EMP Educação Matemática Pesquisa
ISSN 1983-3156
A 2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i5p660-681

Une enquête épistémologique sur les conceptions des futurs professeurs de mathématiques sur les obstacles sur la notion de limites

An epistemological survey of the conceptions of future mathematics teachers on barriers to the notion of boundaries

____

CHEICK OUMAR DOUMBIA [1]

SADDO AG ALMOULOUD[2]

LUIZ MARCIO SANTOS FARIAS[3]

Résumé

Ce travail rend compte d'une enquête épistémologique auprès des futurs professeurs de mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure de Bamako. Elle met en évidence entre la définition intuitive et la définition précise de la limite celle qui émerge et qui est la mieux utilisée par les étudiants après avoir suivi un cours sur la notion de limite, les conceptions des étudiants sur l'obstacle épistémologique la limite peut être atteinte ou non, l'écart entre la définition intuitive et la définition précise, les connaissances mobilisables pour appliquer la définition précise, la raison d'être de la définition précise et les limites de la définition intuitive en la mettant en confrontation avec la définition formelle. Pour s'y prendre, nous ferons une étude historico-épistémologique de la notion de limite pour mettre en évidence les obstacles liés à celle-ci, étudier l'efficacité de la définition précise dans le traitement de ces obstacles, d'autre part nous élaborerons un questionnaire adressé aux futurs professeurs de mathématiques que nous analyserons à la lumière de la théorie anthropologique de la didactique.

Mots clés *: Conceptions, obstacles épistémologiques, définition formelle et définition intuitive de la notion de limite.*

Resumo

Este trabalho relata uma pesquisa epistemológica de futuros professores de matemática na Ecole Normale Supérieure em Bamako. Destaca-se entre a definição intuitiva e a definição precisa do limite que emerge e qual é melhor utilizado pelos alunos após ter seguido um curso sobre a noção de limite, as concepções dos alunos sobre o obstáculo epistemológico que o limite pode para ser alcançado ou não, a lacuna entre a definição intuitiva e a definição precisa, os conhecimentos que podem ser mobilizados para aplicar a definição precisa, a razão de ser da definição precisa e os limites da definição intuitiva colocando-a em confronto com a definição. formal. Para tanto, faremos um estudo histórico-epistemológico da noção de limite para destacar os obstáculos relacionados a ele, para estudar a eficácia da definição precisa no tratamento desses obstáculos, por

[1] Universidade Federal da Bahia - UFBA, Brasil, cheickodoum@gmail.com
[2] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP, Brasil, saddoag@gmail.com
[3] Universidade Federal da Bahia - UFBA, Brasil, lmsfarias@ufba.br

outro lado vamos desenvolver um questionário dirigido a futuros professores de matemática que analisaremos à luz da teoria antropológica da didática.

Palavras-chave: *Concepções, obstáculos epistemológicos, definição formal e definição intuitiva da noção de limite.*

Resumen

Este trabajo informa sobre una encuesta epistemológica de futuros profesores de matemáticas en la Ecole Normale Supérieure de Bamako. Se destaca entre la definición intuitiva y la definición precisa del límite que emerge y cuál es el mejor utilizado por los estudiantes después de haber seguido un curso sobre la noción de límite, las concepciones de los estudiantes sobre el obstáculo epistemológico que el límite puede ser alcanzado o no, la diferencia entre la definición intuitiva y precisa definición, el conocimiento subyacente para aplicar la definición precisa, la razón de ser de la definición precisa y límites de la definición intuitiva de su puesta en confrontación con la definición formal. Para ello, haremos un estudio histórico-epistemológico de la noción de límite para resaltar los obstáculos relacionados con él, para estudiar la efectividad de la definición precisa en el tratamiento de estos obstáculos, por otro lado, desarrollaremos un cuestionario dirigido a futuros profesores de matemáticas que analizaremos a la luz de la teoría antropológica de la didáctica.

Palabras clave: *Concepciones, obstáculos epistemológicos, definición formal y definición intuitiva de la noción de límite.*

Summary

This work reports on an epistemological survey of future mathematics teachers at the Ecole Normale Supérieure de Bamako. It highlights between the intuitive definition and the precise definition of the limit that which emerges and which is best used by the students after having followed a course on the notion of limit, the conceptions of the students on the epistemological obstacle the limit can to be reached or not, the gap between the intuitive definition and the precise definition, the knowledge that can be used to apply the precise definition, the reason of being of the precise definition and the limits of the intuitive definition by putting it in confrontation with the definition formal. To do this, we will make a historical-epistemological study of the notion of limit to highlight the obstacles related to it, to study the effectiveness of the precise definition in the treatment of these obstacles, on the other hand we will develop an list of questions addressed to future mathematics teachers that we will analyze in the light of anthropological theory of didactics.

Keywords: *Conceptions, epistemological obstacles, formal definition and intuitive definition of the notion of limit.*

Introduction

Dans la thèse de Cornu (1983, p.122), on apprend que la notion de limite est une notion mathématique polysémique et que l'une de ces significations est que la limite est la fin il n'y a rien de l'autre côté. C'est une notion statique pour les élèves. C'est-à-dire ils privilégient les aspects statiques

> la notion de limite est avant tout une notion statique, il s'agit d'une interdiction ou d'une impossibilité de franchir quelque chose. Cette limite peut se trouver dans le temps ou dans l'espace (on s'arrêtte …). Eventuellement, il peut s'y ajouter l'idée qu'il est difficile de s'approcher de la limite, et à fortiori de l'atteindre ».

La notion de limite a fait l'objet de beaucoup de travaux de didactique des mathématiques tous intéressants. Notamment Cornu 1(983), Sierpinska (1985), Artigue (2001), Job (2007), Lecorre (2016), Hitt (2006) etc. C'est une notion fondamentale de l'analyse, ces travaux ont permis de mettre en exergues des obstacles épistémologiques et la nécessité de la définition formelle dans l'enseignement de la notion de limite. Pour ce qui nous concerne nous allons vérifier si ces obstacles persistent et proposer des solutions pour les traiter à partir d'une analyse fine des définitions dites respectivement intuitive et formelle.

Étude épistémologique et historique de la notion de limite

Pour cette étude nous nous appuierons sur les travaux de Cornu (1983), Sierpinska (1985) et Job (2007).

