Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

FUNÇÕES INTEGRÁVEIS E INTEGRAL DE RIEMANN: UM CONTRIBUTO DA ENGENHARIA DIDÁTICA E DA ORQUESTRAÇÃO INSTRUMENTAL

Integrable Functions And Riemann´S Integral: A Contribute To Didactical Engineering And Of Instrumental Orchestration

Francisco Eteval **FEITOSA**
Universidade Federal do Amazonas, Manaus-Am, Brasil.
sfeitosa@ufam.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-0913-3427

Roberta dos Santos **RODRIGUES**
Universidade Federal do Amazonas, Manaus-Am, Brasil.
roberta10rodrigues@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-9903-7644

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma sequência de orquestrações instrumentais visando o ensino dos conceitos de função integrável e integral de Riemann. Os sujeitos do estudo foram 21 discentes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Amazonas. Para isso, realizou-se uma pesquisa qualitativa de caráter descritivo, tendo como metodologia norteadora a Engenharia Didática e numa perspectiva de complementaridade, adotamos um design de investigação, tendo em vista o uso da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, com o escopo de descrever e estruturar situações de ensino, que buscou investigar se a sequência de orquestrações instrumentais proposta contribuiu para a compreensão dos objetos matemáticos aqui abordados. Na relação dos dados compilados e apresentados, como resultados, evidenciamos que a maioria dos discentes demonstrou compreender o conceito de função integrável, conseguiu encontrar a área sob uma curva e explicar seus procedimentos, inclusive em língua natural, além de serem capazes de definir a integral definida em palavras e símbolos, de interpretar e representar uma integral graficamente, de avaliar as integrais e de reconhecer o uso de integrais no mundo real.

Palavras-chave: Integral de Riemann, Engenharia Didática, Orquestração Instrumental

ABSTRACT

The main goal of this paper is to present a sequency of instrumental orchestrations which aim the teaching of the concepts of integrable functions and Riemann integral. The subjects of the research were 21 undergraduate students in mathematics at the Federal University of Amazonas. So, a qualitative research with descriptive disposition was made whose guiding methodology was the Didactic Engineer and in a perspective of complementarity we adopt a research design aiming the use of the Registers of Semiotics Representation Theory, with the purpose of describing and structuring situations of teaching which sought to investigate if the proposed sequency of instrumental orchestrations contributed to the comprehension of the mathematics objects approached. In the list of compiled and presented data, as outcomes, we evidenced that most students demonstrated to understand the concept of integrable function, they were able to find the area under a curve and explain their procedures, including in natural language, define the definite integral in words and symbols, in addition to interpret and represent the integral graphically, evaluate the integrals and recognize the application of them in the real world.

Keywords: Riemann Integral, Didactic Engineering, Instrumental Orchestration

1 INTRODUÇÃO

As dificuldades de aprendizagem dos estudantes acerca dos conceitos de Cálculo são detectadas por diversas pesquisas em Educação Matemática (Tall, Vinner, 1981; Tall, 1993; Tarmizi, 2010). Para Igliori e Almeida (2001, p. 384) “existe um distanciamento entre proposições de teorias da Educação Matemática e propostas para o ensino de Cálculo apresentadas em materiais didáticos”, e segundo esses pesquisadores, isso é um entrave para o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina.

Para Rasmussen, Marrongelle e Borba (2014) é preciso que os pesquisadores da área da Educação Matemática no ensino superior desenvolvam estudos abrangentes visando a abordagem de questões relacionadas ao ensino e aprendizagem de Cálculo, quer sejam de natureza teórica ou prática. Estes pesquisadores atentam para o fato de que, mesmo após várias décadas de pesquisas sobre o processo de ensino e de aprendizagem de Cálculo, estas tiveram pouco ou quase nenhum impacto na prática de sala de aula.

Segundo Robert e Speer (2001) esse quadro só será alterado se promovermos a integração entre teoria e prática em estudos relacionados ao ensino de Cálculo, ou seja, “perceberemos algum progresso no ensino e na aprendizagem de Cálculo, de maneira eficaz, apenas se tratarmos, de forma significativa, com as questões teóricas e pragmáticas simultaneamente” (p. 297, tradução nossa).

Pelo exposto, apresentamos os resultados de um estudo desenvolvido no contexto da disciplina de Cálculo cujo objetivo foi analisar os efeitos de uma orquestração instrumental para o processo ensino-aprendizagem de Integral de Riemann. A metodologia apoiou-se na perspectiva sistematizada e precisa da Engenharia Didática (ED).

Começamos com os pressupostos básicos da ED. Em seguida, iniciamos a primeira fase, as análises preliminares, em que apresentamos alguns obstáculos e entraves relacionados a Integral de Riemann. Na seção seguinte, descrevemos a concepção e a análise *a priori* da ED e logo após, discriminamos as situações de ensino que foram usadas na fase de experimentação, sendo esta última apresentada na seção subsequente. A análise *a priori* e validação são apresentadas na penúltima seção. Na última seção fazemos nossas considerações finais.

2 ENGENHARIA DIDÁTICA

A noção de engenharia didática foi usada para definir as relações entre os desenvolvimentos teóricos da didática da matemática e a realidade empírica das salas de aula. Pode ser apresentada como uma metodologia de pesquisa com distintas fases e com o duplo objetivo de estudar fenômenos didáticos e desenvolver novas propostas educacionais (Artigue, 1990). Artigue (1988, p. 285) caracteriza a engenharia didática "[...] como um esquema experimental baseado sobre "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino".

Existem dois níveis de engenharia didática: microengenharia e macroengenharia. A primeira é aquela que tem por objetivo o estudo de um determinado assunto, ela é localizada e leva em conta, principalmente, a complexidade dos fenômenos de sala de aula. Por outro lado, as pesquisas de macroengenharia são aquelas que permitem compor a complexidade das pesquisas de microengenharia com a dos fenômenos ligados à duração nas relações ensino/aprendizagem (Machado, 2008, p. 235).

Relacionadas a microengenharia e a macroengenharia estão as variáveis de comando, que são pertinentes ao sistema sobre o qual o ensino pode atuar. Artigue (1988) as distingue em dois tipos, as variáveis macro didáticas (ou globais), concernentes à organização global da engenharia didática, e as variáveis micro didáticas (ou locais), concernentes à organização local da engenharia, ou seja, à organização de uma sessão ou de uma fase.

Os registros dos estudos feitos sobre o caso em questão e a validação da pesquisa são duas características importantes da engenharia didática. No que concerne a validação, essa é feita, sobretudo internamente, baseando-se no confronto entre a análise *a priori* (que por sua vez se apoia no quadro teórico) e a análise *a posteriori*.

Em relação aos seus objetivos, Douady (1987) distingue as engenharias didáticas que visam a estudar os processos de aprendizagem de um conceito em particular daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de um domínio específico. São quatro as fases de uma engenharia didática: as análises preliminares; a concepção e análise *a priori* das situações matemáticas; a experimentação; e a análise *a posteriori* e validação. Cada uma dessas fases irá compor as próximas seções.

3 ANÁLISES PRELIMINARES: SOBRE FUNÇÕES INTEGRÁVEIS E INTEGRAL DE RIEMANN

As análises preliminares podem ser feitas a partir de considerações acerca do quadro teórico didático geral, o qual contempla os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto, a análise epistemológica dos conteúdos e a análise do ensino atual e de seus efeitos, assim como a concepção dos alunos, suas dificuldades e os obstáculos que determinam sua evolução, além da análise do campo dos entraves no qual vai se situar a efetiva realização didática (Machado, 2008).

Para esta fase da engenharia buscamos na literatura alguns obstáculos epistemológicos dos conteúdos visados no ensino de Integral de Riemann e funções integráveis, assim como entraves identificados como dificultadores nas dimensões cognitivas e didáticas. Em relação aos alunos, nossa busca apontou que estes têm dificuldades em:

- Trabalhar com integral definida quando $f(x)$ é negativo (Rasslan & Tall, 2002).

