

## **Elementos do processo evolutivo do conceito das funções seno e cosseno: contribuições para uma razão de ser na construção de um PEP**

### **Elements of the evolutionary process of the concept of sine and cosine functions: contributions to a reason to be in the construction of a PEP**

ELIANE SANTANA DE SOUZA OLIVEIRA<sup>1</sup>

LUIZ MARCIO SANTOS FARIAS<sup>2</sup>

#### **Resumo**

*As funções seno e cosseno são consideradas como um dos conteúdos de difícil entendimento. Desse modo, fomos em busca na história, de elementos que nos permitissem compreender o processo evolutivo das funções seno e cosseno, e detectar possíveis incompletudes que possa ter influenciado o ensino e aprendizagem atual desses conceitos. Realizamos uma análise bibliográfica com o objetivo de construir nossa revisão histórica, e compreender fatores determinantes na evolução do conceito das funções seno e cosseno. E baseado nesses estudos, notamos - durante todo o processo evolutivo do campo da trigonometria - a existência de técnicas que venha evoluir com o passar dos tempos, mostrando uma ligação forte com a astronomia, bem como a existência da razão de ser social, em especial, no período da pré-história e Idade Antiga, pois a partir da Idade Média até a Idade Moderna começaram a prevalecer com maior ênfase as razões matemáticas. Esse fato pode ter influenciado na perda da razão de ser social no ensino das funções seno e cosseno. Destarte, a partir dos resultados da análise, ressaltamos a importância em desenvolver um PEP que pode se apoiar em Questões Sócio-científicas-QSC, com intuito de resgatar o ensino das funções seno e cosseno com a razão de ser social integrando não apenas o conhecimento científico, mas conhecimentos éticos e sociais.*

**Palavras-chave:** *Funções seno e cosseno. Razão de ser. Didática da Matemática. Percurso de estudo e pesquisa.*

#### **Abstract**

*The sine and cosine functions are considered as one of the contents of difficult understanding. Thus, we searched in history for elements that allowed us to understand the evolutionary process of sine and cosine functions, and to detect possible incompleteness that may have influenced the teaching and learning of these concepts. We performed a bibliographical analysis with the purpose of constructing our historical review, and to understand determinant factors in the evolution of the concept of sine and cosine functions. And based on these studies, we note - throughout the evolutionary process of the field of trigonometry - the existence of techniques that will evolve over*

<sup>1</sup> Universidade Federal da Bahia, Brasil, annystar\_@hotmail.com

<sup>2</sup> Universidade Federal da Bahia, Brasil, lmsfarias@ufba.com

*time, showing a strong connection with astronomy, as well as the existence of social reason in particular, in the period of prehistory and Old Age, since from the Middle Ages until the Modern Age began to prevail with greater emphasis on mathematical reasons. This fact may have influenced the loss of social reason in the teaching of sine and cosine functions. Based on the results of the analysis, we emphasize the importance of developing a PEP that can be based on Socio-Scientific Questions-QSC, in order to rescue the teaching of the sine and cosine functions with the social reason of being integrating not only knowledge scientific, but ethical and social knowledge*

**Keywords:** *Sine and cosine functions. Reason to be.*

### **Résumé**

*Les fonctions sinus et cosinus sont considérées comme l'un des contenus difficiles à comprendre. Ainsi, nous avons recherché dans l'histoire des éléments nous permettant de comprendre le processus évolutif des fonctions sinus et cosinus et de détecter une éventuelle incomplétude qui aurait pu influencer l'enseignement et l'apprentissage de ces concepts. Nous avons effectué une analyse bibliographique dans le but de construire notre historique et de comprendre les facteurs déterminants de l'évolution du concept de fonctions sinus et cosinus. Et sur la base de ces études, nous notons - tout au long du processus évolutif du domaine de la trigonométrie - l'existence de techniques qui évolueront avec le temps, montrant un lien fort avec l'astronomie, ainsi que l'existence de la raison sociale en particulier, dans la période de la préhistoire et de la vieillesse, depuis le Moyen Âge jusqu'à l'ère moderne a commencé à prévaloir en mettant davantage l'accent sur les raisons mathématiques. Ce fait peut avoir influencé la perte de raison sociale dans l'enseignement des fonctions sinus et cosinus. Sur la base des résultats de l'analyse, nous soulignons l'importance de développer un PEP qui puisse s'appuyer sur Questions socio-scientifiques-QSC, afin de sauver l'enseignement des fonctions sinus et cosinus avec la raison sociale d'intégrer non seulement le savoir connaissances scientifiques, mais éthiques et sociales.*