Un regard détaillé sur l'histoire d'une notion mathématique apporte une aide considérable à l'étude de l'apprentissage de cette notion par les élèves d'aujourd'hui. Par ce qu'un tel regard permet de cerner quasiment toutes les difficultés que comporte la notion[4], l'étude historique apporte un éclairage sur le champ conceptuel dans lequel la notion s'est développée car une notion ne se développe pas toute seule, son évolution est liée à celle d'autres notions, d'autres théories, apporte également un éclairage sur les ''problématiques'' qui ont favorisé l'apparition de la notion, une notion mathématique n'est en général pas inventée ou fabriquée de façon abstraite, à partir de rien. Elle est

[4] Dans le développement historique d'une notion, au contraire, le point de départ se situe dans les problèmes. On veut résoudre tel problème, on se pose telle question. On cherche alors à fabriquer un outil approprié, soit en adaptant un outil déjà existant, soit en créant un nouvel outil. Puis, au fur et à mesure que l'on avance dans la résolution du problème, on affine l'outil, de façon à l'adapter encore mieux à ce qu'on veut faire, ou de façon à l'utiliser pour un plus vaste champ de problèmes

ébauchée petit à petit comme outil pour résoudre des problèmes, elle permet aussi de voir quels sont les problèmes qui ont permis la naissance d'une notion, et aussi quels sont les problèmes qui ont été à la source de progrès, et en fin, l'étude historique permet de repérer les principaux obstacles épistémologiques.
Cela nous paraît utile, il nous aide à accepter certaines erreurs des apprenants et d'avoir la patience de les traiter.

Gleaser G définit l'étude épistémologique comme « l'étude des circonstances qui ont permis la production de la connaissance scientifique ».

> L'étude de ces circonstances dans l'histoire, c'est-à-dire à grande échelle, apporte des éclairages sur les circonstances qui pourront permettre, chez un individu donné, chez un élève donné, de développer la connaissance scientifique. (CORNU, 1983, p. 38)

Cornu précise que cela ne veut pas dire qu'il faut refaire avec les élèves ce qui s'est fait dans l'histoire, car l'élève n'aura pas nécessairement à franchir les mêmes obstacles, à suivre le même itinéraire. Le contexte scientifique a changé.

> Il y a un équilibre à trouver entre un enseignement ''historique'' qui restaurerait une forêt de distinctions et de points de vue périmés dans laquelle se perdrait l'enfant, et un enseignement direct de ce que l'on sait aujourd'hui être une structure unique et générale, sans se soucier d'unifier les conceptions de l'enfant, nécessairement et naturellement différentes. La recherche des conditions d'un tel équilibre est un des grands problèmes qui se pose actuellement à la didactique. [BR2, p. 48]

L'histoire des mathématiques est donc d'un grand secours à la didactique. Mais doit-elle seulement mentionner les découvertes et leurs dates ? La réponse est non, elle ne doit pas non plus se réduire à une simple histoire des succès ; l'historien doit s'attacher aussi aux errements, aux débats et aux obstacles.

> une histoire utilisable par les didacticiens ne saurait éliminer toute mention des débats anciens, même si la prospérité semble les avoir tranchés : car certaines objections survenues au cours des discussions sont peut-être de même nature que les réticences éprouvées aujourd'hui par quelques étudiants'' (GLEASER, 1981 apud CORNU 1983, p.39)
> 'Lorsqu'une incompréhension se manifeste de siècles en siècles sous les plumes les plus autorisées, on soupçonne que les causes profondes de cet aveuglement méritent d'être étudiées : on se trouve en présence d'un obstacle épistémologique caractérisé (GLEASER, 1981, apud CORNU, 1983, p. 39]

Sans que les obstacles rencontrés dans l'histoire soient les mêmes que ceux auxquels se heurtent l'étudiant, on peut donc penser qu'il y a un certain nombre de ''passages obligés'' communs, et que certaines des circonstances qui ont permises dans l'histoire le franchissement d'un obstacle peuvent servir de sources d'inspiration pour construire des situations qui aujourd'hui, permettront à l'élève de mieux affronter l'obstacle.

Les ancêtres de la notion de limite

Du point de vue historique on peut citer : les paradoxes de Zénon d'Elée ; la notion d'infini (infini potentiel et l'infini actuel, infiniment grand et infiniment petit), la méthode de la double réduction par l'absurde (méthode d'exhaustion), les suites et les séries, les problèmes de géométrie : calcul d'aire, de volume, les indivisibles, la méthode dite des fluxions de Newton (le calcul des dérivées).
Dès l'antiquité, avec les paradoxes de Zénon d'Elée. Le problème se pose de savoir si une somme infinie peut être finie ?

Les trois autres paradoxes sont du type : « on ne peut pas traverser un nombre infini de point en un temps fini ». On voit apparaître aussi le lien avec le temps. On ne sut pas à cette époque, expliquer les paradoxes ; Aristote les situait dans la façon dont une ligne est partagée en points. C'est-à-dire dans la nature des objets géométriques : on ne peut considérer une ligne comme juxtaposition de points.

La notion d'infini est également présente, mais de façon potentielle. Selon Aristote, on peut partager indéfiniment en deux une quantité : l'illimité existe potentiellement, mais n'est jamais atteint. Vers 400 av. J.C., les problèmes essentiels que l'on se posait en mathématiques étaient des problèmes de géométrie : calculs de longueurs, calculs d'aires : par exemple, Hippocrate de Chios (430 av. J.C) veut prouver que le rapport des aires de deux cercles est égal au rapport des carrés de leurs diamètres. Il inscrit dans les deux cercles des polygones réguliers semblables, et, en augmentant indéfiniment le nombre de côtés, il recouvre les deux cercles. A chaque étape, le rapport des aires des polygones inscrits est égal au rapport des carrés des rayons des cercles : il en résulte que, ''à la limite'', il en est de même des aires des cercles. Ce passage à la limite, très peu explicité, sera précisé un siècle plus tard, sous la forme de la méthode d'exhaustion, due à Eudoxe De Cnide (408-355 av. J.C).

Cette méthode s'appuie sur le principe d'Eudoxe (Euclide Eléments, livre X, proposition 1) ; '' Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées''. Autrement dit, par des divisions par 2 successives, on peut rendre une grandeur aussi petite que l'on veut. De là, on obtient le principe d'exhaustion, qui permet d'affirmer que pour tout $\varepsilon > 0$ l'existence d'un polygone régulier inscrit dans le cercle, dont l'aire approche celle du cercle à moins de ε près. La propriété sur le rapport des aires est facile à démontrer pour les polygones réguliers. On en déduit le rapport des aires des cercles, au moyen d'une ''redutio ad absurdum'' : on veut montrer que le rapport des aires $\frac{A1}{A2}$ est égal au rapport des carrés des rayons $\frac{r1^2}{r2^2}$. On a l'un des trois cas : $\frac{A1}{A2} > \frac{r1^2}{r2^2}$, $\frac{A1}{A2} < \frac{r1^2}{r2^2}$,ou $\frac{A1}{A2} = \frac{r1^2}{r2^2}$.. On élimine les deux premiers en montrant qu'ils conduisent à une contradiction. D'où l'égalité recherchée. Bien que la méthode d'exhaustion soit assez proche de la notion de limite par certains aspects, on ne peut pas dire que les Grecs possédaient le concept de limite. Car la méthode d'exhaustion est avant tout une méthode géométrique, qui permet de démontrer des résultats sans avoir recours à l'infini. Les grecs manifestaient une très grande réticence à l'égard de l'infini, et s'interdisaient d'en faire usage dans des raisonnements mathématiques. Il faut voir aussi que la méthode d'exhaustion s'applique à des grandeurs géométriques, et pas à des nombres.