- Responder a perguntas conceituais (Rasslan & Tall, 2002; Sealey, 2006; Cargnin, 2013).

- Se expressar por escrito utilizando linguagem matemática; preferem a representação algébrica (Cargnin, 2013; Wagner, 2018).

- Abstrair e generalizar (Cargnin, 2013).

- Converter representações (Cargnin & Barros, 2016).

- Relacionar o conceito de limite ao conceito de integral e estabelecer um significado entre a área de uma figura e o número obtido por meio de algoritmos (Cargnin, 2018).

- Associar o conceito de Integral Definida ao de Soma de Riemann (Cargnin, 2018).

No que cabe ao professor, encontramos os seguintes problemas:

- A não construção da integral definida a partir da estrutura do limite das somas de Riemann (Sealey, 2006).

- Pouca importância à linguagem natural para a construção do conhecimento matemático (Cargnin, 2013).

- Ênfase em determinado estilo de ensinar em detrimento dos outros (Cargnin, 2013).

- Predominância de um tipo de representação (Cargnin, 2018) e pouca importância dada à conversão de representações no ensino (Cargnin & Barros, 2016).

- A notação de somatório e o cálculo de área de uma região limitada mediante integral definida não são trabalhados de forma que o aluno consiga fazer e conversão entre eles (Cargnin & Barros, 2016).

- Pouca ênfase às aplicações e modelagens possíveis do conceito de integral definida (Simmons & Oehrtman, 2017).

- Interpretações baseadas na soma de Riemann geralmente não são enfatizadas nas aulas tradicionais de Cálculo, nas quais métodos procedimentais e "área sob curva" dominam (Wagner, 2018).

Em relação aos livros didáticos, a literatura aponta que estes priorizam o registro simbólico-algébrico (Cargnin, 2013) e apresentam a definição de integral definida como sendo natural e facilmente compreendida pelos alunos (Cargnin, 2018). Encontramos ainda obstáculos como a não congruência existente entre os tipos de representações (Cargnin & Barros, 2016) e ausência de atenção instrucional às diferenças sutis entre a construção de sentido em álgebra e a construção de sentido em cálculo (Wagner, 2018).

Diante do exposto, formulamos a seguinte hipótese de trabalho, que será objeto de investigação empírica nesse estudo: orquestrações instrumentais contendo recursos digitais e situações matemáticas que levem em conta a conversão de representações podem contribuir para a compreensão dos conceitos de função integrável e de integral de Riemann. Especificamente, os discentes deverão ser capazes de compreender o conceito de função integrável, de perceber a integral como o limite de uma soma de Riemann, de encontrar a área sob uma curva e explicar seus procedimentos, inclusive em língua natural. Da mesma forma, espera-se que consigam definir a integral definida em palavras e símbolos, interpretar e representar uma integral graficamente, avaliar as integrais, além de reconhecer seu uso no mundo real.

4 CONCEPÇÃO E ANÁLISE A PRIORI DAS SITUAÇÕES MATEMÁTICAS

Nesta fase, o pesquisador, orientado pelas análises preliminares, delimita certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar, chamadas de variáveis de comando (microdidáticas ou macrodidáticas) (Almouloud & da

Silva, 2012). Destacamos como variáveis globais importantes para a fase experimental desta engenharia: a teoria das representações semióticas, o ambiente de realização (virtual) e a organização dos alunos (em grupo).

Artigue (1988, p. 293) descreve que o objetivo da análise *a priori* é:

> [...] determinar no que as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o significado de cada um desses comportamentos. Para isso, ela deve basear em hipóteses e são essas hipóteses cuja validação estará, em princípio, indiretamente em jogo, na confrontação entre a análise a priori e a análise a posteriori.

Segundo Almouloud (2007, p. 174) nesta da fase "o pesquisador deve elaborar e analisar uma sequência de situações problema". Ademais, as situações problema devem ser concebidas de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos (Almouloud, 2007).

Artigue (2008, p. 12-13), ao descrever as mudanças atuais e a evolução da ED, evidencia a contribuição e influência de outras teorias empregadas de modo conjunto com a ED, o que condiciona um design didático privilegiado. Deste modo a concepção das situações matemáticas se deu a partir da proposição de uma sequência de orquestrações instrumentais. Segundo Trouche (2005):

> Uma orquestração instrumental é definida como a organização intencional e sistemática do professor e o uso dos vários artefatos disponíveis em um ambiente de aprendizagem - neste caso computadorizado - em uma determinada situação de tarefa matemática, a fim de orientar a gênese instrumental dos alunos (Trouche, 2004).

Drijvers et al. (2010, p. 1350, tradução nossa) distingue três elementos dentro de uma orquestração instrumental: uma configuração didática, um modo de exploração e uma performance didática.

> 1. Uma *configuração didática* é um arranjo de artefatos no ambiente, ou, em outras palavras, uma configuração do ambiente de ensino e os artefatos nele envolvidos. Esses artefatos podem ser ferramentas tecnológicas, mas as tarefas que os alunos realizam também podem ser vistas como artefatos.
> 2. Um *modo de exploração* de uma configuração didática é a forma como o professor decide explorá-la em benefício de suas intenções didáticas. Isso inclui decisões sobre a forma como uma tarefa é introduzida e trabalhada, sobre os possíveis papéis dos artefatos a serem executados e sobre os esquemas e técnicas a serem desenvolvidos e estabelecidos pelos alunos.
> 3. Uma *performance didática* envolve as decisões ad hoc tomadas durante o ensino, sobre como realmente executar o ensino promulgado na configuração didática escolhida e modo de exploração: que questão levantar agora, como fazer justiça a (ou deixar de lado) qualquer aluno em particular *input*, como lidar com um aspecto inesperado da tarefa matemática ou da ferramenta tecnológica?

Uma orquestração instrumental está intimamente ligada a engenharia didática. Com efeito, segundo Douady (1993, p. 2) uma engenharia didática é:

> [...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e aluno, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor.

Pautados nessa reflexão e diante do contexto da pandemia, a orquestração instrumental aqui apresentada foi realizada de forma totalmente remota com atividades síncronas e assíncronas. No Quadro 1 apresentamos a configuração didática e o modo de execução de cada uma das orquestrações que compõe a sequência proposta. Em seguida, analisaremos as atividades desenvolvidas, destacando seus objetivos e as teorias subjacentes.

Quadro 1: Configuração Didática e Modos de execução das orquestrações instrumentais

Orquestração Instrumental I	
Situação Matemática	Primitiva de uma função e técnicas de primitivação.
Objetivo(s)	- Compreender o conceito de primitiva. - Conhecer e aplicar técnicas de primitivação.
Configuração Didática	Recursos: Mesa digitalizadora, *Google Meet*, Google Sala de Aula, *Whatsapp* e Lista de Exercícios. Sujeitos: Um pesquisador na função de professor, um pesquisador na função de tutor, dois monitores e 20 discentes que foram divididos em 5 grupos. Tempo: Foram 6 encontros entre professor e discentes, 2 encontros entre tutora e discentes e pelo menos 6 encontros entre discentes e monitores. Todos os encontros foram síncronos por meio do *Google Meet*.
Modo de execução	Nos encontros entre professor e discentes, eram apresentadas as principais técnicas de primitivação. Para tanto, foi utilizado o *Google Meet* e uma mesa digitalizadora. Esses encontros eram gravados e em seguida disponibilizados para os alunos. Durante os encontros, os discentes eram fortemente encorajados a participar. Ao final, eram disponibilizadas, no Google sala de aula, listas de exercícios para que os estudantes pudessem praticar as técnicas ensinadas. Os grupos buscavam apoio dos monitores (também pelo *Google Meet*) e trocavam ideias pelo grupo de *Whatsapp*. Nos encontros com a tutora os grupos discutiam e avaliavam como estava sendo o trabalho do grupo até aquele momento.
Orquestração Instrumental II	
Situação Matemática	Atividades 1, 2 e 3.
Objetivo(s)	Favorecer a apropriação da representação de somatório, desenvolver a habilidade de representar soma de área de retângulos usando a notação de somatório, compreender a integral de uma função num intervalo [a,b] como um limite de uma soma, perceber a área sob uma curva como representação de uma informação diferente da área (por exemplo, velocidade, trabalho), compreender os conceitos de soma inferior e soma superior e perceber que quando se refina uma partição as somas inferiores aumentam e as somas superiores diminuem, além de compreender o conceito de soma de Riemann e relacioná-lo com os conceitos de soma inferior, soma superior e integral.
Configuração Didática	Recursos: *Google Meet*, ambiente lápis e papel, Geogebra e Fichas de Atividades. Sujeitos: Um pesquisador na função de tutora e 20 discentes que foram divididos em 5

