “antropológica” porque situa a atividade matemática e o estudo de matemática no conjunto de atividades humanas e de instituições sociais. Uma das primeiras contribuições da TAD, segundo Bosch e Gascón (2002, p. 6), foi “evidenciar que não é possível interpretar de maneira adequada os fenômenos didáticos sem considerar a relatividade institucional da atividade matemática”.

Na TAD, segundo Chevallard (1999), um saber refere-se a uma organização ou praxeologia que funciona como uma máquina de produção de conhecimento, na qual as noções de tipos de tarefa, de técnica (maneira de fazer), de tecnologia (justificativa para a técnica) e teoria (saberes científicos que justificam a tecnologia) permitem modelizar as práticas sociais, em particular, a atividade matemática. Dessa forma, para existir em uma instituição, qualquer técnica deve ser compreensível, legível e justificada, ou seja, é necessário existir um discurso descritivo e justificativo das técnicas (tecnologia). Mas, por sua vez, esta tecnologia também precisa de uma justificativa que se dá no âmbito da teoria. Uma praxeologia será considerada pontual se uma determinada técnica resolve

um conjunto de tipos de tarefas; será considerada local se agrupa várias praxeologias pontuais em torno de uma mesma tecnologia e será regional quando agrupa várias organizações locais com a mesma teoria justificando as tecnologias associadas.

Para o autor é a instituição que caracteriza um problema que deve ser resolvido, por exemplo a necessidade de reconstruir tarefas e, no caso da sala de aula, caracteriza uma questão didática. O autor distingue então dois tipos de praxeologias ou organizações a matemática, que corresponde à realidade matemática que se pode construir para uma sala de aula e a didática que corresponde à maneira de se construir essa organização matemática. No caso dos sistemas de equações lineares, como objeto de ensino, encontramos diferentes técnicas de resolução e diferentes alcances, algumas extremamente custosas para sistemas com um número maior de equações. No ensino básico o discurso tecnológico-teórico está nas equações e sistemas equivalentes que nem sempre são explicitados durante o ensino das técnicas. Em termos de teoria esse discurso seria justificado no estudo de definições e propriedades dos equações e polinômios.

Para Chevallard (1999) é necessário examinar os diferentes espaços em que o objeto matemático e os saberes associados a ele são encontrados, ou seja, seus habitats. Para isso introduz a noção de ecologia de uma praxeologia para referir-se às condições de sua construção e vida nas instituições que a produz, utiliza ou transpõe apoiando-se em ideias da ecologia biológica para explicar as relações entre objetos matemáticos no estudo de um objeto matemático específico. Assim, a ecologia didática dos objetos matemáticos se apresenta como um meio de questionamento da existência de tais objetos na instituição, ou seja, o que existe ou não existe e por quê? E, ainda se poderia existir e em que condições. Enfim, permite evidenciar e analisar as estruturas ecológicas dos objetos matemáticos, suas relações hierárquicas.

Em relação à Álgebra, Chevallard (1994) afirma que na escola não se conta com âmbitos de intervenção adaptados para que o cálculo algébrico intervenha como um meio: sua aprendizagem se faz quase de maneira intrínseca, sem relação com um objetivo matemático que justificaria a pertinência das manipulações realizadas com as expressões algébricas. Gascón (1994) apresenta um modelo alternativo ao da álgebra como aritmética generalizada em que propõe reconhecer o papel modelizador da álgebra. Isto significa não a reduzir à manipulação formal de expressões algébricas, à resolução de equações e à resolução de certos protótipos de problemas.

Considerando o exposto, no caso particular dos sistemas de equações lineares poderíamos perguntar: que saberes os alimentam? Que outros objetos matemáticos se relacionam com

eles? Qual a função do ensino de sistemas de equações lineares? Cumprem um papel modelizador? Seria a resolução de problemas?