> Le concept unificateur de limite sur des nombres n'est pas présent, on ne dispose pas de résultats généraux, et on remet la méthode en œuvre sur chaque exemple, sans avoir dégagé véritablement l'outil qui permettrait de résoudre les problèmes de façon plus générale (LOVAERT apud Cornu1983, p.42).

Les problématiques

Nous avons le problème du découpage des figures géométriques en figures élémentaires(''indivisibles''), le calcul des sommes de séries[5], la notion de fonction est encore très mal assurée, Fermat résoud des problèmes de minimum et de maximum[6],-la

---

[5] Il ne s'agit pas alors de parler de convergence ou de divergence, mais de calculer explicitement des sommes : Archimède a calculé la somme de la série de terme général $\frac{1}{4^n}$; Oresme (1323-1382) calcule ½+2/4+3/8+4/16+… et la somme de la série de terme général $3^n/4^n$; il obtient la divergence de la série harmonique en montrant que a_{2n}-a_n est plus grand que ½. Au xvii siècle les séries interviennent massivement. Grégoire Saint De Vincent (1584-1667) mathématicien Belge, reprend les méthodes de dichotomie en permettant à la subdivision de continuer ''ad infinitum''. Il a fallu ainsi le lien avec les séries, et, en particulier , il est le premier à appliquer aux paradoxes de Zénon, il résout le problème de la rencontre d'Achille et de la tortue. Il utilise le mot ''terminus'' pour parler de la limite, et pour lui, ce ''terminus'' est vu comme un obstacle, un mur, qu'il est impossible d'atteindre et de dépasser. Mengoli (1638-1686) calcule la somme de la série harmonique alternée. Grégoiry (1638-1675) commence à développer certaines fonctions en série ; il introduit le terme ''converge'' qu'il emprunte à l'optique. Mercator et Newton obtiennent l'égalité log(x+1)= x-1/2x^2+1/3x^3.

[6] Par exemple, il veut partager un segment de longueur b en deux segments de longuers x et b-x de produit maximum : on veut que $x(b-x)= bx-x^2$ soit maximal : Fermat remplace x par x+e : $b(x+e)-(x+e)^2=bx+be-$

méthode des fluxions de Newton : notion de ‘’rapport premier’’, et celle de ‘’rapport ultime[7] »· Les fluxions sont, aussi près que l’on veut, comme les accroissements de fluentes générés en de très petites particules de temps, égales et pour parler de façon précise, elles sont dans le rapport premier des accroissements naissants’’(de quadratura curvarum)

Cette notion de ‘’rapport premier’’, et celle de ‘’rapport ultime’’, sont d’une grande importance dans l’histoire de la notion de limite. Elles donneront lieu par suite à des débats houleux.

Voyons un exemple de rapport ultime : Si on change x en $x+0$, quel est le ‘’taux de variation’’ de x^n ? on a : $(x+0)^n - x^n = n0x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}0^2 x^{n-2} + ...$ Le rapport du taux de variation de x^n à celui de x est alors : $\frac{(x+0)^n - x^n}{0} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}0x^{n-2} + ...$

Ainsi en faisant devenir «0» très petit, on obtient le rapport (nx^n). Newton appelle cette valeur le rapport ultime. Alors que deux quantités tendent vers zéro, le rapport se rapproche d’une ‘’limite’’. La dérivée n’est pas une ‘’application’’, une utilisation, de la notion de la limite. Au contraire, c’est en cherchant à calculer des dérivées qu’on a façonné un peu mieux la notion de limite. Nous avons également la notion d’infiniment petit et d’infiniment grand.

Les débats contradictoires

Ces problématiques sont à l’origine des débats qui vont s’instaurer au 18è siècle en Grande-Brétagne. Berkeley (1667-1745) reproche à Newton de faire le rapport de deux quantités qui s’annulent. Pour lui, cela n’a pas de sens ; on ne peut pas parler de ‘’vitesse

x^2-2xe-e^2, et ceci doit être peu différent de bx-x^2 ; donc be-2xe-e^2=0 et b=2x+e, c’est-à-dire b=2x , d’où x=b/2.
L’idée sous-jascente est qu’au voisinage d’un maximum, la fonction ne varie prèsque pas. Mais Fermat ne donne aucune explication sur sa méthode. En particulier, il ne démande pas que e soit petit, et il ne parle pas de prendre une limite. Son raisonnement est purment algébrique : partant de f(x+e)=f(x), il divise par e, puis prend e=0

[7] [4]Newton élabore ce qui est connu sous le nom ‘’ méthode des fluxions’’ : ‘’je ne considère pas les grandeurs mathématiques comme formées de parties si petites soient-elles, mais décrites d’un mouvement continu. Les lignes sont décrites et engendrées, non pas par la juxtaposition de leurs parties, mais par le mouvement continu des points, les surfaces par le mouvement des lignes… considérant donc que les grandeurs qui croissent dans le temps égaux sont plus grandes ou plus petites selon quelles croissent avec une vitesse plus grande ou plus petite, je cherchais une méthode pour déterminer les grandeurs d’après les vitesses des mouvements ou accroissements qui les engendrent. En nommant fluxions les vitesses de ces mouvements, tandis que les grandeurs engendrées s’appelleraient fluentes, je suis tombé sur la ‘’méthode des fluxions’’.

instantanée'', car pourqu'il y ait vitesse, il faut qu'il y ait un lien avec l'espace et le temps[8] :

Berkeley n'admet pas non plus les raisonnements dans lesquels on annule une quantité *a* après avoir divisé par *a*[9]. John Walton, professeur à Dublin, prendra la défense de Newton, en repliquant à Berkeley : '' Dans la méthode des fluxions, on ne s'intéresse pas à la grandeur des incréments ou des décréments instantanés des quantités, mais à leur premier rapport ou à leur rapport ultime, c'est- à-dire la proportion dans laquelle elles commencent ou cessent d'exister… il y a des limites fixées vers lesquelles ces proportions tendent perpétuellement, et dont elles s'approchent plus que toute différence assignée, mais qu'elles n'atteignent jamais avant que les quantités elles-mêmes soient infiniment diminuées, ou avant l'instant où elles s'évanouissent et deviennent rien ''.On notera cette référence à ''l'instant'' où des quantités commencent d'exister ou s'évanouissent; l'idée d'un tel instant est certainement liée à la notion d'infiniment petit, c'est-à-dire d'un état intermédiaire entre ce qui est nul et ce qui ne l'est pas.