	grupos. Tempo: Foram 4 encontros síncronos de 1h30min.
Modo de execução	Em cada encontro a tutora apresentava, pelo *Google Meet*, as atividades e seus objetivos. Ao final era disponibilizada, no grupo do *Whatsapp*, uma Ficha de Atividades para os discentes. No encontro seguinte, os alunos apresentavam suas soluções para as atividades propostas. Para realizá-las, os discentes fizeram uso do ambiente lápis e papel e do Geogebra.
Orquestração Instrumental III	
Situação Matemática	Função integrável, Integral de Riemann e Teorema Fundamental do Cálculo.
Objetivo(s)	Apresentar a definição e as principais propriedades da integral, dar condições para que uma função limitada seja integrável e estabelecer a relação entre a integral e a derivada.
Configuração Didática	Recursos: *Google Meet*, Google Sala de Aula, *Whatsapp* e Fichas de Atividades. Sujeitos: Um pesquisador na função de professor, um pesquisador na função de tutor e dois monitores. Os discentes foram divididos em 5 grupos. Tempo: Foram 3 encontros entre professor e discentes, 1 encontros entre tutora e discentes e pelo menos 3 encontros entre discentes e monitores. Todos os encontros foram síncronos.
Modo de execução	O professor apresentava as situações matemáticas com foco nos conceitos. Estes encontros se davam pelo *Google Meet* e a sua gravação era disponibilizada para os discentes. Ao final de cada encontro eram disponibilizadas fichas de atividades para que, em grupo, os discentes praticassem o que foi ensinado. Para tanto, tinham a sua disposição os monitores, que os auxiliavam na realização das atividades. O encontro com a tutora visava a avaliar o trabalho do grupo e se estavam atingindo seus objetivos de grupo.
Orquestração Instrumental IV	
Situação Matemática	Atividade 4
Objetivo(s)	Avaliar a aprendizagem dos discentes.
Configuração Didática	Recursos: Ficha de Avaliação, *Google Meet* e *Whatsapp*. Sujeitos: Os dois pesquisadores e três acadêmicos como colaboradores. Os alunos divididos em 5 grupos. Tempo: 2 h
Modo de execução	Os dois pesquisadores e os três colaboradores formaram a equipe de avaliação. Cada membro desta equipe abriu uma sala no *Google Meet* e um grupo no *Whatsapp*. Cada membro ficou encarregado de aplicar a avalição a um dos 5 grupos. As questões eram apresentadas uma a uma aos discentes que tinham um tempo determinado para responder e enviar um print da solução para o *Whatsapp* do avaliador.

Fonte: Elaborado pelo autor

A análise *a priori* deve determinar que as escolhas realizadas permitam o controle do comportamento dos alunos e seu significado (Artigue, 1995, p.45). Desse modo, para as escolhas e descrição de ações futuras, nos fundamentamos nos pressupostos da teoria dos Registros das Representações Semióticas (TRRS) de Raymond Duval.

Nesse sentido, recordamos que para Duval (2004) a compreensão do objeto matemático está diretamente ligada à capacidade de coordenação de, ao menos, dois registros de representação, e essa coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão.

Existem dois tipos de transformações de representações semióticas: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro enquanto as conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados (Figura 1).

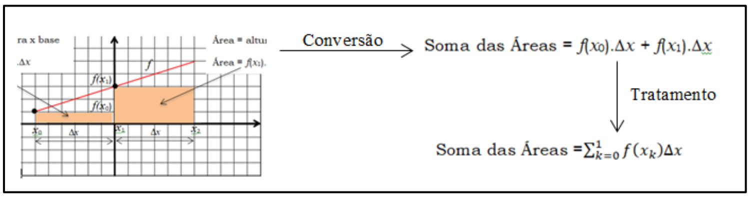


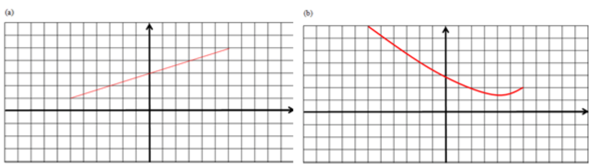
Figura 1: Exemplo de uma conversão seguida de um tratamento
Fonte: Elaborado pelos autores

Almouloud et al. (2004, p.94) afirma que ambientes informáticos na educação proporcionam ao aluno condições favoráveis à aquisição de conhecimento e à superação das dificuldades na aprendizagem. Nesse sentido, sob um viés de complementaridade, selecionamos o GeoGebra para a exploração das propriedades gráficas e geométricas dos objetos matemáticos envolvidos em nosso estudo. Por meio desse recurso, visamos trabalhar com os discentes a ideia intuitiva das propriedades locais por meio da Geometria Dinâmica, o que pode contribuir para o aluno formular conjecturas e testar hipóteses sobre alguns resultados.

Nosso foco nas atividades será observar os fenômenos da atividade matemática que concernem à mobilização de várias representações semióticas e à conversão dessas representações. A seguir, apresentaremos as atividades que foram realizadas na ED e seus objetivos.

A Atividade 1 (Figura 2) é composta por 3 questões, cujo objetivo é levar os alunos a fazer estimativa de áreas sob curvas por meio de retângulos e dos conceitos de soma inferior e soma superior. O uso do GeoGebra é feito de forma gradual, visto que a questão 1 deve ser realizada apenas usando o ambiente lápis e papel, a questão 2 é feita parte no ambiente lápis e papel e parte com apoio do Geogebra, e a questão 3 é feita usando exclusivamente o Geogebra.

Questão 1. Cada curva abaixo representa o gráfico de certa função f. Utilize 2, 3, 4, 6, 8 e 12 retângulos para encontrar estimativas inferiores e superiores para a área sob o gráfico de f de x = -6 a x = 6. Em cada caso, esboce os retângulos que você usar e calcule a soma inferior e a soma superior.



Questão 2. Utilizando o Geogebra, obtenha a representação geométrica de cada uma das funções abaixo no intervalo indicado. Estime a área sob o gráfico usando retângulos. Em cada caso, esboce a curva e os retângulos. Observação: o Geogebra é para ser usado somente para o esboço do gráfico.

(a) $f(x) = -\frac{x}{4} + \frac{14}{4}$, [-6,6]

(e) $f(x) = lnx$, [1,6]

Questão 3. Utilizando o Geogebra, estime a área **A** dada. Use os comandos
SomaDeRiemannSuperior(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>)
SomaDeRiemannInferior(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>)

(a) Limitada pelas retas x =1, x = 2, pelos eixos Ox e pelo gráfico de $y = x^3$.
(b) Limitada pelas retas x = 1, x=4 e y=0 e pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$.

Figura 2: Partes da Atividade 1
Fonte: Elaborado pelos autores

Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT, Florianópolis, v. 16, p. 01-27, jan./dez., 2021.
Universidade Federal de Santa Catarina. ISSN 1981-1322. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2021.e79491

A Atividade 2 (Figura 3) é composta por 7 situações problema. Visto que a notação de somatório é um tipo de representação que é utilizado ao longo de todo o estudo das somas de Riemann, as situações 1, 2 e 3 visam a favorecer a apropriação desta representação por parte dos discentes e a exploração do fenômeno da não congruência da operação de conversão das representações, além de desenvolver a habilidade de representar soma de área de retângulos usando a notação de somatório.