**Mots-clés:** *Fonctions sinus et cosinus. Raison d'être. Didactiques des Mathématiques. Parcours d'étude e recherche*

### **Resumen**

*Las funciones seno y coseno se consideran como uno de los contenidos de difícil entendimiento. De ese modo, fuimos en busca en la historia, de elementos que nos permitieran comprender el proceso evolutivo de las funciones seno y coseno, y detectar posibles incompletudes que pudieran haber influenciado la enseñanza y aprendizaje actual de esos conceptos. Realizamos un análisis bibliográfico con el objetivo de construir nuestra revisión histórica, y comprender factores determinantes en la evolución del concepto de las funciones seno y coseno. Y, basándose en estos estudios, notamos, durante todo el proceso evolutivo del campo de la trigonometría, la existencia de técnicas que evolucionen con el paso de los tiempos, mostrando un vínculo fuerte con la astronomía, así como la existencia de la razón de ser social, , en el período de la prehistoria y edad antigua, pues a partir de la Edad Media hasta la Edad Moderna comenzaron a prevalecer con mayor énfasis las razones matemáticas. Este hecho puede haber influido en la pérdida de la razón de ser social en la enseñanza de las funciones seno y coseno. De este modo, a partir de los resultados del análisis, resaltamos la importancia en desarrollar un PEP que puede apoyarse en Cuestiones socio-científicas-QSC, con el propósito de rescatar la enseñanza de las funciones seno y coseno con la*

*razón de ser social integrando no sólo el conocimiento científico, pero conocimientos éticos y sociales.*

**Palabras clave:** *Funciones seno y coseno. Razón de ser. Didáctica de las matemáticas. Recorrido de investigation e pesquisa.*

## **Introdução**

Ao falar em matemática, pensa-se na disciplina a qual os alunos possuem mais dificuldades. Podemos observar os reflexos dessas dificuldades em avaliações de larga escala, as quais o Brasil, ao que se refere ao ensino e aprendizagem da matemática na Educação Básica, ocupa uma posição não muito satisfatória. A avaliação do PISA reforça essa situação ao mostrar em seu relatório de desempenho dos países, na avaliação de 2015 dos 70 países participantes o Brasil ocupou a posição entre 66<sup>a</sup> em matemática (OECD, 2015).

Destarte, temos o ensino de trigonometria, em especial funções seno e cosseno como um dos conteúdos mais difíceis na concepção dos alunos desde o Ensino Médio até no Ensino Superior (PEDROSO, 2012). De acordo com algumas pesquisas como Pedroso (2012), Coloneze (2012) e Costa (1997), essa dificuldade dos alunos em trigonometria e funções trigonométricas está relacionada à forma trabalhada do conteúdo, sendo o mesmo apresentado sem sentido para os alunos, muitas vezes pela ausência de aplicação desses assuntos com a realidade dos mesmos.

Em busca de compreendermos a evolução do conceito das funções seno e cosseno, apresentamos nesse trabalho um estudo histórico-epistemológico a respeito do desenvolvimento da trigonometria e funções trigonométricas no intuito de compreender a gênese do conhecimento científico.

Sendo as funções seno e cosseno o objeto matemático dessa pesquisa, ampliamos nossa análise histórica e epistemológica para trigonometria e funções trigonométricas visto que, para compreender a evolução do conceito das funções seno e cosseno, se faz necessário visitar a evolução da trigonometria até chegar às funções trigonométricas.

A partir das análises tecidas é possível perceber as dificuldades geralmente encontradas no ensino e aprendizagem e distingui-las daquelas que são inevitáveis para o processo de construção do conhecimento (ALMOULOU, 2007).

Nesse sentido, buscaremos respostas aos seguintes questionamentos: como se desenvolveram as funções trigonométricas? Quais incompletudes surgiram no processo

de desenvolvimento de funções trigonométricas e se as mesmas ainda permanecem?  
Quais razões de ser das funções trigonométricas?

Além disso, buscamos nesse trabalho refletir como a presente análise histórica-epistemológica, pode influenciar na construção e planejamento do Percurso de Estudo e Pesquisa-PEP para licenciandos em matemática, o qual é o objetivo maior da tese da primeira autora. Esse trabalho é um recorte do mesmo. Essa análise faz parte do Modelo Epistemológico Dominante – MED da tese.

A presente análise histórica-epistemológica tem como principais referências Kennedy (1992), Fonseca (2010; 2015), Boyer (1974), entre outros.

Com base nos estudos realizados, utilizaremos para análise as subdivisões da trigonometria considerada por Fonseca (2015), a saber: trigonometria esférica, trigonometria plana (geométrica – triângulo retângulo; analítica – circular: circunferencial; cônica: parabólica, elíptica e hiperbólica;) etc. Salientamos que essa análise não se limita apenas a história da matemática, mas também a outras ciências que envolvem a trigonometria.