Un autre débat a lieu en Grande Bretagne à la même époque, entre Jurin (1684-1751) et Robins.

Ce débat porte sur la possibilité ou non d'atteindre la limite, et sur ce qui se passe à l'instant où une quantité s'annule. Pour Robins, on ne peut pas atteindre la limite, de même que des polygones réguliers inscrits dans un cercle ne seront jamais égaux au cercle :''on appelle grandeur ultime la limite à laquelle une quantité variable peut s'approcher aussi près que l'on veut, mais à laquelle elle ne peut jamais être absolument égale''.

Pour Jurin au contraire, le ''rapport ultime'' est le rapport atteint à l'instant où les quantité s'annulent. Jurin tente d'analyser ce qui se passe à cet instant : ''il ne s'agit pas

[8] un point peut être la limite d'une ligne ; une ligne peut être la limite d'une surface ; un instant peut terminer le temps. Mais comment peut-on concevoir une vitesse au moyen de telles limites ? une vitesse dépend du temps et de l'espace, et ne peut-être conçu sans eux. Et si les vitesses de quantités naissantes ou qui s'évanouissent, c'est-à-dire sans lien avec le temps et de l'espace, ne peuvent être comprises, comment peut-on comprendre et montrer leur rapport ; ou considérer leur rapport ''premier'' ou ''ultime'' ? car, considérer le rapport de deux choses suppose que ces choses aient une grandeur, et que cette grandeur puisse être mesurée''. (The Analyst, §31)

[9] ce raisonnement ne semble pas juste ni probant. Car lorsqu'on dit que les incréments s'annulent, c'est-à-dire que les incréments ne sont plus rien, ou qu'il n'y a plus d'incréments, la suppostion précédente que les incréments étaient quelques chose, ou qu'il yait des incréments, est détruite, et cependant une conséquence de cette supposition est retenue… c'est une faute de raisonnement. Il est certain que lorsqu'on suppose que des incréments s'annulent, nous devons supposer que leurs rapports, leurs expressions, et tout ce qui découle de la suppression de leur existence, s'annule avec eux''. (The Analyst, §13).

que l’incrément soit rien, mais qu’il s’évanouisse, ou qu’il soit sur le point de s’évanouir’’.

> il y a un rapport dernier d’incréments qui s’évanouissent’’, mais qui n’a pas encore atteint une grandeur que l’on peut assigner, aussi petite soit-elle’’,‘’un incrément naissant est un incrément qui commence à exister à partir de rien, ou qui commence à être généré, mais qui n’a pas encore atteint une grandeur que l’on peut assigner, aussi petite soit-elle (CORNU, 1983, p. 49).

Jurin note l’importance du temps dans la notion de limite : ‘’qu’une quantitité ou un rapport atteigne sa limite ou ne l’atteigne pas dépend uniquement de ce qu’on suppose à propos du temps pendant lequel la quantité ou le rapport est considéré comme tendant vers ou s’approchant de sa limite’’.

Définition de la notion de limite :

Euler (1707-1783) aide beaucoup à débarasser le calcul de son support géométrique. Il veut travailler non pas sur des grandeurs, mais sur des fonctions. L’étude des fonctions a été l’un des facteurs de développement de la notion de limite. A l’époque d’Euler, la notion de fonction n’est pas encore très claire ; il s’agit essentiellement d’expressions algébriques. En introduisant plusieurs ordres d’infiniment petits : dx, $(dx)^2$… Euler développe des fonctions en série. Cela lui permet d’obtenir de nombreux résultats sur les séries numériques. Il est important de signaler qu’Euler ne s’est pas seulement intéressé au point de vue qualitatif (convergence ou divergence) ; mais surtout au point de vue quantitatif (rapidité de convergence, ou même de divergence).

D’Alembert (1717-1783) est très sensible au problème des infiniment petits et des infiniment grands. Pour lui, les infiniment petits, relèvent de la ‘’métaphysique’’, et n’ont rien à faire dans le raisonnement mathématique[10] : Il résulte des raisonnements faisant intervenir des quantités ‘’qui s’évanouissent’’ :

> une quantité est quelque chose ou rien ; si elle est quelque chose, elle n’est pas encore évanouie ; si elle n’est rien, elle est évanouie tout à fait. C’est une chimère que la supposition d’un état moyen entre ces deux-là’’. (Œuvre philosophique de D’Alembert volume2,Ed Jean-François Bastien, 1805, p. 353).

[10] ’on peut du reste se passer très aisément de toute cette métaphysique de l’infini dans le calcul différentiel’’, ‘’la supposition que l’on fait de quantités infiniments petites, n’est que pour abreger et simplifier les raisonnements, mais dans le fond le calcul différentiel ne suppose point l’existence de ces quantités’’. (Encyclopédie, article ‘’différentiel’’)

D'Alembert va donc s'attacher à dégager la notion de limite de cette''métaphysique'' des infiniment petits, et à en donner une définition précise, il la définit ainsi :

> on dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on puisse la supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche ; en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable.(LA CHAPELLE, D'ALEMBERT. L'Encyclopédie,1ère éd. 1751, Tome 9, p. 542)

Il insiste sur le fait qu'une quantité ne devient jamais égale à sa limite[11] : Il prend pour exemples le cercle, limite des polygones inscrits, ou encore la somme d'une progression géométrique. Il définit la ''somme d'une suite'' (i.e. d'une série) comme ''la limite de ses différents termes, c'est-à-dire une quantité dont on approche aussi près qu'on veut, en prenant toujours dans la suite d'un nombre de termes de plus en plus grand''. Il est très réticent à l'égard des séries divergentes[12]. La notion de limite mise en place par D'Alembert oppose la notion de limite à celle d'infiniment petit, par souci de rigueur mathématique.

Lagrange (1736-1813) est réticent à la fois à l'égard de la notion de limite et à l'égard des infiniment petits. A propos de la limite, Il écrit : ''l'espèce de métaphysique que l'on est obligé d'y employer est, sinon contraire, du moins étrangère à l'esprit de l'analyse, qui ne doit avoir d'autre métaphysique que celle qui consiste dans les premiers principes et dans les premières opérations fondamentales du calcul''.