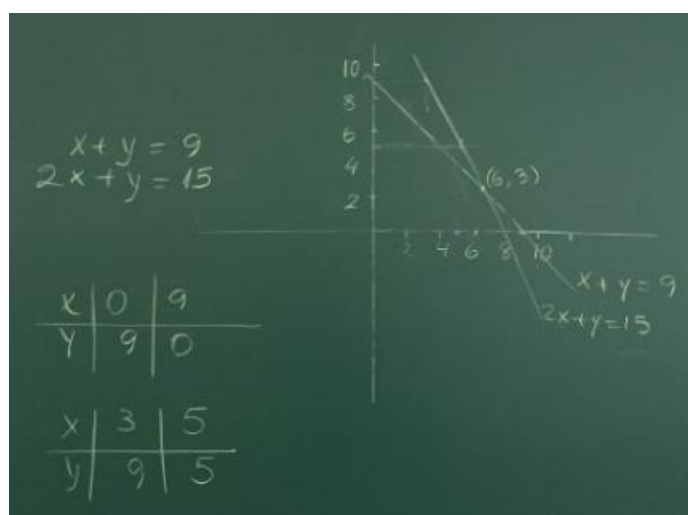
Não pretendemos responder tais questões neste momento, por falta de espaço para todas as discussões necessárias, mas as iniciaremos apresentando de uma praxeologia local no sentido de focar seu discurso tecnológico-teórico que, como evidencia Gaita e Silva (2018, no prelo) não aparecem nos livros textos utilizados, tanto no Brasil, quanto no Perú. Faremos tal análise a partir de um problema, discutido nas formações de professores desenvolvidas nos dois países, que envolvem o saber-fazer aritmético e algébrico. Os resultados aqui apresentados referem-se às duas formações e não os identificaremos especificamente porque foram semelhantes, embora os professores peruanos tivessem arriscado mais no discurso tecnológico teórico.

Análise do problema

Trata-se de um dos problemas discutidos com os professores, que envolve sistemas de equações lineares, e foi solicitado que apresentassem todas as técnicas possíveis para sua solução. Explicitaremos de tal discussão seis técnicas utilizadas, no sentido de exemplificar o que seria uma praxeologia local, evidenciando o discurso tecnológico teórico. O problema é o seguinte, em sua versão em espanhol: **Diego ahorró S/. 15 en monedas de 2 y 1 soles. Si en total son 9 monedas, ¿cuántas monedas de cada denominación tiene Diego?**

Os professores apresentaram suas soluções no quadro negro. A primeira técnica (figura 1) foi chamada de método gráfico.

Figura 1 – solução empregando o método gráfico



Fonte. Os autores.

Como podemos ver na figura 1, o professor, fez duas tabelas para tomar dois pontos e traçar as retas que representam graficamente cada uma das equações do sistema e indicou as coordenadas do ponto de intersecção das duas retas. Não associou esse par ordenado ao problema, apenas oralmente e não conseguiu justificar porque essa técnica poderia ser usada.

Apresentar a técnica sem sua justificativa, ou seja, sem um discurso tecnológico teórico não garante que o aluno construa um significado para ela, ou que construa um significado errôneo, tal como reportam algumas investigações. Ochoviet (2009) mostra que tanto alunos de educação básica, como professores de matemática em formação associam a solução a um ponto de corte de duas retas e frente ao gráfico de três retas não concorrentes, correspondente a um sistema de três equações lineares com duas incógnitas, escrevem respostas como as seguintes: há três soluções porque há três pontos de corte” ou “se se corta uma só vez é uma solução se se cortam duas vezes ou mais, há mais soluções”. Nessa mesma linha Castanheda (2015) afirma: “ficou evidente que os estudantes tendem a relacionar a solução de um sistema de três equações com duas incógnitas, com o ponto de intersecção de pelo menos duas das retas que representam graficamente o sistema.”

O professor, neste caso, espera que o aluno já saiba representar retas no plano cartesiano, no entanto, poderia também introduzir esse tipo de representação a partir do sistema de duas equações lineares. A tecnologia ou o discurso que justifica a técnica empregada seria a percepção de que cada uma das equações do sistema pode ser interpretada como representante de uma equação de reta e, como a solução do sistema implica em encontrar valores para x e y que satisfaçam as duas equações, concluir que o ponto de intersecção da representação das duas retas seria a solução do sistema. A teoria que justifica esse discurso seria a representação gráfica de retas na Geometria Analítica. Podemos dizer, assim que temos uma organização matemática pontual.