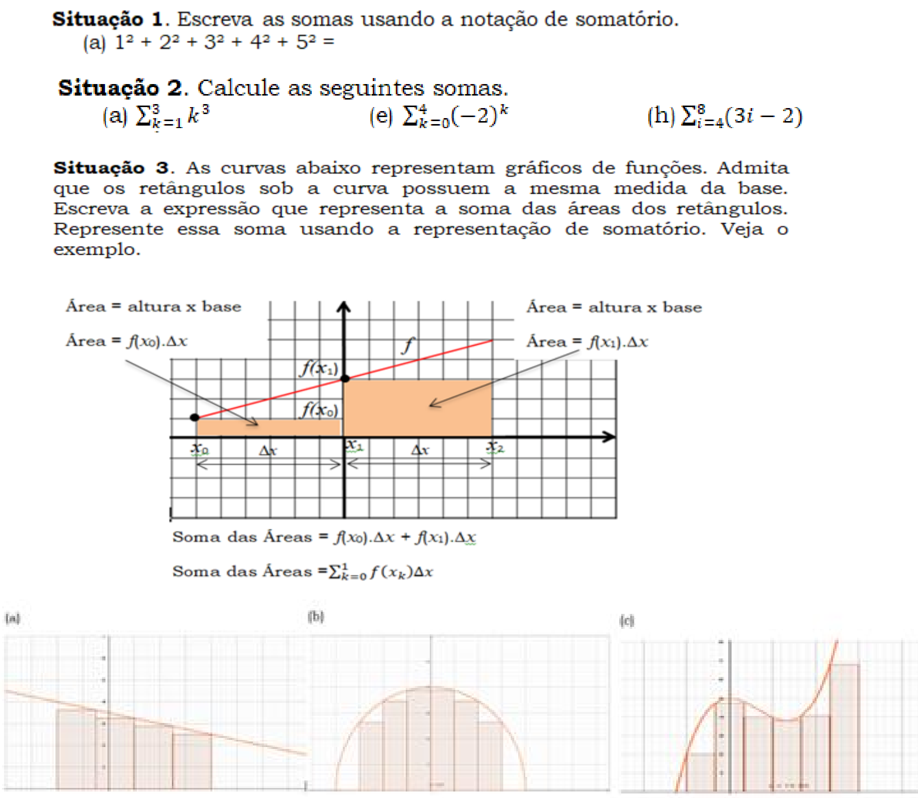


Figura 3: Parte da Atividade 2
Fonte: Elaborado pelos autores

Quando os discentes tentam aplicar o conceito de área sob a curva em problemas do mundo real, como em problemas da física, a não compreensão conceitual satisfatória do conceito de integral e da relação área-integral torna-se um obstáculo (Nguyen & Rebello, 2011). Por isso, é importante que os alunos percebam a área sob uma curva como representação de uma quantidade diferente da área (Thompson & Silverman, 2008).

Desse modo, as situações 4 e 5 visam a fazer com que os discentes percebam que a área sob o gráfico de uma função pode ter diversas interpretações a depender da função dada. Essas situações ajudam os discentes a reconhecer o uso da área sob a curva e a interpretar seu significado em problemas de física baseando-se na estrutura da soma de Riemann. Além disso, é importante que os discentes compreendam a integral definida a partir da estrutura do limite das somas de Riemann. Embora isso seja formalizado posteriormente, as situações 6 e 7 foram pensadas como um ponto de partida para essa formalização (Figura 4).

Situação 4. Considere uma partícula com função posição dada por $s(t)=s^2+2t+1$.

(a) Obtenha a função velocidade.

(b) Use o Geogebra para obter a representação gráfica da função velocidade no intervalo [0,6]. Coloque o print do gráfico na sua resposta.

(c) Calcule a área sob o gráfico nos intervalos [0,2], [3,4], [4,5] e [5,6]. Perceba que você pode fazer uso dos seus conhecimentos de Geometria plana.

(d) Calcule a distância percorrida pela partícula nos intervalos [0,2], [3,4], [4,5] e [5,6]. Use a expressão de s(t).

(e) Compare os resultados obtidos nos itens (c) e (d). O que você pôde observar?

Situação 6. Considere a função *f* dada por $f(x)= -x+1$.

(a) Use o Geogebra para esboçar o gráfico da função f no intervalo [1,4].

(b) Utilizando os comandos abaixo, estime a área da região compreendida entre o gráfico de f e o eixo Ox no intervalo [1,4].

SomaDeRiemannSuperior(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>)

SomaDeRiemannInferior(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>)

(c) Usando os comandos "polígono" e "área" do Geogebra, determine a área exata da região compreendida entre o gráfico de f e o eixo Ox no intervalo [1,4].

(d) Comparando os resultados obtidos nos itens (b) e (c), o que você observa?

Figura 4: Situações 4 e 6 da Atividade 2
Fonte: Elaborado pelos autores

A partir da Atividade 3, iniciamos uma nova etapa da nossa proposta. As situações tratam diretamente dos conceitos função integrável e integral de Riemann. Diferentemente de alguns livros de Cálculo que começam este tópico com uma visão geral do problema de encontrar áreas, partimos dos conceitos de integral inferior e integral superior. A Figura 5 mostra a sequência em que os conceitos foram abordados.

Inf e Sup de uma função num intervalo→Partição de um intervalo e refinamento de uma partição→Soma inferior e soma superior→ Integral definida→Função integrável→Soma de Riemann→Relação entre soma de Riemann e integral definida→Relação entre integral definida e área sob curvas.

Figura 5: Ordem em que os conceitos foram abordados
Fonte: Elaborado pelos autores

A Atividade 3 (Figura 6) é constituída por 2 (duas) situações. O primeiro diferencial desta atividade é que trata de funções definidas por mais de uma sentença. Com isso, o discente já começa a perceber que os conceitos aqui abordados não se restringem às funções dadas por uma única sentença. As funções dos itens (a), (b), (c) e (d) são as mesmas nas duas situações.

As funções dos itens (a) e (b) diferem no fato de que a primeira é positiva em todo o intervalo considerado enquanto que a segunda assume valores negativos e positivos. As funções dos itens (c) e (d) são particularmente especiais por possuírem um ponto de descontinuidade.

O item (e) da situação 1 visa a contribuir para o conceito imagem (Tall & Vinner, 1981, p.152) dos discentes em relação às funções integráveis. Em geral, num primeiro curso de Cálculo, são apresentadas somente funções integráveis e isso faz com que os discentes assumam que todas as funções possuem essa propriedade, fazendo com que imagens aparentemente conflitantes sejam evocadas.

Situação 1

Para cada uma das funções abaixo, obtenha a representação gráfica usando o Geogebra.

- Obtenha uma partição P com 4 subintervalos e calcule as somas inferior e superior da função f relativamente a esta partição.
- Obtenha refinamentos da partição P com 6,8 e10 subintervalos e calcule as somas inferior e superior da função f relativamente a cada uma desses refinamentos.

(a) $f:[1,12] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{5} + \frac{17}{5}, se\ 1 \leq x \leq 6 \\ \frac{x}{3} - 1, se\ 6 \leq x \leq 12 \end{cases}$

(e) f: [a,b]$\subset\Re \to \Re$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, se\ x\ é\ irracional \\ 1, se\ x\ é\ racional \end{cases}$$

Situação 2

Para cada uma das funções dadas:

(a) Obtenha uma partição P com 12 subintervalos.

(b) Escreva uma soma de Riemann relativa à partição do item (a).

(c) Use o Geogebra para:

- Traçar a representação gráfica de cada função;
- Obter uma estimativa para as somas inferior e superior. Escreva essas estimativas na notação de integral. Use pontos extremantes e pontos não extremantes.
- Qual o significado dessas estimativas em termos de área?
- Insira prints dos gráficos.