Il veut ramener toute l'analyse au calcul algébrique, et pour cela, il travaille avec le développement en série des fonctions. Lagrange qui refuse la notion de limite, est l'un des principaux artisans du passage au domaine numérique, passage qui permettra l'unification du concept de limite. Pour Lagrange, la limite ne met pas en jeu l'infini ; il développe la pratique des majorations et des minorations, en particulier pour contrôler le reste d'une série. Les séries sont avant tout pour lui des objets algébriques formels. Lorsqu'on substitue des nombres aux indéterminées, se pose le problème de la convergence, et donc la nécessité d'une majoration du reste : après avoir établi la

---

[11] A proprement parler, la limite ne coincide jamais, ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite ; mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus, et peut en différer aussi peu qu'on voudra''.

[12] pour moi, j'avoue que tous les raisonnements fondés sur les séries qui ne sont pas convergentes me paraissent très suspects, même quand les résultats s'accorderaient avec des vérités connues d'ailleurs''. (Opuscules Mathématiques, 5, p.183)

formule : $f(x) = f(x-xz) + xzf'(x-xz) + \frac{x^2z^2}{2} f''(x-xz) + etc.$ Il prend soins de calculer le reste pour le cas où ‘’on veuille s’arrêter à son premier, second, troisième, etc. terme’’, et il obtient par exemple : '' $fx = f + xf' + \frac{x^2}{2} f'' + x^3 R, R.$ étant une fonction de z qui s’évanouisse lorsque z=0’’. Ayant ainsi travaillé dans le domaine numérique, il applique ensuite ses résultats à la géométrie et à la mécanique. A partir de là, la pratique du calcul se développe considérablement, et le passage au domaine numérique s’effectue totalement : après le calcul formel sur les fonctions, on travaille sur les nombres. Fourier, Poisson et Gauss en sont les principaux artisans. Gauss a une idée claire de la notion de limite, et en 1800, il définit les notions de borne supérieure, borne inférieure, limite supérieure, limite inférieure.

C’est Cauchy (1789-1857) qui donne sa place définitive à la notion de limite, en réorganisant l’analyse à partir de cette notion. Pour lui, le concept de limite est le concept de base en analyse, et, dès le début de son cours à l’Ecole Rurale Polytechnique, il définit la limite et introduit les opérations sur les limites : Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s’approchaient indéfiniment d’une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l’on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus.

Il va fonder toute l’analyse sur la limite : continuité, dérivée, intégrale. Toutefois, Cauchy reste encore marqué par les infiniment petits, et il s’en sert parfois : cela influence son langage ; ses articles de recherche utilisent essentiellement la notion d’infiniment petit. La notion de limite n’est pas encore définitivement affinée : elle se confond encore avec la notion de point d’accumulation : lim(sin(1/x) a pour Cauchy, une infinité de valeurs comprises entre -1 et +1. Il y a aussi la confusion entre l’étude de la continuité et l’étude de la limite en un point et confusion entre limite et image.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall x \in Df, \qquad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Alors qu’en France les idées de Cauchy ne sont pas reprises immédiatement, la notion de limite se développe rapidement en Allemagne, et Weierstrass (1816-1897) en donne une formulation ‘’statique’’, sous la forme que nous connaissons aujourd’hui.

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0 \quad \forall x \in Df \;\; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$$

Quelques obstacles épistémologiques de la notion de limite

Nous avons la limite « notion métaphysique » la notion d'infiniment petit et d'infiniment grand : ces notions mystérieuses ont constitué l'un des principaux obstacles. Existe-t-il un état intermédiaire entre ce qui est nul et ce qui n'est pas nul ? Y-a-t-il un nombre plus grand que les autres ? Les débats autour des quantités évanescentes ont montré toute la difficulté qu'il y a à faire tendre une quantité vers zéro…la limite peut-elle être atteinte ? et la transposition numérique : (Il s'agit ici d'un obstacle lié à la « difficulté de se détacher du contexte géométrique et cinématique, pour travailler non plus sur les grandeurs, mais sur les nombres », brève difficulté avec l'arithmétisation de la notion de limite).

La recherche menée par Sierpinska avait pour but la mise en évidence d'obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, elle retient deux aspects de la notion d'obstacle épistémologique selon G. Bachelard : L'apparition des obstacles a un caractère inévitable et la répétition de leur apparition dans la phylogenèse et l'ontogenèse des concepts. EIle défini l'obstacle épistémologique relatif à un concept comme l'ensemble des causes de lenteurs de troubles dans l'acquisition de concept qui sont spécifiques de ce concept et de lui seul et sont telles que leur prise en conscience est indispensable pour le développement de ce concept.

Après l'analyse à priori elle précise que : des obstacles sérieux relatifs aux notions de nombre et d'infini restent à surmonter chez les élèves, malgré un enseignement systématique de ces notions, à cause de l'importance fondamentale de la notion de fonction dans la notion de limite, le franchissement des obstacles qui lui sont liés a une importance toute particulière, il est nécessaire de garder une certaine réserve vis-à-vis des méthodes démonstratives ou intuitives d'introduction des notions de tangente ou de limite à l'aide de différentes représentation géométriques.

En fin elle présente les obstacles épistémologiques de la notion de limite : horror infiniti[13] , obstacles liés à la notion de fonction, obstacles « géométriques », obstacles « logiques », et l'obstacle du symbole. Elle ne propose pas de situations permettant de

[13] [10]cette expression renvoie à Georg Cantor :« l'horreur de l'infini est une forme de myopie qui empêche de voir l'infini actuel, bien que, dans sa forme supérieure cet infini nous ait crées et nous maintient, et dans toute ses formes secondaires transformées il se manifeste tout autour de nous et va jusqu'à nos esprits » (Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen 1932).

surmonter ces obstacles. Cornu a beaucoup travaillé dans le cadre numérique appelé " Jauge numérique", il a eu des résultats similaires que Sierpinska qui a travaillé dans le cadre géométrique appelé" Jauge topologique".

Partie expérimentale

Nous allons à partir de ces recommandations faites par Cornu et Sierpinska pour construire nos situations problèmes.

L'expérimentation a été menée avec les élèves professeurs de l'Ecole Normale Supérieure de Bamako spécialité mathématiques des semestres 2 et 3 (PESMath S2 et S3) le 28 septembre 2017. Nous présentons ici les questions qui portent sur l'objectif de cette communication.

Activité 1

1°) à la question : que signifie *l* est la limite de *f(x)* quand *x* tend vers a ?