Nossa análise epistemológica se inicia a partir das necessidades práticas e fenômenos naturais até chegar a formalização dos conceitos do campo da trigonometria. A mesma é dividida em quatro marcos históricos, denominados de estágios. Após explicitação dos marcos históricos, fizemos uma reflexão sobre os marcos históricos, analisando as possíveis incompletudes no processo evolutivo do campo trigonometria. E por fim apresentamos as influências da análise para o planejamento do Percurso de Estudo e Pesquisa que será desenvolvido em um trabalho futuro.

## **O primeiro marco para os elementos históricos e epistemológicos**

As funções trigonométricas, conforme traz Nogueira (2007 *apud* FONSECA, 2015), nasce da astronomia. Destarte para analisar epistemologicamente essas funções, é necessário visitarmos o campo da física, geometria e astronomia.

De acordo com Chevallard (2004) a matemática se desenvolveu a partir de necessidades básicas da população, o que especificamente ele chama de razão de ser social. Chevallard (2004) afirma que atualmente vem se perdendo essas razões de ser sociais da matemática. Nesse sentido, a nossa análise parte da investigação das razões de ser sociais do desenvolvimento da trigonometria e funções trigonométricas, a fim de compreendermos a epistemologia do nosso objeto de saber funções seno e cosseno, bem como nos

embasarmos para construção de uma proposta de Percurso de Estudo e Pesquisa-PEP, fundamentado em elementos de questões sócio-científicas-QSC.

O surgimento da trigonometria e suas funções veem no intuito de resolver problemas relacionados a calcular distâncias inacessíveis entre a terra e a lua; controlar variáveis, na observação da natureza sobre astros, clima, terra e outros; e também para cálculo de incógnita (FONSECA, 2015). De acordo com Kennedy (1992), a análise da história da trigonometria nos revela o surgimento de três áreas da matemática, a saber: álgebra, análise e geometria.

Analisando as evidências históricas sobre o desenvolvimento da trigonometria e das funções trigonométricas, nos deparamos com a razões de ser sociais que motivaram o desenvolvimento de ambas. Encontramos como razões de ser sociais que motivaram o desenvolvimento desses conceitos, a necessidade agrícola, compreensão de corpos celestes, calcular distâncias inacessíveis, e assim a astronomia junto a geometria dá lugar para o surgimento das primeiras evidências das funções trigonométricas. Com base em Fonseca (2012), essa junção entre a astronomia e a geometria, permite o surgimento da gênese de suas notáveis especializações: o campo da trigonometria, o qual contempla a trigonometria e as funções trigonométricas.

Baseado nos estudos de Kennedy (1992), no período pré-histórico, já há indícios do desenvolvimento do campo da trigonometria por meio de sequencias numéricas relacionando ao comprimento das sombras com as horas do dia. Destarte, temos a compreensão do tempo, por meio de sombras de varetas na vertical ao longo do dia, marca o início da história da trigonometria

Esses registros foram encontrados no alto Egito, mas também em outras localidades como na Índia, Grécia, Mesopotâmia, entre outras.

Com base na análise desse período pré-histórico, inferimos o surgimento da primeira razão social da trigonometria e funções trigonométricas, a qual foram os fenômenos climáticos. A agricultura na época era a maior atividade de subsistência, e nesse sentido, se fez necessário compreender as mudanças climáticas de cada estação, que influenciava na plantação, desde a movimentação do sol e da lua, até as mudanças climáticas. Isso motivou a necessidade de uma formalização matemática, a qual segundo Fonseca (2015) surgiu a partir da criação dos primeiros triângulos, enquanto objeto matemático, que permitia fornecer possíveis respostas para melhor período para produção agrícola.

Destarte, Kennedy (1992) destaca que nesse momento aparece a noção de função do desenvolvimento do campo da trigonometria, sendo a hora do dia e as estações do ano

como variáveis independentes. Kennedy (1992) categorizou esses marcos como estágios, sendo a função sombra como o Estágio 1. Segundo o autor a identidade da trigonometria ainda foi posta a parte, e esse estágio foi como uma disciplina escolar, em especial, para agrimensores e navegadores.

## **Segundo marco para os elementos históricos e epistemológicos**

O segundo marco histórico foi a função corda de um arco de círculo arbitrário, sendo essa função que originou a função seno. Segundo Kennedy (1992) foi o teorema de Menelau que tratava de quadriláteros completos planos ou esféricos, que permitiu a expansão da trigonometria à esfera.