Apareceu também um segundo método, como mostra a figura 2, denominado método da igualdade ou método da comparação.

Figura 2 – Resolução de sistema de equações lineares pelo método da igualdade

MÉTODO DE IGUALACIÓN

x: Monedas de S/ 2
y: Monedas de S/ 1

Escribiendo las ecuaciones

M. de S/ 2	M. de S/ 1	Total
x	y	9
2x	y	15

$x + y = 9$ Despejamos "y" $y = 9 - x$ --- (I)
 $2x + y = 15$ Despejamos "y" $y = 15 - 2x$ --- (II)

Igualando la ecuación (I) y (II) hallamos el Valor de "x"

$y = y$
 $9 - x = 15 - 2x$
 Sumamos +2x en ambos miembros
 $9 - x + 2x = 15 - 2x + 2x$
 $9 + x = 15$
 Sumamos -9 en la igualdad
 $9 - 9 + x = 15 - 9$
 $x = 6$

Ahora, hallamos el valor de "y" usando la ecuación (I) Reemplazando $x=6$
 $y = 9 - x$
 $y = 9 - 6$ $y = 3$

Fonte. Os autores.

O professor, neste caso, teve o cuidado de indicar que x representava a quantidade de moedas de 2 soles e que y representava a quantidade de moedas de 1 sol, para então representar o contexto do problema em equações, mas em um quadro. Durante sua

resolução tentou explicar cada passo dado. Depois escreveu as equações, $x + y = 9$ e $2x + y = 15$, para indicar que, de cada uma, desejava obter y . A seguir, o professor isolou o valor de y , em ambas as equações, para que fosse possível trabalhar com a seguinte igualdade: $9 - x = 15 - 2x$. A partir da resolução dessa equação encontrou o valor de $x = 6$ que possibilita encontrar o valor $y = 3$. Podemos perceber, na resolução apresentada na figura 2, que o professor tenta descrever sua técnica quando, por exemplo, escreve “despejamos “ y ” ou “isolamos y ” para justificar a igualdade que ele apresenta como “ $y=y$ ”. Além disso, explica os passos da resolução da equação quando escreve “sumamos $+2x$ a los dos membros (somamos $2x$ aos dois membros)””; “sumamos -9 en la igualdad (somamos -9 na igualdade)” e “ahora, hallamos el valor de “ y ” usando la ecuacion I reemplazando $x=6$ (agora achamos o valor de y usando a equação I substituindo $x = 6$)”, no entanto não voltou ao problema para responde-lo. Quando o professor isola os valores de y está buscando um sistema de equações equivalentes $y = 9 - x$ e $y = 15 - 2x$ para poder utilizar o princípio da igualdade algébrica e transformar o sistema em uma equação com uma única incógnita ($y=y$), no caso, $9 - x = 15 - 2x$. Encontrando o valor para x , imediatamente encontra o valor de y e com isso resolve o sistema. No entanto, nem sempre a solução do sistema implica na solução do problema que o gerou, neste caso concreto o contexto do problema exige que a solução seja um número natural, mas não que tenha solução única, a ausência desta discussão é um sintoma de uma álgebra concebida como técnica, não centrada em seu papel modelizador. A terceira técnica é conhecida como método de substituição e a solução apresentada por outro professor está na figura 3.

Figura 3 – Solução de um sistema de equações lineares pelo método de substituição

PROBLEMA 1

$$\begin{aligned} 2A + B &= 15 \\ A + B &= 9 \end{aligned}$$

$$B = 9 - A$$

$$2A + (9 - A) = 15$$

$$A = 6$$

Reemplazamos.

$$2(6) + B = 15$$

Diego tiene 6 monedas de 2 soles y 3 monedas de 1 sol

Fonte. Os autores.