Les élèves de la $11^{ème}$ et $12^{ème}$ ont donné les réponses suivantes :

E1 : si *x* s'approche de a alors *f(x)* s'approche de *l*

E2 : on peut rendre la distance entre *f(x)* et *l* aussi petite que l'on veut en prenant *x* suffisamment proche de *a*

E3 : si *x* s'approche de *a* en restant inférieur à *a* alors *f(x)* s'approche de *l* en restant inférieur à *l*

E4 : si la distance entre *x* et a est petite alors la distance entre *f(x)* et *l* est aussi petite.

E5 : pour que la distance entre *f(x)* et *l* soit petite il suffit que la distance entre *x* et *a* soit petite.

E6 : pour tout nombre réel α strictement positif, il existe un nombre réel strictement positif β tel que si $d(x,a)< \beta$ alors $d(f(x),l)< \alpha$.

E7 : pour des valeurs de *x* très très proche de *a* sans lui être égal, alors *f(x)* est très très proche de *l*.

E8 : On peut rendre la distance entre *f(x)* et *l* aussi petite que l'on veut, en prenant *x* très très proche de *a* sans être égal à *a*.

E9 : pour tout voisinage ouvert O de *l* privé de *l* il existe un voisinage ouvert de a privé de de *a* dont l'image est contenue dans O.

E10 : si l'image de *a* par *f* est *l*

E11 : si *x* appartient à *Df* et *f(a)* est égale à *l*.

Selon vous : quelle(s) est sont la (les) définition(s) qui est (sont) correcte(s) et dites pourquoi ? Quelle(s) est (sont) la (les) définition(s) qui est (sont) incorrecte(s) et dites pourquoi ?

Donnez la définition correcte si elle n'est pas parmi les propositions faites par les élèves.

2°) comment utilise-t-on votre définition pour déterminer la limite d'une fonction en un point ?

Activité 2

On donne la définition suivante : $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\quad \forall x \in Df\ \ 0 < |x - a| < \delta$ $\Rightarrow \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$ et on a posé les questions suivantes aux étudiants de 1ère et 2ème Année d'universités

1°) Que vous rappelle cette définition ?

Elève 1 : la formule de Cauchy

Elève 2 : la formule de la continuité

Elève 3 : la formule de la limite

Elève 4 : formule qui permet d'étudier la continuité et la limite d'une fonction en un point.

2°) Interpréter cette définition ci-dessus

Elève 1 : quand x s'approche de *a* alors *f(x)* aussi s'approche de *l*

Elève 2 : c'est la définition de *l* est la limite de *f* en *a*

Elève 3 : c'est la définition de *f* est continue en a

3°) Expliquer comment on l'applique

Elève 1 : on va de $|x - a| < \delta\ vers \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$

Elève 2 : il s'agit de prouver l'existence de δ on va de If(x)-lI< ε pour construire δ

Elève 3 : il y a une dialectique on va de If(x)-lI< ε pour construire δ et en gardant en tête que δ est un nombre qui est petit dépendant de ε autrement dit on fixe δ à l'avance.

4°) Donner les connaissances nécessaires pour sa compréhension. Parmi ces connaissances préciser celles que les élèves ne disposent pas en justifiant votre affirmation.

Activité 3

1°) Une fonction peut-elle atteindre sa limite ? justifiez votre réponse en donnant un exemple.

2°) Parmi les exemples suivants préciser les fonctions qui atteignent leur limite et dites pourquoi et celles qui n'atteignent pas leur limite en justifiant votre réponse.

a. $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$; b. $\lim_{x \to 3} 2x - 3$; c. $\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 1}$; d. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$

1°) On donne les fonctions suivantes définies sur un intervalle I, préciser celles qui admettent une limite en *a*.

a.$f(x)= 2x+3$ I=]2, 7] a=2; b.$f(x)= -5x+2$ I=[-5 ; 5] a=5; c.$f(x)= \dfrac{x^2-4}{x+2}$ I= IR-{-2} a=-2

d.$f(x)= \begin{cases} 2x-1 & si \quad x<3 \\ x+2 & si \quad x>3 \\ f(3)=6 & \end{cases}$ I= IR a=3

Analyse des activités

L´activité 1 a pour objectif de connaitre la conception des futures profs sur la définition de la limite. Cela a une grande influence sur l'interprétation de la définition formelle et aussi leur choix entre la définition intuitive et la définition formelle de la limite. Nous voudrions aussi montrer la nécessité de la définition formelle.

1°) La réponse attendue pour la 1ère question est la définition formelle:

$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\delta > 0 \quad \forall x \in Df \ \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$. Ou bien la définition topologique de la limite « pour tout ouvert ***O*** contenant ***l***, il existe un ouvert ***O'***$_a$ centré en *a* peut être privé de *a* tel que f(***O'***$_a$)c ***O***.

Du point de vu qualitative :les définitions des élèves E1, E4 et E7 mettent seulement en exergue l'aspect covariant de la limite, elle n'est pas précise par ce que l'on ne sait pas comment *x* s'approche de *a* ni non plus comment *f(x)* s'approche de *l*, celles des élèves E2, E5 et E8, mettent seulement en exergue l'aspect contra-variant de la limite, avec une différence notable *x* différent de *a*. il est important ici de rappeler qu'il ne s'agit pas seulement montrer l'existence de δ ;mais aussi de construire un δ qui convient le mieux. Celle de E3 confond la limite et la limite à gauche. La définition de E6 est celle de la continuité d'une fonction en un point. Celle de E9 veut dire qu'une fonction ne peut pas atteindre sa limite. Celles de E10 et E11 veulent dire que la limite d'une fonction en un point est son image en ce point. Aucune de ces définitions n'est correcte, nous avons des interprétations intuitives naïves ; mais comme réponses possibles c'est la définition intuitive qui va apparaître.

2°) La réponse attendue est ‘’ les données sont *f(x),* ***l,*** ε *et a* pour tout $\varepsilon > 0 \; on \, va \, de \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$ pour montrer l'existence d'un

$\delta \, tel \, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$ sans oublier que delta est un nombre positif très petit, qui peut-être fixer à l'avance pour construire un nouveau delta convenable.

Pour cette question on s'attend à un blocage, une illustration graphique, utilisation de tableau de valeurs ou d'exemples ou l'obligation de penser à la définition formelle pour pouvoir répondre à la question.

L´activité 2 a pour objectif de savoir si les futurs professeurs se rappellent la définition formelle, son interprétation, et les connaissances mobilisables pour sa mise en œuvre. A l'aide de cette activité nous nous rendrons compte si les futurs professeurs ont l'habitude de faire fonctionner la définition formelle de la limite et quelles sont les difficultés qu'ils rencontraient dans son application.