Essas informações surgiram na região do Mediterrâneo Leste, e foram registradas em grego, em média no século II. E foi na Índia que o centróide das atividades se deslocou, e a função corda tornou-se variações do seno. No período do século IX ao século XV, na Síria e na Ásia Central, a nova função seno e as antigas funções sombras foram tabuladas em sexagésimos. Kennedy (1992) afirma que “com esse desenvolvimento surgiu a primeira trigonometria genuína, no sentido de que só então o objeto de estudos tornou-se o triângulo plano ou esférico, seus lados e ângulos” (1992, p.02). À medida que essa nova trigonometria foi se expandido para diversas regiões, a mesma foi se desenvolvendo, de modo a concluir que o crescimento da trigonometria é exponencial em relação ao tempo. Nesse sentido, o instrumento básico é a função corda.

Observamos no desenvolvimento da trigonometria a utilização da geometria e da álgebra geométrica já trabalhada por Euclides, nos *Elementos*. Entretanto, Fonseca (2015) destaca que o desenvolvimento da astronomia se baseou na concepção de esfera celeste, antes mesmo de Hiparco e da trigonometria plana de cordas.

De acordo com Kennedy (1992), para explorar essa ideia da esfera, era necessário o desenvolvimento de “uma técnica para calcular uma grandeza incógnita sobre a esfera em termos de grandezas conhecidas” (p.08), ele ainda frisa que uma opção de solução seria um cálculo que envolvesse entidades esféricas em si, ângulos, superfícies e arcos. E assim uma forma alternativa prática, seria a transformação dos objetos esféricos em regiões planas, e trabalhar com o cálculo de cordas, conhecida como projeção esferográfica (estereográfica), podemos observar essa projeção como uma técnica prática.

Assim, Kennedy ressalta alguns pontos importantes a serem considerados, um deles é que qualquer configuração a respeito da esfera celeste composta de círculos, pode ser

transformado em uma figura plana, constituída por círculos e linhas retas, sendo resolvida por tábuas de sombras ou cálculo de cordas. Ele destaca que por mais que pareça simples, a resolução é complexa e longa. Outro ponto importante é que por mais que um polígono esférico não é uma figura plana, seus lados são.

### **O terceiro marco histórico para os elementos históricos e epistemológicos**

O marco histórico seguinte, é destacado pelo processo de transformação de uma esfera celeste em uma figura plana, determinando assim uma projeção esferográfica para ser resolvida por cálculo de cordas. A partir desse terceiro marco temos o surgimento da função esferográfica que representa aplicações da função corda. Destacando um dos pontos citados acima, o qual traz que os lados de um polígono esférico é plano, nessa função esferográfica, busca-se “forçar” em um único plano a acomodação de todos os círculos apresentados em uma situação, essa acomodação pode se por projeção ortográfica ou por rotação.

Kennedy (1992) discute que ao realizar essa acomodação, se mantém a verdadeira grandeza dos arcos, sem apresentar distorções, podendo ser realizado procedimentos de cálculo e de medição, esse método é chamado de analemas, que são métodos geométricos descritivos. Ele ressalta que os analemas surgiram nos tempos clássicos, foram bastante utilizados e divulgados na Idade Média e que até hoje são utilizados (KENNEDY, 1992). Já para trabalhar com corpos esféricos em sua própria superfície, Menelau de Alexandria desenvolveu uma técnica, conforme apresenta Kennedy (1992), porém por só ter uma versão em árabe, ele se baseia no Almagesto (I, 13). Essa técnica conhecida como Teorema de Menelau, tem os casos plano e esférico, e sua prova, dar-se pelo caso plano. Por muito tempo, ou melhor, por alguns séculos falar do teorema de Menelau significava falar da trigonometria esférica, não significa que o mesmo não seja importante, é obvio que teve seu valor e poder, porém tímido para solução dos problemas da astronomia esférico (KENNEDY, 1992). Nesse sentido, observa-se a evolução da trigonometria e seu desenvolvimento, baseados em razões sociais, as quais permitiram a validação ou não de determinado conhecimento para aplicação social.

Ao observar as aplicações citadas acima, referentes a função corda, percebemos conforme traz Kennedy (1992) que é essencial duplicar o arco antes de utilizá-lo em uma tábua de cordas. Ele ainda afirma que é mais pertinente a existência de uma tábua na qual o arco

original é uma variável independente, e que quando pensaram em calcular utilizando a metade da corda de um arco duplo, surgiu a função seno.

### **O quarto marco para os elementos históricos e epistemológicos**

Ao pensar em calcular e usar a metade da corda de um arco duplo surgiu a função seno, a qual define o quarto marco. Apesar de contribuições de diferentes ideias matemáticas, da Grécia, Babilônia entre outros, acredita-se que foram os indianos que inventaram a função seno, Kennedy (1992) ainda afirma que foi na Índia que a tábua de senos mais antiga foi descoberta.