(b) $f:[-2,10] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \begin{cases} \frac{7x}{4} + \frac{9}{2}, se - 2 \leq x \leq 2 \\ \frac{-x}{8} + \frac{9}{4}, se\ 2 < x \leq 10 \end{cases}$

(c) $f:[-2,10] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = \begin{cases} \frac{5x}{4} + \frac{7}{2}, se - 2 \leq x \leq 2 \\ \frac{-x}{8} + \frac{9}{4}, se\ 2 < x \leq 10 \end{cases}$

Figura 6: Situações 1 e 2 da Atividade 3
Fonte: Elaborado pelos autores

A realização da Atividade 3 deverá contribuir para a compreensão de que refinando-se uma partição, a soma inferior só pode aumentar e a soma superior só pode diminuir e que toda soma inferior é menor ou igual a toda soma superior. Evidentemente que as situações propostas não demonstram matematicamente os fatos acima citados. Contudo, pensamos ser importante introduzi-los num primeiro curso de Cálculo com vista a enriquecer o conceito imagem dos discentes acerca do conceito de funções integráveis.

A Atividade 4 (Figura 7) é composta por 6 questões. Na questão 1 esperamos que os discentes consigam perceber a primitiva de uma função como sendo uma outra função que quando derivada obtém-se a função dada. Além disso, os estudantes devem estar conscientes de que a primitiva de uma função não é única, além de saber justificar esse fato. Na questão 2 esperamos que os discentes citem o uso de retângulos para obter uma estimativa para a área da região destacada ou citem Somas de Riemann.

Na questão 3, espera-se que os discentes respondam que uma partição de um intervalo [a,b] é um conjunto de pontos que está contido em [a,b], e que expliquem, seja na representação em língua natural ou simbólica, o que são somas inferiores e somas superiores, citando inf e sup da função em cada subintervalo. No item (c), os discentes devem responder que um refinamento de uma partição é outra partição que contém a anterior e que, quando se refina uma partição, as somas inferiores aumentam e as somas superiores diminuem. No item (d), os discentes devem perceber que, nas somas inferiores e superiores, usamos o inf e sup da função em cada subintervalo, enquanto nas somas de

Riemann, usamos pontos amostrais quaisquer em cada subintervalo.

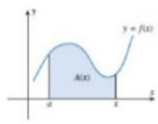
A questão 4 aborda o conceito de função integrável. A resposta esperada é que uma função f (limitada) é integrável se a integral inferior e a integral superior de f são iguais. Outra possível resposta pode ser na representação simbólica, isto é, $\int_{-a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{-b} f(x)dx$. Em relação a melhorar a estimativa, espera-se que os discentes respondam que se deve refinar a partição ou ainda aumentar o número de retângulos. Como consequência da atividade 2, nas questões 8 e 9, esperamos que os discentes respondam que não, quando perguntados se para ser integrável uma função precisa ser contínua, e que justifiquem tal resposta.

A questão 5 visa a estudar o conceito imagem dos discentes acerca das representações $\int f(x)dx$ e $\int_a^b f(x)dx$. Em relação a primeira, a resposta esperada é que ela representa a família de primitivas de f e, quanto a segunda, que representa a integral definida de f no intervalo [a,b]. Por fim, a questão 6 visa a estudar o conceito imagem dos discentes acerca da igualdade $\int_a^b f(x)dx = \mathrm{k}$, estabelecendo um significado entre área de figura e o número k. Nossa expectativa é que os discentes relacionem essa igualdade às integrais inferiores e superiores e à área sob a curva de f, fazendo a observação de que isso ocorre desde que $k > 0$ e que $f > 0$ em [a,b].

Atividade 4

Questão 1 - Considere uma função $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. O que é uma ***primitiva*** de f? A primitiva de uma função, quando existe, é única? Explique.

Questão 2 - Considere uma função $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico é dado ao lado. Como você faria para obter uma estimativa para a área da região destacada? O que se deve fazer para melhorar essa estimativa?



Questão 3 - Considere uma função $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitada.

(a) O que é uma partição do intervalo [a,b]?
(b) O que são soma inferior e soma superior de f? Essas somas dependem da partição? Justifique.
(c) O que é um refinamento da partição P? Quando se refina uma partição, o que acontece com as somas inferior e superior?
(d) Qual a diferença entre somas inferior e superior e Soma de Riemann de f referentes a uma partição P?

Questão 4 - Considere uma função $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitada. O que significa dizer que f é integrável? Para ser integrável uma função precisa ser contínua? Justifique?

Questão 5 - Considere uma função $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitada. O que significam as representações $\int f(x)dx$ e $\int_a^b f(x)dx$?

Questão 6 - Considere uma função $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitada. Suponha que $\int_a^b f(x)dx = k$, onde k é um número real. O que esse número k pode representar?

Figura 7: Questões da Atividade 4
Fonte: Elaborado pelos autores

Na próxima seção apresentamos a fase da experimentação da engenharia desenvolvida. Isso corresponde ao elemento de perfomance didática das orquestrações instrumentais que foram realizadas.

5 EXPERIMENTAÇÃO

Esta fase consiste na aplicação da sequência didática, tendo como pressupostos a apresentação dos objetivos e das condições da realização da pesquisa, assim como estabelecer o contrato didático e registrar as observações feitas durante a experimentação (Almouloud & da Silva, 2012). Na perspectiva de Carneiro (2005):

> Durante a experimentação, coletamos e organizamos um corpus de pesquisa variado, composto por produção dos alunos, registro de perguntas, dúvidas e erros constatados durante o acompanhamento de suas ações e diários de classe dos ministrantes. A análise desse material é essencial para a etapa da validação. (Carneiro, 2005, p. 155).

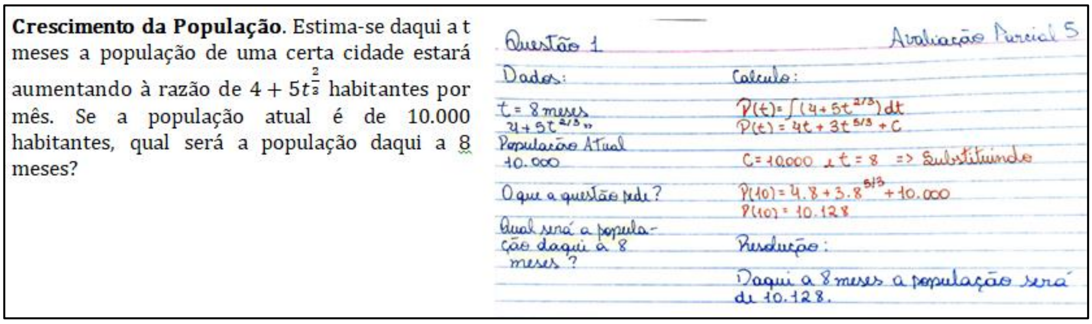
Neste trabalho identificamos essa fase da ED com a performance didática de cada orquestração instrumental aplicada. Ao todo foram 4 (quatro) orquestrações que passamos a descrever.

5.1 Orquestração Instrumental 1

Esta orquestração foi conduzida pelo pesquisador/professor e teve como objetivo favorecer a compreensão, por parte dos discentes, do conceito de primitiva de uma função, além do domínio das principais técnicas de se obter tais primitivas e a aplicação destes conhecimentos na resolução de problemas.

Definimos primitiva de uma função e apresentamos vários exemplos, tendo em vista a percepção dos discentes de que a primitiva de uma função, quando existe, não é única, e que todas as primitivas de função diferem apenas por uma constante. Em seguida apresentamos as principais técnicas de primitivação: primitivas imediatas, a regra da substituição, integração por partes, integrais trigonométricas e substituição trigonométrica.

Ao todo foram 6 encontros síncronos, nos quais os discentes não apresentaram grandes dificuldades para compreender as técnicas apresentadas. Após cada encontro disponibilizamos uma lista de exercícios. O último encontro consistiu na aplicação do conceito de primitiva e das técnicas de primitivação na resolução de problemas. Ao final desta orquestração foi aplicada uma avaliação de aprendizagem, a qual se deu de forma colaborativa, em que cada equipe recebeu uma lista de situações problema para aplicar as técnicas de primitivação que foram estudadas. A maioria dos discentes, através de suas respostas, demonstrou destreza no uso das técnicas de primitivação e na compreensão do conceito de primitiva (Figura 8).