Na apresentação de sua solução o professor não explicita o que será representado por A ou B , mas entendemos que A representa as moedas de 2 soles e B as de 1 sol. Depois de

apresentar as duas equações $2A + B = 15$ e $A + B = 9$, o professor isola B na segunda equação e escreve $B = 9 - A$. Imediatamente substitui o valor de B na primeira equação e encontra que $A = 6$. A seguir, escreve “reemplazamos” ou “substituimos” e escreve: $2(6) + B = 15$ e logo apresenta a resposta do problema: Diego tem 6 moedas de 2 soles e 3 moedas de 1 sol.

Questionados a respeito da justificativa que poderiam dar para o método não souberam explicitar. Um discurso simples (tecnologia), que poderia justificar tal técnica poderia ser: isolo B na segunda equação (tornando-a como uma quantidade conhecida) para substituir na primeira equação porque isso me dá um sistema equivalente: $B = 9 - A$ e $2A_{9-A} = 15$ em que uma das equações tem apenas uma incógnita, que permite determinar o valor de B . Tendo este valor retorno à primeira equação para encontrar o valor de A .

Além dos métodos anteriores, os professores manifestaram conhecer um quarto método denominado de redução ou método da adição (figura 4 que não foi apresentado no quadro negro, mas sim nas soluções escritas nas fichas que receberam).

Figura 4– Solução usando método de redução

1) Diego ahorró S/. 15 en monedas de 2 y 1 soles. Si en total son 9 monedas, ¿cuántas monedas de cada denominación tiene Diego?

$$\begin{array}{r} 2a + b = 15 \\ a + b = 9 \\ \hline \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{r} 2a + b = 15 \\ -a - b = -9 \\ \hline a = 6 \\ b = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 12 + 3 = 15 \\ \text{Por el método de} \\ \text{reducción} \end{array}$$

Fonte. Os autores.

Baseando-se em equivalência de equações e de sistemas de equações lineares o método consiste em multiplicar adequadamente as equações para poder somá-las e obter uma equação equivalente com apenas uma das incógnitas (será detalhado mais à frente).

Outro professor resolveu a tarefa empregando, como técnica, o método de Gauss Jordan ou método de escalonamento, tal como aparece na figura 5.

O professor que apresentou esta solução, primeiro fez uma representação matricial dos coeficientes das equações deixando assim de representar as incógnitas. A seguir, apresentou uma descrição detalhada da técnica, mas sem relaciona-la com o sistema original, mostrando as operações realizadas em cada linha até obter a matriz identidade, no entanto ao apresentar o conjunto solução (C.A.) não o apresenta entre chaves, nem como um par ordenado, quer dizer, não estabelece a concordância entre ambos registros de representação.

Cada uma dessas operações pode ser justificada pelos seguintes princípios de equivalência: somando-se ou subtraindo-se aos membros de uma equação, uma mesma expressão, obtém-se uma equação equivalente à equação dada; multiplicando-se ou dividindo-se os membros de uma equação por uma mesma expressão, diferente de zero e que não contenha a incógnita, obtém-se uma equação equivalente à equação dada (SANGIORGI, 1959, p. 118).

Figura 5 – Solução usando o método de Gauss Jordan

GAUSS-JORDAN

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 15 \\ 1 & 1 & 9 \end{array} \right]$$

• Multiplico por $(-\frac{1}{2})$ primeira fila + segunda fila

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 15 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right]$$

• multiplico fila 2 por (2)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

• multiplico f_2 por (1) + Fila 2

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

• multiplico $(\frac{1}{2})$ a fila 1

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

C.S.: $x = 6$
 $y = 3$

Matriz Identidad $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & s_2 \end{array} \right]$