Os dados encontrados sobre a função seno inventados pelos indianos, foram baseados através de um compêndio de astronomia conforme afirma Kennedy, que era composto por “regras crípticas em versos redigidos em sânscrito, com poucas explicações e nenhuma prova” (1992, p.14), revisado muitas vezes, que é quase impossível determinar quais partes estão em suas palavras originais.

Os indianos construíram uma tábua de senos, sem auxílio da geometria, resultando em vinte quatro senos tabulados em ordem, a partir do primeiro seno, o qual consideraram sendo “a oitava parte dos minutos de uma secção zodiacal é chamada primeiro seno [ $S_1 = 30^\circ/8 = 1800'/8 = 225'$ ]” (KENEDDY, 1992, p.14). Observamos o raciocínio utilizado para construção os senos tabulados, e conseqüentemente para encontrar os senos subsequentes, o pensamento foi análogo, a partir de  $S_1$ , observem: “este acrescido da diferença obtida após subtraí-lo do quociente resultante de dividi-lo por si mesmo, é o segundo seno [ $S_2 = S_1 + (S_1 - S_1/S_1)$ ]” (KENEDDY, 1992, p.14).

A partir dos avanços nesses estudos relacionados a função seno, Kennedy (1992) afirma que os indianos astrônomos além de introduzir a função seno, eles avançaram intuitivamente em assuntos que forma denominados com o passar dos tempos em equações de diferenças e teoria da interpolação.

Em sua obra, Kennedy (1992) fala sobre a regra de quatro quantidades que foi relevante para marcar o estágio de transição de um cálculo que trabalhava com quadrilátero esférico, para trigonometria esférica, envolvendo os lados e ângulos de um triângulo esférico. Ele enuncia o teorema dizendo que: “num par de triângulos retângulo esféricos que tem um ângulo agudo ( $A, A'$ ) em comum ou igual, vale a seguinte relação:  $(\text{sen } a)/(\text{sen } a') = (\text{sen } c)/(\text{sen } c')$ ”. Kennedy ainda afirma que o teorema é transicional, pois os



ângulos não intervêm. E a partir desses estudos se descobrem para os triângulos esféricos gerais a lei dos senos, a saber:

$$\frac{\text{Sen } a}{\text{Sen } A} = \frac{\text{Sen } b}{\text{Sen } B} = \frac{\text{Sen } c}{\text{Sen } C}$$

Nesse teorema, utiliza-se explicitamente a função dos ângulos, fazendo parte da nova trigonometria.

Esses marcos trabalhados até aqui está bastante atrelado a geometria, e sua evolução foi resultante de técnicas de cálculos e numéricas. E foi a partir do século IX que as tábuas de sombras horizontais, ou seja, sombras estendidas, eram utilizadas para mostrar “o comprimento da sombra projetado em um plano horizontal como uma função de altitude do Sol” (KENNEDY, 1992, p.22). Essas tábuas eram de cotangente de  $\theta$ , ou seja  $\text{cotg } \theta \equiv R \text{ cotg } \theta$ . Em seguida Kennedy (1992) apresenta as tábuas da sombra reversa conhecida como  $\text{tg } \theta$ , ou tangente de  $\theta$ . Logo após traz a hipotenusa do triângulo representado pela sombra e a hipotenusa do triângulo representado pela sombra estendida que respectivamente são secante de  $\theta$  e cossecante de  $\theta$ . E por fim, afirma que ao final do século IX as funções trigonométricas já estavam sendo trabalhadas e suas identidades também, sendo 6 essas funções (seno, cosseno, cotangente, tangente, secante e cossecante).

Após esse desenvolvimento das funções, durante o período da Antiguidade e da Idade Média, e mesmo após as atividades terem centralizados na Europa, a linguagem ainda trabalhada era a linguagem comum, sem muito simbolismo. Na trigonometria, conforme Kennedy (1992) afirma, foi François Viète (1540-1603) que formalizou simbolicamente a trigonometria trabalhada na época por meio de notações matemáticas. Boyer (1974) destaca o problema de trisseccção do ângulo resultava em uma equação cúbica, e partir desse resultado a trigonometria se tornou essencial para resolver equações de graus mais elevados.

Fonseca (2010) ressalta também que esses resultados permitiram que a trigonometria estimulasse os matemáticos durante o final do século XVI e início do século XVII, para que os mesmos publicassem esses resultados de Viète em seus livros textos.

E por fim, após a introdução aos símbolos na trigonometria, e com os avanços matemáticos a respeito de análise, com a invenção do cálculo infinitesimal como aborda Kennedy (1992), a trigonometria se deixa levar por essa corrente. E de instrumento de mensuração da geometria, passa a ser um conjunto de relações entre os números

complexos. Esse processo se iniciou a partir da escrita de funções trigonométricas como séries infinitas realizadas por Isaac Newton ao fim do século XVII.