Crescimento da População. Estima-se daqui a t meses a população de uma certa cidade estará aumentando à razão de $4 + 5t^{\frac{2}{3}}$ habitantes por mês. Se a população atual é de 10.000 habitantes, qual será a população daqui a 8 meses?

Questão 1 — Avaliação Parcial 5

Dados:
$t = 8$ meses
$4+5t^{2/3}$ "
População Atual
10.000

O que a questão pede?
Qual será a população daqui a 8 meses?

Calculo:
$P(t) = \int (4+5t^{2/3})\,dt$
$P(t) = 4t + 3t^{5/3} + C$

$C = 10.000$ e $t = 8$ => Substituindo

$P(10) = 4.8 + 3.8^{5/3} + 10.000$
$P(10) = 10.128$

Resolução:
Daqui a 8 meses a população será de 10.128.

Figura 8: Um dos problemas da avaliação e solução de uma das equipes
Fonte: Elaborado pelos autores.

5.2 Orquestração Instrumental 2

Esta orquestração foi conduzida pela pesquisadora/tutora e consistiu na realização das Atividades 1 e 2. No primeiro encontro da Atividade 1, foi introduzido o conteúdo de cálculo de áreas sob curvas utilizando o método dos retângulos, explicando os conceitos de soma superior e soma inferior. Em seguida, foi explicado o modo de resolução das três situações da Atividade 1.

No segundo encontro os discentes tinham que apresentar sua resolução dos exercícios propostos, porém apenas uma questão foi apresentada (Questão 1), cujas quatro alternativas dois alunos de cada grupo explicaram. Um deles projetou a própria tela e resolveu a questão na hora do encontro, demonstrando que tinha compreendido bem o conteúdo.

No terceiro encontro, que também era de apresentação das resoluções, os grupos responderam que só haviam resolvido a questão 1, por conta da grande quantidade de gráficos que ela possuía, além de que tinham algumas dúvidas sobre soma inferior e soma superior, as quais foram esclarecidas durante o encontro.

Partindo dessas dúvidas, a pesquisadora/tutora fez uma revisão dos assuntos abordados no encontro anterior, porém explicando de uma forma mais direta, além de apresentar novas propriedades das somas superiores e inferiores aos alunos, através de exemplos, tanto sobre funções estritamente crescentes e estritamente decrescentes como a respeito de funções que possuíam intervalos de crescimento e de decrescimento.

Sanada todas as dúvidas, a tutora partiu para a explicação da questão de número 03, fazendo como exemplo a letra (c), já que essa possuía uma configuração diferente. No decorrer da fala, os alunos foram orientados a fazerem testes com a quantidade de retângulos usada para calcular a área sub a curva, a fim de perceberem que, quanto maior a quantidade de retângulos utilizada, mais próxima essa soma fica da área real sob a curva. Todos os encontros foram gravados e disponibilizados para os alunos.

No primeiro encontro da Atividade 2, foi dada uma explicação sobre como fazer as situações 6 e 7 da lista, as quais tratavam de cálculo de área sob curvas que estão abaixo do eixo x, tendo também de mostrar aos alunos como deveria ser feito o gráfico da função no Geogebra, além dos comandos utilizados.

Em seguida, lembramos aos discentes que a Integral representa o limite de uma soma e não uma área, para que essa ideia não cause um conflito cognitivo nos alunos. Da mesma forma ocorreu com o Δx, que não precisa ter o mesmo comprimento em todos os retângulos, apesar de muitos alunos corroborarem com esse pensamento.

Após essa revisão, começamos explicando o que era somatório e a sua simbologia, além do que cada um de seus elementos significa, podendo assim chegar aos exemplos. Logo após, apresentamos algumas de suas propriedades e em seguida mostramos como se escreve a área sob uma curva em forma de limite de um somatório.

Todos os enunciados foram explicados aos alunos, além de a tutora ter resolvido um exemplo seguindo a ideia de cada situação, até chegar nas quatro últimas, sobre as quais não houve uma fala muito longa nem detalhada, pois são situações de interpretação que podem conter fatores de conflitos potenciais, os quais os alunos devem identificar sozinhos, logo após interpretarem o problema e tirarem suas conclusões matematicamente.

No encontro seguinte, foram passadas algumas orientações sobre como fazer os gráficos das questões 7 e 8 no GeoGebra, e sobre o enunciado das questões 5 e 6, além de alguns alunos terem apresentado suas resoluções das questões.

No último encontro, foram tiradas dúvidas a respeito da situação 5, relativa à força e trabalho. Logo depois descobrimos que havia também um erro na sua formulação, portanto uma hipótese foi acrescentada no enunciado para que os alunos pudessem resolver a letra (c) da questão. Após o esclarecimento das dúvidas, os discentes começaram a apresentar suas soluções.

Um estudante mostrou à turma seus gráficos de algumas alternativas da questão 3 da Atividade 1 e, enquanto realizava a atividade, resolveu manipular os intervalos e a quantidade de retângulos, levando-o a perceber conflitos no cálculo da Soma de Riemann quando o gráfico da função estava abaixo do eixo x, o que era esperado pelo professor, e tornou a apresentação mais interessante para os colegas.

5.3 Orquestração Instrumental 3

Esta orquestração foi conduzida pelo pesquisador/professor e teve como situação matemática a Integral de Riemann e Teorema Fundamental do Cálculo. Tínhamos como objetivos: conceituar Integral de Riemann, interpretar uma integral definida como área resultante, além de compreender e aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo. Como já relatado, nossa abordagem seguiu uma sequência diferente das adotadas nos livros de Cálculo. Demos importância à conversão de representações e conceituamos a integral definida como soma, a fim de favorecer a aplicação desse conceito em problemas práticos. Partimos da hipótese de que tal abordagem proporcionaria uma compreensão do conceito de integral de Riemann mais completa e não restrita ao caso em que representa área sob curvas. Além disso, usamos exemplos tanto de funções contínuas como funções não contínuas para encontrar somas inferiores e somas superiores.

Nos encontros, os discentes eram incentivados a participar ativamente. Na aula sobre somas inferiores e superiores, por exemplo, foi apresentado à turma o gráfico de uma função (Figura 9) e uma tabela auxiliar elaborada pelo pesquisador, sendo solicitado que eles preenchessem a tabela e enviassem um *print* de sua resolução para o *WhatsApp* do pesquisador, para que ele pudesse projetar na tela e os próprios discentes explicarem para toda a turma sua resolução (Figuras 10).

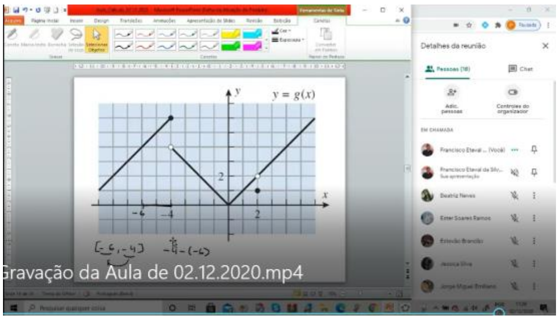
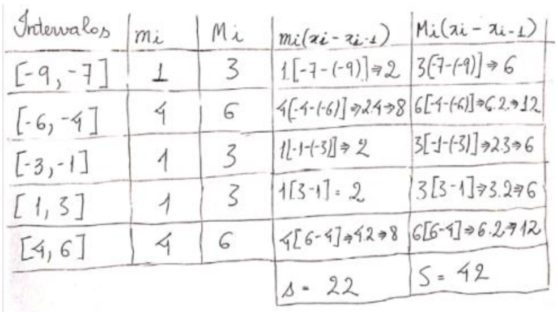


Figura 9: Print de um exemplo
Fonte: Elaborado pelos autores.