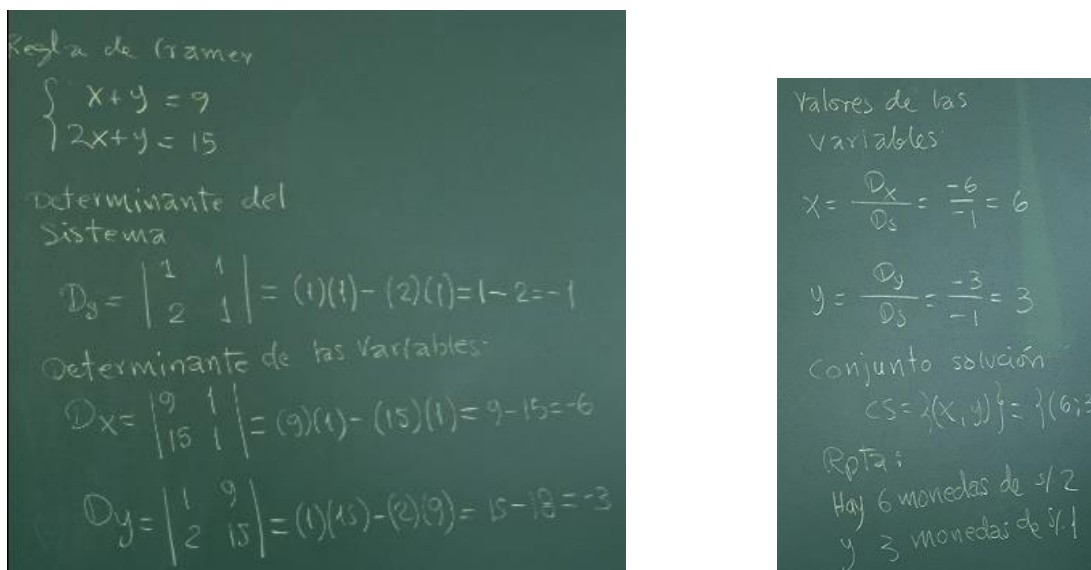
Sistema $\begin{cases} x = s_1 \\ y = s_2 \end{cases}$

Fonte. Os autores.

Assim, até obter o sistema equivalente $x = 6$ e $y = 3$. Tal processo poderia ter cessado no segundo sistema ($2x+y=15$ e $y/2 = 3/2$), por triangulação, pois aqui já é possível determinar o valor de y . Em outros sistemas, além das propriedades de equivalência de equações essa técnica também pode ser explicada por operações que garantem a equivalência de sistemas: trocar de posição duas equações do sistema; multiplicar uma equação por um número não nulo; somar a uma equação uma outra, previamente multiplicada por um número.

Uma outra técnica fazendo uso de determinantes, chamado de método de Cramer (figura 6) também fez parte do discurso do professor.

Figura 6 – Solução usando determinantes ou a regra de



Fonte. Os autores.

Este método consiste na representação dos coeficientes e termos independentes do sistema de equações lineares, com número de equações igual ao número de incógnitas, por determinantes. O primeiro determinante, representado por D , é o determinante dos coeficientes; o segundo, D_x , é obtido substituindo-se a primeira coluna pelos termos independentes e, o terceiro, D_y , substituindo-se a segunda coluna pelos termos independentes. Calculando-se os determinantes obtemos que $x = \frac{D_x}{D}$ e $y = \frac{D_y}{D}$, desde que $D \neq 0$. Mas a questão aqui é justificar porque esse método resolve o sistema proposto, justificativa que nenhum dos professores realizou. Vamos tomar um sistema de duas

equações lineares genérico: $\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$ e identificar os determinantes associados:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, D_x = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix} = md - bn \text{ e } D_y = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix} = an - cm.$$

Agora, vamos tomar o mesmo sistema genérico e o método da adição, por exemplo, para resolvê-lo. Para obter o valor de y vamos multiplicar a primeira linha por $-c$, a segunda linha por a e somar as duas equações.