Observamos que Newton já começava a ver uma relação epistemológica da trigonometria com as funções exponenciais. E a partir dessas evoluções, e com o reconhecimento dos números imaginários, Kennedy (1992, p.27) mostra as contribuições de Leonhard Euler em 1740 ao escrever  $e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$  e definiu as funções trigonométricas como  $\text{sen } z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  e  $\text{cos } z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$ . E ainda afirma que todas as identidades conectadas as funções podem derivar dessas definições.

De acordo com a análise histórico-epistemológica aqui apresentada, observamos quatro estágios de desenvolvimento do campo da trigonometria que conta do avanço da trigonometria e funções trigonométricas. E a partir dos mesmos notamos a presença forte do que Chevallard (1992) chama de razão social, a qual vem sendo perdida no ensino de matemática atual.

### **Elementos históricos e epistemológicos consideráveis**

Nessa pesquisa temos por objetivo compreendermos a evolução do conceito das funções seno e cosseno. Por esse motivo, procuramos destacar nas análises elementos históricos e epistemológicos que sejam capazes de influenciar na construção e planejamento do Percorso de Estudo e Pesquisa-PEP para licenciandos em matemática ao que se refere ao ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno. De acordo com as análises tecidas, observamos que o desenvolvimento da trigonometria e funções trigonométricas, se deram baseadas em razões de ser sociais relacionados aos sujeitos da época. E a partir dessas motivações sociais, avançaram os estudos, permitindo assim, o desenvolvimento da álgebra, análise e geometria. Esse processo de desenvolvimento ocorreu em diversas partes do mundo, com diferentes povos contribuindo para tal evolução dos conceitos em questão.

Notamos que no processo de desenvolvimento da trigonometria, a motivação ou razão social teve grande contribuição para o desenvolvimento da mesma, porém isso não ocorreu em todo o desenvolvimento, ou seja, na Pré-história, Idade Antiga, Idade Média e Idade Moderna.

De acordo com os estudos realizados e a pesquisa de Fonseca (2015), temos que a motivação social, ou razão social esteve presente na Pré-história com a mudança

climática, plantio, compreensão do tempo e movimentos dos astros celestes; na Idade Antiga com as fases da lua, os pontos cardeais, as estações do ano e o calendário astrológico; a partir da Idade Média isso já se modifica, pois as principais motivações foram previsões astrológicas, mudanças de técnicas e separação da trigonometria e astronomia. Observamos nessa fase a motivação social não sendo tão forte, como nas demais; e na Idade Moderna as motivações são o simbolismo algébrico, a invenção do cálculo infinitesimal e a descoberta do domínio dos complexos. Nessa fase da Idade Moderna podemos perceber que a motivação já está diretamente ligada ao domínio matemático, não mais relacionado a uma razão social.

Inferimos assim, que no decorrer do processo histórico do desenvolvimento da trigonometria e funções trigonométricas, as razões de ser sociais, veio se perdendo. E isso pode ter influenciado no cenário que temos atualmente no ensino, o qual a razão social do conhecimento matemático vem se perdendo.

Assim, buscando resgatar um ensino e aprendizagem de funções trigonométricas, que busque a valorização das razões social do saber, como modo de aproximar os conteúdos matemáticos aos discente, almejamos desenvolver uma proposta para analisar como licenciandos em matemática integram instrumentos tecnológicos para o ensino de funções seno e cosseno, por meio de um PEP baseado em uma QSC.

## **Elementos históricos e epistemológicos consideráveis para construção do PEP**

Nesse sentido, baseado na importância da razão de ser social destacado por Chevallard (2004), e com a reflexão da análise histórica-epistemológica desse trabalho, explicitaremos um pouco sobre o PEP.

Antes de explicitarmos um pouco sobre o PEP, nos convém situar o Modelo Epistemológico Dominante-MED e o Modelo Epistemológico de Referência-MER. O MED nos permite compreender aspectos que estão vinculados ao nosso saber de referência funções seno e cosseno (LUCAS, 2010), relacionado à evolução do mesmo, bem como ele está atualmente nas instituições dominantes.

Para construção do MED, realizamos além da análise aqui explicitada histórica-epistemológica, análises institucionais de instituições onde nosso saber vive, a exemplo o livro didático do Ensino Médio, o livro da disciplina de Pré-Cálculo, documentos norteadores da educação como os Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática e a

Base Nacional Comum, entre outros, para revelar as condições e restrições do nosso saber, tomando como nossa problemática de base, para que a partir do que for revelado possamos construir o MER para nossa problemática possibilística.