Intervalos	mi	Mi	mi(xi - xi-1)	Mi(xi - xi-1)
[-9, -7]	1	3	1[-7-(-9)] ⇒ 2	3[-7-(-9)] ⇒ 6
[-6, -4]	4	6	4[-4-(-6)] ⇒ 2.4 ⇒ 8	6[-4-(-6)] ⇒ 6.2 ⇒ 12
[-3, -1]	1	3	1[-1-(-3)] ⇒ 2	3[-1-(-3)] ⇒ 2.3 ⇒ 6
[1, 3]	1	3	1[3-1] = 2	3[3-1] ⇒ 3.2 ⇒ 6
[4, 6]	4	6	4[6-4] ⇒ 4.2 ⇒ 8	6[6-4] ⇒ 6.2 ⇒ 12
			s = 22	S = 42

Figura 10: Print da resolução de um discente
Fonte: Elaborado pelos autores.

A fim de fazer com que eles percebessem que quando se refina uma partição as somas inferiores aumentam e as somas superiores diminuem, duas ações foram desenvolvidas. A primeira fez uso do Geogebra, no qual plotamos o gráfico de uma função e o *software* permitiu que os discentes visualizassem tal fenômeno (Figura 11).

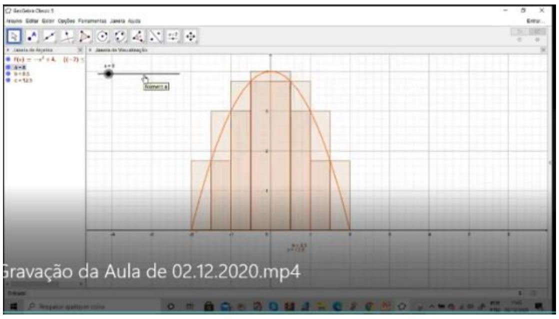


Figura 11: Print da atividade com Geogebra para observação de somas inferiores e somas superiores
Fonte: Elaborado pelos autores.

A segunda ação contou com a participação ativa dos discentes. O gráfico de uma função foi apresentado e foi solicitado a um discente que escolhesse uma partição do intervalo de definição da função. Em seguida foi solicitado a outro discente que dissesse um refinamento da partição dita pelo primeiro, e a um terceiro aluno foi pedido que falasse um refinamento da partição dita pelo segundo. Foi dado um tempo para que os discentes calculassem as somas inferiores e superiores em relação a cada uma das partições.

Nesta orquestração foram formalizados os conceitos de integral inferior, integral superior e integral, função integrável, soma de Riemann e o teorema fundamental do Cálculo. Novamente, usamos exemplos de funções não contínuas, visando a internalização, por parte dos discentes, do fato de que os conceitos que foram estudados anteriormente e os subsequentes valem mesmo para funções que não são contínuas.

6 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

Essa fase da Engenharia Didática se apoia sobre todos os dados coletados durante a experimentação através das observações realizadas durante cada sessão de ensino, bem como das produções dos alunos em classe e fora dela (MACHADO, 2008, p. 246.)

Inicialmente fazemos uma análise das respostas dos discentes em relação às quatro atividades. Em seguida, fazemos a confrontação das análises *a priori* e *a posteriori* na tentativa de se validar ou se refutar nossas hipóteses levantadas no início da engenharia.

As respostas dadas na Atividade 1 mostram que os discentes compreenderam a ideia de obter aproximações de áreas sob curvas por meio de retângulos usando os conceitos de soma inferior e soma superior. Tal compreensão foi percebida com e sem o uso de recursos tecnológicos (Figura 12).

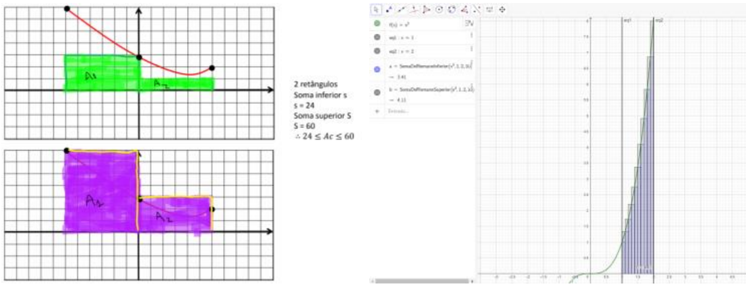


Figura 12: Respostas de um dos discentes.
Fonte: Elaborado pelos autores.

As respostas dadas pelos discentes às questões 1 e 2 da Atividade 2, demonstram que eles se apropriaram da notação de somatório e conseguiram coordenar os dois sentidos da conversão entre os registros simbólico e numérico. Observamos, a partir das respostas dadas a questão 3 dessa mesma atividade, que os discentes conseguiram mobilizar várias representações semióticas e a conversão dessas representações (Figura 13).

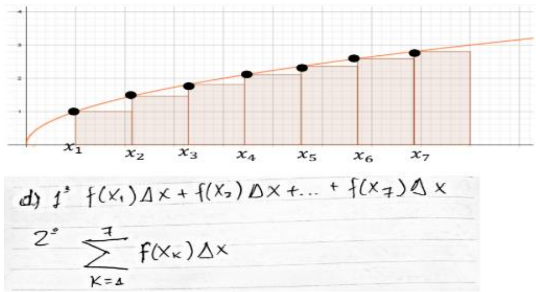


Figura 13: Resposta de discentes aos itens (d) e (e) da situação 3 da atividade 2
Fonte: Elaborado pelos autores.

Fazer com que os discentes percebam a integral definida como o limite de uma soma é um dos nossos objetivos. As questões 6 e 7 buscavam favorecer essa compreensão. As respostas dadas a estas questões demonstram que tal compreensão foi alcançada. Observamos que o Geogebra teve um papel importante neste processo.

Na Figura 14, temos a resposta de um discente à questão 5. A partir de sua resposta, particularmente no item (d) em destaque, podemos observar que o estudante percebeu que a área sob curvas pode ter diversos significados dependendo da função considerada, o que também pode ser observado na resposta dos demais discentes.

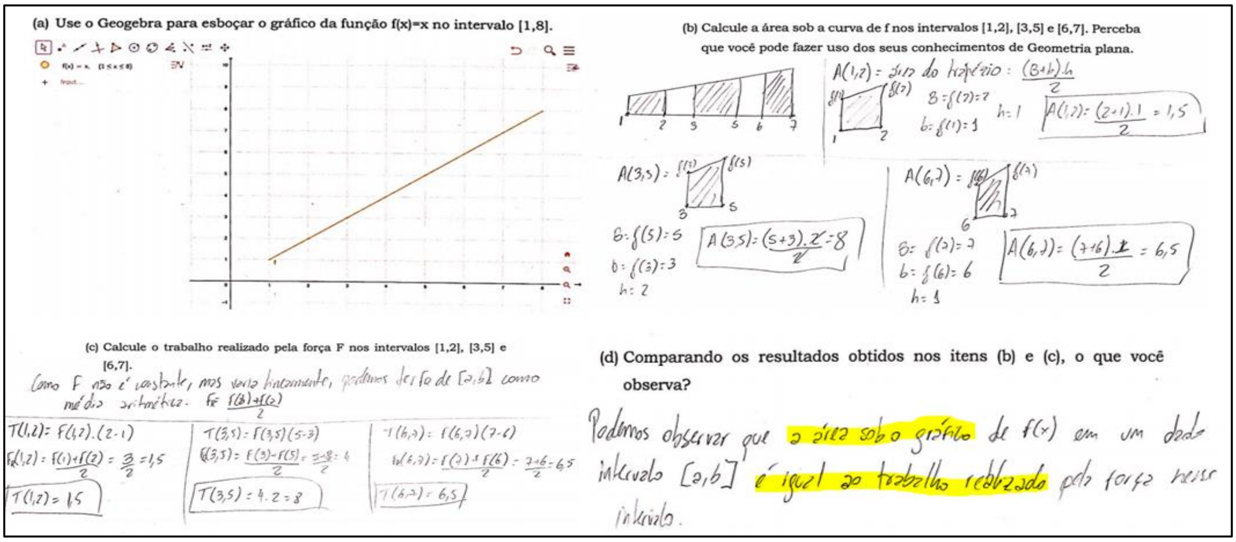


Figura 14: Resposta de um discente a Questão 5.
Fonte: Elaborado pelos autores.