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -c \cdot ax - cby = -c \cdot m \\ a \cdot cx + a \cdot dy = a \cdot n \end{cases} \Rightarrow (ad - cb)y = an - cm, \text{ ou seja, } y =$$

$$\frac{an - cm}{ad - cb} = \frac{D_y}{D}.$$

Para isolar o valor de x vamos multiplicar a primeira linha por d , a segunda

linha por $-b$ e somar as duas equações. $\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \cdot ax + d \cdot by = d \cdot m \\ -b \cdot cx - b \cdot dy = -b \cdot n \end{cases} \Rightarrow$

$$(ad - bc)x = dm - bn, \text{ ou seja, } x = \frac{dm - bn}{ad - bc} = \frac{D_x}{D}, \text{ desde que } ad - bc \neq 0 \text{ e } D \neq 0.$$

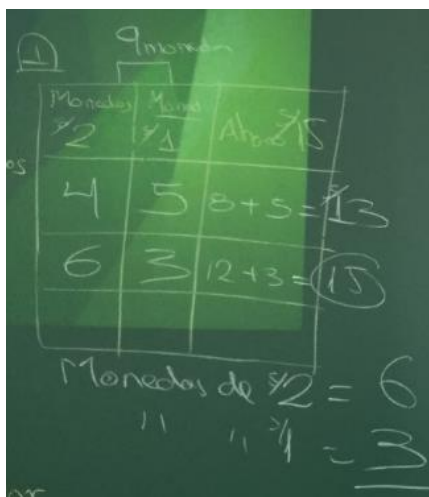
Aqui fica claro que a ausência de um discurso tecnológico teórico impede compreender o porquê da restrição $ad - bc \neq 0$, o que pode levar a explicar porque os estudantes, nestes casos, garantem que o sistema não tem solução.

Uma maneira de tornar mais prática a resolução, tanto pelo método do escalonamento, tanto pelo método de Cramer e partir de determinantes dois por dois, neste caso ($2 \times 1 - 1 \times 1$ e $2 \times 9 - 1 \times 15$). No caso de Cramer temos $D = 1$ e $D_y = 3$ o que nos garante que $y = 3$, ou no caso do escalonamento entender que estamos multiplicando a segunda linha por 2, a primeira por -1 e depois somando. Esta forma de resolver pode ser aplicada a sistemas com mais equações e incógnitas mantendo a mesma justificativa.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1 & 15 \\ 1 & 1 & 9 \\ \hline & 1 & 3 \end{array}$$

Um método distinto dos anteriores foi empregado por um professor, se trata do método de tentativa e erro, tal como aparece na figura 7.

Figura 7 – Solução por tentativas e erro



Fonte. Os autores.

O método consiste em supor uma quantidade qualquer para as moedas, no caso da figura 7, foram escolhidas 4 moedas de 2 soles e 5 moedas de 1 sol porque a soma dá 9, no entanto, o dobro da primeira mais a segunda dá 13, quando deveria dar 15. Buscou então uma outra soma 9 e escolheu 6 para a quantidade de moedas de 2 soles e 3 para a de 1 sol, que satisfaz as condições do problema pois o dobro da primeira somado à segunda dá 15. Esta técnica pode ser justificada pelo método da falsa posição, e método pode ser justificado pelo método da falsa posição para busca de valores desconhecidos, usado desde a antiguidade, que consiste em supor um valor específico para assumir o valor

desconhecido e que, em geral, pode ser falso. A seguir era utilizado uma relação de proporção para obter o verdadeiro valor.

Como já afirmamos, diante do pedido de justificativa para as técnicas empregadas os professores, em geral, descreveram as técnicas utilizadas ou indicaram que se tratava de equações. Em conclusão, não apresentaram argumentos que fizessem menção de que se estava transformando o sistema original em sistemas equivalentes.

Para além do discurso tecnológico-teórico que justifica as técnicas apresentadas para resolver sistemas de equações lineares, neste caso formados por duas equações e duas incógnitas cabe discutir o alcance de tais métodos. No caso do método gráfico o alcance seria, no máximo, um sistema de três equações lineares com três incógnitas. Para os outros métodos caberia a verificação da quantidade de operações necessárias na medida em que se aumentam as equações e as incógnitas e, nesse sentido, o método de Gauss é o que envolve o menor número de operações, além de poder ser aplicado a qualquer sistema de m equações e n incógnitas, enquanto que o método de Cramer só é válido se $m = n$ e o determinante da matriz dos coeficientes não é zero.