La réponse attendue de la 1ère question est :'' la définition de *l* es la limite de ***f*** en ***a***''

Nous pouvons nous attendre à des réponses suivantes : c'est la formule de Cauchy

Pour la 2è question la réponse correcte est la proposition de l'élève3 :c'est la formule de la limite ; mais ce sont les résultats des élèves E1 et E2 qui vont dominer.

Pour la 3è question la réponse attendue est '' les données sont *f(x),* ***l*** *ε et a* pour tout $\varepsilon > 0 \; on \; va \; de \; |f(x)-l| < \varepsilon$ pour montrer l'existence d'un $\delta \, tel \, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$ sans oublier que delta est un nombre positif très petit, qui peut-être fixer à l'avance pour construire un nouveau delta convenable.

Comme résultat prévisible les élèves professeurs peuvent faire une interprétation linéaire de la définition formelle. Ce que nous qualifierons d'effacement de quantificateurs.

Pour la 4è question nous avons : l'identification des données, les connecteurs logiques et leur ordre ; les équations et inéquations avec valeur absolue ; la majoration et la minoration ; l'ordre et opérations dans IR ; la composition et décomposition des fonctions ; les différentes significations de l'égalité. Parmi ces connaissances c'est la dernière seulement qui peut faire défaut chez les élèves. Les différentes significations de l'égalité : $a = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; |a-b| < \varepsilon \Leftrightarrow a \le b \le a$.

L´activité 3 a pour objectif de connaître la conception des futurs professeurs sur la question une fonction peut-elle atteindre sa limite ou non et de savoir si les futurs profs prennent en compte l'ensemble de définition d'une fonction dans le calcul de la limite d'une fonction en un point.

Réponse attendue : dès qu’une fonction admet une limite alors elle atteint sa limite.

Réponses possibles :si une fonction est définie en un point alors elle atteint sa limite en ce point, ou si une fonction n’est pas définie en un point alors elle ne peut pas atteindre sa limite en ce point ou une fonction ne peut jamais atteindre sa limite en un point ou en fin une fonction atteint toujours sa limite en un point.

Tous les quatre cas illustrent bien la notion de limite, la seule différence est que dans certains cas la fonction est définie au point *a* et dans d’autres cas elle n’y est pas définie. On rappelle ici que pour la recherche de la limite en un point *a* on ne se préoccupe pas de savoir ce qui se passe si $x = a$.

Analyse à postériori des productions des élèves professeurs

Activité 1 : nous avons rencontré seulement des définitions intuitives (qualitatives), parfois la limite est confondue avec l’image, à la limite à gauche, ce qui confirme notre hypothèse qu’il y a une confusion entre étudier la limite et l’image ou la continuité en un point.

Par exemple : la production d’un étudiant du semestre 2 S2

Elève1 : si *x* s’approche de *a* alors *f(x)* s’approche de *l*.

Elève 4 : si la distance entre *x* et *a* est petite alors la distance entre *f(x)* et *l* est aussi petite.

Elève 6 : pour tout nombre réel α strictement positif, il existe un nombre réel β strictement positif tel que : si $d(x, a) < \beta$ alors $d(f(x), l) < \alpha$

Elève7 : pour des valeurs de *x* très très proche de *a* sans lui être égal, alors *f(x)* est très très proche de *l*.

Justification : toutes ces définitions données sont correctes, seulement les formulations en langage mathématique se different. Les élèves1,7 se servent de définition littérale tandis que les élèves 4, 6 se servent de la notion de distance.

Les défintions incorrectes et justifications

Elève2 : dans sa définition le terme x suffisamment proche de *a* n’est pas bien éclairci, tant que x n’est pas égal à *a* , il peut toujours être plus proche de *a*.

Elève3 : sa définition s’intaxe sur la notion de limite à gauche qui n’est pas générale.

Elève9 :sa définition est celle de la continuité de *f* en *a* qui est un cas particulier de la notion de limite.

Elève10 : définition mal formulée et il veut définir la notion de continuité.

Il y a eu beaucoup de difficultés pour répondre à la question comment applique-t-on la définition formelle. Certains calculent *f(a)*, d'autres n'ont pas pu répondre, d'autres expliquent les techniques de calcul de la limite. Il y a seulement deux élèves professeurs sur dix-neuf qui ont utilisé une définition quantifiée ; mais cette définition correspond à celle de la continuité d'une fonction en un point.

Pour déterminer la limite d'une fonction en un point j'utilise la définition : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall x \in Df, \ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$, c'est à dire $\lim_{x \to a} f(x) = l$

En résumé nous pouvons dire que les élèves professeurs ont appris la définition intuitive, mais ils ne se rappellent pas bien de la définition formelle précise. Cela par ce que l'enseignement reçu privilégie la définition intuitive au début et ne met pas l'accent sur la définition formelle précise au niveau supérieur. On accorde beaucoup d'intérêts aux règles de calcul de limite ; et on néglige la justification. Cela a comme conséquences la résistance des conceptions erronées telles que la confusion entre la limite et l'image, la limite et la limite à gauche, limite atteinte ou non, l'étude de la limite et l'étude de la continuité en un point.

On peut affirmer sans se tromper qu'il y a chez ces élèves professeurs une confusion entre la limite et la continuité en un point. Cela nous amène à remettre en cause les professeurs d'analyse du supérieur, parce qu'ils ne font pas une analyse fine de la définition formelle pour mettre en évidence sa rigueur qui une de sa raison d'être pour mettre en évidence les limites de la définition intuitive qualitative ; raison pour laquelle les étudiants continuent de trainer des lacunes sur le concept de limite. Ils ne se rappellent pas de la définition formelle, et ne savent pas non plus comment l'appliquer pour montrer qu'un nombre réel donné *l* est la limite d'une fonction en un point *a*.

Activité 2 :

La première question fut bien répondue par la majeure partie des élèves professeurs seulement (2 sur 9) ont dit que c'est la formule de Cauchy. On peut dire qu'ils reconnaissent la définition formelle précise de la limite. Par contre ils ont des difficultés dans comment la mettre en œuvre. Certains font une lecture linéaire et pour d'autres c'est seulement l'aspect contra-variant; ils ne connaissent pas non plus les connaissances nécessaires pour appliquer la définition formelle.