De acordo com Farras, Bosch & Silva (2013), o MER apresenta um caráter provisório, dando possibilidades de desconstrução e reconstrução de praxeologias. O MER surge como uma resposta aos questionamentos levantados no MED. Assim como discute os autores, o MER emancipa a ciência e a formação didática, questionando as instituições envolvidas na problemática apresentada, baseado nos elementos teóricos apresentados no quadro teórico e resultados de pesquisas que proporcionem embasamentos para construção de um Percorso de Estudo e Pesquisa – PEP, que é parte integrante de um Modelo Didático de Referência – MDR.

Em nosso MER, tomamos como base o estudo das funções trigonométricas, valorizando as suas diferentes representações matematicamente. No MER estamos realizando análises de pesquisas envolvendo as funções seno e cosseno com o uso do Geogebra a nível internacional, a fim de revelar o que está posto e a partir das condições reveladas construir nosso Percorso de Estudo e Pesquisa-PEP. Mas neste artigo nos limitaremos na análise histórica-epistemológica e na influência da mesma para construção do PEP. Salientamos que o MED e o MER são partes essenciais para construção de nosso PEP, mas serão revelados em um trabalho futuro.

Tomamos como fundamentação teórica a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard, e como metodologia A Engenharia do Percorso de Estudo e Pesquisa – PEP de Chevallard, Bosch e Gascón (2001).

O PEP trata-se de uma proposta de engenharia focada na motivação e no desenvolvimento de conceitos e noções matemáticas que tenham sentido para os estudantes, levando em conta os conhecimentos prévios dos mesmos e exigindo ainda para o seu desenvolvimento uma mudança do contrato didático.

O PEP propõe uma nova forma de olhar os problemas relacionado ao ensino e aprendizagem da matemática. Essa nova maneira de olhar é a partir de uma questão geratriz e/ou um tema central, e em seguida busca-se o desenvolvimento de todo o processo em busca de uma boa resposta. Salientamos a existência de questões secundárias e ações que visam nortear essa resposta, até chegar o que Chevallard (2004) chama de resposta R , ou seja, uma boa resposta.

A questão geratriz é o ponto de partida que irá proporcionar todo o desenvolvimento do PEP.

Nesse sentido, buscamos desenvolver um PEP que envolva o ensino e aprendizagem de funções seno e cosseno. De modo a permitir que a partir da Q0 derive questões secundárias. E assim, buscando levar a matemática não apenas como um conteúdo específico acadêmico, mas sim mostrando a matemática como meio de desenvolvimento, reflexão para atender as necessidades e anseios da população.

A Q0 pode ser uma questão aberta, que permita questões derivadas, que podem ser norteadoras para alcançar nosso objetivo. Para isso podemos incorporar ao PEP por exemplo, uma QSC como nossa Q0.

Uma QSC é baseada em um contexto Ciência, Tecnologia, Sociedade e Ambiente-CTSA. Esse movimento apresenta um caráter interdisciplinar, manifestando a preocupação central com os aspectos sociais relativos às aplicações da ciência e tecnologia, o que se vincula diretamente à formação da cidadania (BORGES *et al.* 2010). As QSC podem ser entendidas como casos controversos que, envolve não apenas conhecimentos científicos, mas éticos, políticos e sociais, que buscam a argumentação, e a tomada de decisão após uma crítica reflexão sobre temas que envolve o contexto CTSA (ZEIDLER; NICHOLS, 2009).

A escolha do PEP baseado na QSC, foi devido a refletir sobre as dificuldades dos alunos do ensino médio e da graduação com as funções trigonométricas, e resolvi por meio da QSC buscar minimizar essas dificuldades, com questões relacionadas a razão social do saber, bem como envolvidas em problemas de cunho não somente científico, mas social, político e ativista, permitindo assim, que use do conhecimento científico para reflexão e transformação do mundo o qual faz parte.

A escolha do PEP foi devida o mesmo permitir através de atividades de estudos e pesquisa que desenvolva por meio de análise e reflexão o conhecimento estudado, em nosso caso as funções seno e cosseno, resgatando a razão de ser social dos mesmos.

O nosso PEP, está baseado na corrente sócio-ecojustiça, essa corrente de acordo com Pedretti e Nazir (2011) objetiva um determinado tipo de cidadania e responsabilidade cívica de emancipação e transformação são as principais características. Atividades de sala de aula são projetadas para apelar ao sentido dos estudantes, da justiça e motivá-los a pensar criticamente e resolver problemas CTSA. Nessa corrente os alunos utilizam princípios democrático para resolver problemas sociais e ambientais mais gerais que se originam de ciência e tecnologia. A força da corrente sócio-ecojustice é seu potencial para motivar os alunos a aprender a ciência.