Considerações finais

Postulamos que uma das restrições que impede reconhecer o papel modelizador da álgebra é que os professores não possuem meios que lhes permitam encontrar relações entre as diferentes técnicas que empregam para resolver um mesmo problema. Tais conexões poderiam ser estabelecidas, por exemplo, por meio do reconhecimento da tecnologia que lhes dá respaldo tal como esboçamos neste artigo.

No caso particular dos sistemas de equações lineares, tema que está no currículo para o ensino básico, no entanto, a ênfase é dada apenas ao bloco do saber-fazer, isto é, às suas técnicas de resolução. As justificativas que validam tais técnicas, bem como seu alcance estão ausentes. Isto impede a possibilidade de discutir o domínio de validade das técnicas que, em alguns casos, tem um alcance muito restrito, como é o caso da resolução gráfica que só atende a sistemas com duas equações e duas incógnitas e com soluções inteiras.

Não se questiona se um problema requer os sistemas para sua solução: os problemas se justificam porque permitem a automatização das técnicas. Embora se declare que a razão de ser dos sistemas de equações lineares seja a resolução de problemas, não se apresentam situações problemáticas que permitam mobilizar os sistemas como um caminho de resolução: em nenhum caso se verifica que a solução encontrada corresponde à solução

do problema apresentado, tão pouco aparecem problemas sem solução, nem problemas com infinitas soluções que correspondam a problemas com um número finito de soluções, ou ainda em que a solução encontrada para o sistema não resolva o problema.

Assim, o bloco composto de tarefa e técnica são trabalhados, mas o bloco do saber composto de tecnologia e teoria não e, ainda, a razão de ser desse conteúdo no ensino que, geralmente, é associada à resolução de problemas também não ocorre. Necessitamos de problemas melhor elaborados para esse fim. Tratamos aqui algumas técnicas, presentes nos conhecimentos dos professores e evidenciamos a ausência de justificativas para as mesmas. Estas se apoiam em uma tecnologia-teoria comum: os sistemas de equações equivalentes; explicitá-lo permitirá reconhecer que é possível construir uma organização matemática local. Desde já, é indispensável que neste processo se construa um discurso tecnológico-teórico acessível a esse nível de ensino.

Referências

- ALMOULOU, S. A. Teoria Antropológica do Didático: metodología de análise de materiais didáticos. **UNION - Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, n. 42, p.09-34, 2015.
- BOLEA, P. **El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares**. 2002, 262p. Tese (doutorado). Facultad de Ciencias, Universidad de Zaragoza, Espanha, 2002.
- BOSCH, M. & GASCÓN, J. Organiser l'étude 2. Théories & empiries. In Dorier, J.L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (eds). **Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques**, Grenoble: La Pensée Sauvage, 23-40, 2002.
- CASTAÑEDA, A. **Diseño de una estrategia didáctica para lograr un aprendizaje significativo del concepto de ecuación, modelando situaciones problema en el grado noveno, por medio de métodos gráficos**. 2015. Tesis de maestria. Universidad Nacional de Colombia.
- CHEVALLARD, Y. Enseignement de l'algebre et transposition didactique. **Rend. Sem. Mat. Univ. Pol.** . V.52, n.2. Torino: 1994.
- CHEVALLARD, Y L'analyse des pratiques enseignantes em Théorie Anthropologique du Didactique. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, 19(2), 221-266, 1999.
- COULANGE, L. **Étude des pratiques du professeur du doublé point de vue écologique et économique**. Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de troisième. Tese (doutorado). Universidad Joseph Fourier, Grenoble I, 2000.

GAITA, C. & SILVA, M. J. F. Perspectivas em Didática e Álgebra. Em **Educação Matemática: epistemologia, didática e tecnologia**. Capítulo 4, São Paulo, Brasil (no prelo): 2018.

GASCÓN, J. **Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'arithmétique généralisée**. In: *Petit X*, n. 37, p.43-63, 1993-1994.

OCHOVIET, F. **Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas**. 2009. Tesis de doctorado. CICATA -IPN. México.

SANGIORGI, O. **Matemática para a segunda série ginásial**. São Paulo: Companhia Editora Nacional: 1959.