Activité2 deux étudiants de S2

1) Elève4 : c'est la formule qui permet d'étudier la continuité et la limite d'une fonction en un point car la rélation prouve que f est continue en a et admet l comme limite en a.
2) Elève3 c'est la définition de f est continue en a
3) Elève1 : on va de $|x-a|<\delta\ vers\left|f(x)-l\right|<\varepsilon$ par ce que du fait qu'on a l'implication dans la définition cela prouve qu'on doit partir de $|x-a|<\beta$ pour construire$|f(x)-l|<\alpha$ sinon la réciproque est fausse.

Un autre groupe repond aux questions

1) Cette formule nous rappelle : ''la formule de la limite''
2) Cette définition interprète la définition de l est la limite de f en a
3) L'application de cette définition : ''il s'agit de prouver l'existence de β on va de $f(x)-l|<\alpha$ pour construire β''.

Activité3 :

Pour la question1 les résultats sont de deux types : x_0 appartient à Df ou non, ce qui nous renvoie à l'obstacle limite atteinte ou non, confusion entre la limite et l'image, limite et continuité en un point.

1) Parmi les exemples suivants précisons ceux qui illustrent bien la définition de la limite

a. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ N'illustre pas la définition de la limite car la fonction n'est pas définie en *l*.

b. $\lim\limits_{x\to 3} 2x-3$ Illustre la définition de la limite car elle admet une limite *l*.

c. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x+1}$ N'illustre pas la définition de la limite car elle n'est pas définie en *l*.

d. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3}{\sqrt{x^2-1}}$ Illustre la définition de la limite car elle est définie en *l*.

2) Précisons celles qui admettent une limite en *a*.

b. $f(x)= 2x+3$ I=]2, 7] a=2 $\lim\limits_{x\to -5} f(x)=-23$; d. $f(x)= \begin{cases} 2x-1 & si \quad x<3 \\ x+2 & si \quad x>3 \\ f(3)=6 \end{cases}$ I=IR a=3

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} 6 \\ 5 \\ f(3)=6 \end{cases}$$

Les élèves professeurs ne prêtent pas attention au domaine de définition dans le calcul de la limite d'une fonction en un point.

Traitement des obstacles à l'aide de la définition formelle.

-Obstacle logique ou effacement des quantificateurs

En effaçant les quantificateurs la définition devient si $x=a$ alors $f(x)=l$ c'est-à-dire $f(a)=l$ .Ce qui correspond à la confusion entre limite et l'image. Pour cela il est bon d'expliquer les différentes significations de l'égalité. $|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$ équivaut à $x=a$ implique $f(a)=l$. c'est-à-dire la limite est l'image. $\forall \varepsilon > 0, |x-a|<\varepsilon \Leftrightarrow x=a$

Limite atteinte ou pas

Avec la définition intuitive on voit qu'une fonction s'approche de sa limite mais qu'elle ne peut pas l'atteindre. Elle renforce l'idée qu'une fonction ne peut pas atteindre sa limite. Par contre avec la définition formelle, il facile de s'apercevoir que dès qu'une fonction admet une limite, alors cette limite est atteinte. En effet supposons que f n'atteint pas sa limite l en a i.e $f(x) \neq l$ alors $|f(x)-l|>0 \Rightarrow \frac{|f(x)-l|}{2} > 0 \ d'où \ |f(x)-l| < \frac{|f(x)-l|}{2}$ ce qui est absurde donc f atteint sa limite l.

Le fonctionnement de la définition de la limite

Elle fonctionne de deux façons suivant la nature de la fonction en jeux :

Contra variant ''on peut rendre la distance entre $f(x)$ et l aussi petite que l'on veut en prenant x suffisamment proche de a''

Covariant ''quand x s'approche de a alors $f(x)$ s'approche de l''.

Si f est bijective les deux fonctionnent c'est-à-dire nous avons la réciprocité de la condition.

La définition intuitive met seulement l'un ou l'autre aspect de la notion de limite.

Conclusion générale

Il ressort de cette étude que c'est la définition intuitive qui émerge chez les étudiants se perpétue et s'érige en obstacle. Elle est nécessaire pour introduire la limite ; mais elle est limitée car elle est une qualification approximative de la définition formelle, elle permet aux étudiants d'avoir une idée de ce que est la limite, elle renforce l'obstacle une fonction n'atteint pas sa limite, la limite est la limite à gauche, la limite est une notion dynamique.

La définition formelle précise n'émerge pas compte tenu de la forme dont elle est enseignée ; elle est donnée de façon brute et appliquée à des cas simples, il n'y a pas d'analyse fine autour d'elle.

Il est nécessaire de faire une analyse fine de la définition formelle pour corriger de façon efficace les obstacles épistémologiques tels que : limite peut-être atteinte ou non, confusion entre la limite et limite, étude de la continuité et l'étude de la limite en un point, effacement de quantificateurs.

Une analyse fine de la définition formelle permettra aux futurs professeurs de réaliser une séquence didactique qui va permettre aux élèves de donner une signification mathématique au concept de limite, elle permet aussi d'actualiser les conceptions. Cette analyse doit intervenir dans les écoles de formation des élèves professeurs pour qu'ils aient une idée claire (conception correcte) de la notion de limite, cela leur aidera à procéder à une transposition interne significative et aussi d'avoir une vision plus large sur les obstacles que leurs élèves pourront rencontrer dans l'apprentissage de la notion de limite.

Références

ALMOULOUD, Ag S. Fundamentos da didática da matemática. Curitiba-PR: Editora UFPR, 2010.

ARTIGUE, M (1996a), Réformes et contre-réformes de l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994), eds. Bruno Belhoste et al., Les sciences au lycée: un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger (Paris: Vuibert), 195-217.

ARTIGUE, M (1996b), L'enseignement des débuts de l'analyse, problèmes épistémologiques, cognitifs et didactiques, J.A Dorta, Diaz et alii (eds), La Universidad de la Laguna, Tenerife, 27-53.

BLOCH, I. (2000). L’enseignement de l’analyse à la charnière lycée / université Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation. Thèse. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, Bordeaux

CHEVALLARD, Y. *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L´approche antropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol 19, nº 2, pp. 221-266. Grenoble, France : La Pensée Sauvage, 1999.

SIERPINSKA, A. Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite- RDM vol. 6, 1, pp 5-67, 1985.

CORNU, Bernard – Apprentissage de la notion de limite – Conceptions et obstacles – Thèse de doctorat de Troisième Cycle de Mathématiques Pures – L’Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1983.

Lecorre T. (2016). Des conditions de conception d’une ingénierie relative à la définition de la notion de limite Elaboration d’un cadre basé sur un modèle de rationalité pour l’accès aux objets mathématiques complexes.

JOB, P. (2011). Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l’acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques. Thèse. Université de Liège, Belgique

Œuvre philosophique de D’Alembert volume2, Editeur Jean-François Bastien, 1805