## Considerações finais

Objetivando compreender o processo evolutivo das funções seno e cosseno, e detectar, caso exista, possíveis incompletudes que venham influenciar no ensino atual dessas funções, realizamos a presente análise. Notamos que durante todo o processo evolutivo do campo trigonometria a existência de técnicas que venha a evoluir com o passar dos tempos, mostrando a sua ligação fortíssima à astronomia.

Esse estudo se faz de grande relevância para compreensão da essência da trigonometria, em especial das funções seno e cosseno, e nos ajudando a inferir sobre os possíveis motivos que levam a complexidade atual nos estudos com esse tema.

Observamos que a motivação para o desenvolvimento do campo da trigonometria vem atender razões sócias em diferentes períodos históricos, e que a partir da Idade média e especificamente na Idade Moderna que a razão se modifica. Inferimos que essa alteração pode ter influenciado o “abandono” das razões sociais no ensino de matemática, em especial funções seno e cosseno como destaca Chevallard (2004).

E baseado nesses estudos observamos a necessidade de resgatar no ensino das funções seno e cosseno, as motivações para que esse saber se aproxime dos discentes, de modo a diminuir a rejeição pelas funções trigonométricas.

Desse modo, a análise dos elementos históricos e epistemológicos realizada nos permitiu compreender a importância da razão de ser social no desenvolvimento das funções seno e cosseno, e também compreender que essa razão veio se perdendo ao passar do tempo. E assim, nos fez refletir sobre o resgate das razões de ser no ensino de matemática, em especial função seno e cosseno, por meio de um PEP, que trabalhe conhecimentos científicos, sociais e políticos de forma integrada, junto a tecnologias, mostrando assim a matemática em diferentes vertentes.

## Referências

ALMOULOU, S. Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BORGES, C. O.; BORGES, A. P. A.; SANTOS, D. G.; MARCIANO, E. P.; BRITO, L. C. C.; CARNEIRO, G. M. C.; NUNES, S. M. T. Vantagens da utilização do ensino CTSA aplicado à atividades extraclasse. XV Encontro nacional de ensino de química (XV ENEQ). Brasília, Distrito Federal, 21 a 24 de julho de 2010.

BOYER, C. B. **História da Matemática**: tradução: Elza Furtado Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

CHEVALLARD, Y. **La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire**. APMEP, Paris, p; 239-263, 2004. Disponível em: [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La\\_place\\_des\\_mathematiques\\_vivantes\\_au\\_secondaire.pdf](http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_place_des_mathematiques_vivantes_au_secondaire.pdf)

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. **Estudar Matemáticas – O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Editora Artmed, 2001

COLONEZE, B.R.S. **Módulo de aprendizagem e treinamento de funções trigonométricas: fazendo o uso da tecnologia para a efetiva aprendizagem de funções trigonométricas. Com aplicação em eletrônica**. Rio de Janeiro-CEFET/RJ, 2012, 142 f.. Dissertação (Mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, 2012.

COSTA, N.M.L., **Funções seno e cosseno: uma sequência de ensino a partir dos contextos do “mundo experimental” e do computador**. 250f. Dissertação (Mestrado em ensino da matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

KENNEDY, E. S. **História da trigonometria**. São Paulo: Atual, 1992. (Coleção Tópicos de História da Matemática para sala de aula; v. 5).

FARRAS, B. B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. **Educação matemática e pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 151, p. 1-28, 2013.

FONSECA, L. S. da. **Aprendizagem em trigonometria: obstáculos, sentidos e mobilizações**. São Cristóvão. Editora UFS, 2010.

FONSECA, L. S. da. **Um estudo sobre o Ensino de Funções Trigonométricas no Ensino Médio e no Ensino Superior no Brasil e França**. 2015, 1v. 495p. Tese de Doutorado. Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo (SP).

LUCAS, C. **Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completas**. 2010. 256 p. Tesina (Diploma de Estudios Avanzados: Programa Doctoral de Técnicas Matemáticas Avanzadas y sus Aplicaciones) – Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo, Vigo, 2010.

OECD. PISA 2015. Programme for International Student Assessment (PISA) Results From PISA 2015. **Publishing**, 2016. Disponível em: <https://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Brazil.pdf>

PEDRETTI, E. e NAZIR, J. Currents in STSE education: mapping a complex field, 40 years on. **Science Education**. 2011; 95(4): 601-626.

PEDROSO, Leonor Wierzynski. **Uma Proposta de Ensino da Trigonometria com Uso do Software GeoGebra**. Porto Alegre: UFRGS, 2012. 271 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

ZEIDLER, Dana; NICHOLS, Bryan. Socioscientific issues: theory and practice. **Journal of Elementary Science Education**, v. 21, n. 2, p.49-58, 2009.