Nesta seção, apresentamos os dados pertinentes à participação dos discentes na Atividade 4, que teve duas horas de duração e sua dinâmica foi a seguinte: o pesquisador/professor projetava em sua tela uma questão por vez e os discentes tinham um certo tempo para responder e enviar pelo *WhatsApp* a sua resposta. Nossa ferramenta teórica empregada para a análise *a posteriori* e validação se fundamenta nos pressupostos da teoria de Tall acerca de conceito imagem e conceito definição e da teoria das Representações Semióticas.

Dentre os discentes, 16 reconheceram a primitiva de função como sendo outra função e 14 identificaram a relação entre as duas funções, isto é, quando derivamos a primitiva obtemos a função dada. 16 discentes perceberam que a primitiva de uma função, quando existe, não é única, citando o termo “família” ou “grupo” ou a constante. A representação em língua natural foi usada por 12 discentes e, dentre esses, 11 apresentaram conceito definição coerente com o conceito definição formal (Figura 15).

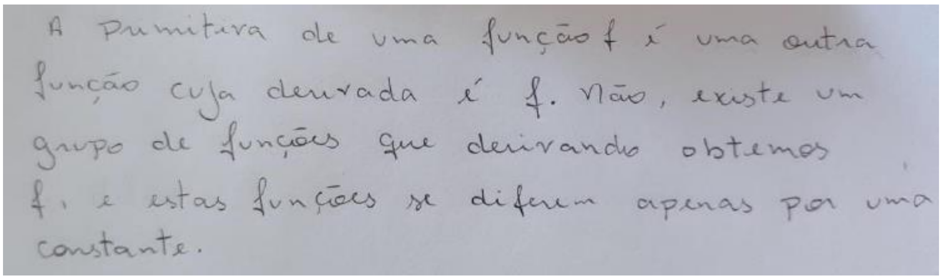


Figura 15: Resposta de um dos discentes à questão 1
Fonte: Elaborado pelos autores

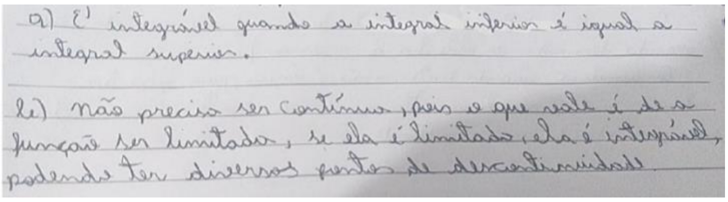
Na questão 2, 11 discentes citaram soma de Riemann e retângulos para estimar a área sob uma curva. Quando perguntados sobre o que deveriam fazer para melhorar essa estimativa, 5 discentes responderam que aumentariam o número de retângulos, 4 citaram partição sem especificar algum procedimento, e 5 responderam que refinariam a partição para melhorar a estimativa. Observamos que 12 estudantes recorreram à representação em língua natural. O conceito definição estava coerente com o conceito definição formal na resposta de 9 discentes. Além disso, a noção de limite estava presente no conceito imagem de 8 deles, e o conceito imagem de 10 discentes acerca da soma de Riemann estava associado ao cálculo de área.

A partir das respostas dos discentes à questão 3, podemos observar que 13 discentes associaram partição de um intervalo [a,b] a intervalos ou a retângulos, 3 responderam que uma partição é um conjunto de pontos, e apenas 1 respondeu que uma partição é um conjunto de pontos, mas também que os extremos a e b pertencem a este conjunto. Dentre os discentes, 7 explicaram corretamente usando representação em língua natural o que são soma inferior e soma superior de f, citando inf e sup, 5 explicaram em palavras sem citar inf e sup e associando à área de retângulos, e 9 responderam que essas somas dependem da partição e justificaram sua resposta.

Ademais, 13 discentes associaram refinamento de uma partição a intervalos ou a retângulos e 4 responderam que é um conjunto de pontos que contém a partição P. Quando questionados sobre o que acontece com as somas inferior e superior quando se refina uma partição, 14 discentes responderam que as somas inferiores aumentam e somas superiores diminuem. Acerca da diferença entre somas inferior e superior e Soma de Riemann de f referentes a uma partição P, 8 discentes responderam que nas somas inferiores e superiores usamos os ínf e sup de f em cada intervalo, enquanto nas somas de Riemann usamos pontos quaisquer do intervalo.

Os discentes demonstraram uma fragilidade no conceito imagem de partição e refinamento de uma partição. No que se refere aos conceitos de soma inferior (e soma superior) e soma de Riemann, o conceito definição de 8 discentes está coerente com o conceito definição formal. Quando analisamos as respostas do ponto de vista das representações semióticas, 19 discentes usaram somente representação em língua natural.

Na situação 4, quando indagados sobre o que significava dizer que uma função f era integrável, 9 responderam que é quando a integral inferior e a superior são iguais, demonstrando um conceito definição coerente com o conceito definição formal. A respeito da necessidade de uma função f ser contínua para ser integrável, 9 discentes responderam que não era necessário, sendo que 7 justificaram corretamente. A representação em língua natural foi usada por 19 discentes (Figura 16).


a) É integrável quando a integral inferior é igual a integral superior.

b) não precisa ser contínua, pois o que vale é de a função ser limitada, se ela é limitada, ela é integrável, podendo ter diversos pontos de descontinuidade

Figura 16: Resposta de um dos discentes à questão 2
Fonte: Elaborado pelos autores

A questão 5 explora as representações $\int f(x)dx$ e $\int_a^b f(x)\,dx$. 17 discentes associaram a primeira à primitiva ou à família de primitivas e 16 associaram a segunda à integral definida, demonstrando a capacidade de reconhecer estes objetos matemáticos e suas representações simbólicas.

Em relação à igualdade $\int_a^b f(x)\,dx = k$, que é explorada na questão 6, 12 discentes associaram à área, sendo que 6 citaram que se deveria ter $f \geq 0$ no intervalo dado [a,b], demonstrando que conseguiram estabelecer um significado entre área de uma figura e o número $k = \int_a^b f(x)\,dx$.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da análise *a posteriori*, pudemos perceber que a maior parte dos discentes compreendeu a ideia de obter aproximações de áreas sob curvas por meio de retângulos, além de conseguir mobilizar as várias representações semióticas do somatório e a conversão dessas representações. Eles também conseguiram compreender, com o apoio do Geogebra, a integral definida como o limite de uma soma e a área sob curvas como detentora de diversos significados. Além disso, fizeram uso da representação em língua natural para justificar suas respostas, reconheceram a primitiva de função como sendo outra função, e identificaram a relação entre uma função e sua primitiva, assim como perceberam que a primitiva de uma função, quando existe, não é única. Os alunos também notaram que quando se refina uma partição, as somas inferiores aumentam e as somas superiores diminuem, além de terem compreendido a diferença entre somas inferior (e superior) e Somas de Riemann. Por fim, demonstraram um conceito definição de função integrável coerente com o conceito definição formal e demonstraram a capacidade de reconhecer os objetos matemáticos “integral indefinida” e “integral definida” em suas representações simbólicas.

Por outro lado, alguns discentes apresentaram o conceito imagem acerca da soma de Riemann associado ao cálculo de área, além de relacionarem partição de um intervalo a intervalos ou a retângulos. Outros também não conseguiram estabelecer um significado entre área de uma figura e o número $k = \int_a^b f(x)\,dx$. Do mesmo modo, a noção de limite não estava presente no seu conceito imagem acerca da integral.

Embora consideremos satisfatórios os resultados obtidos, no sentido de que as orquestrações instrumentais realizadas contribuíram para a aprendizagem dos conceitos de função integrável e integral de Riemann e conceitos correlacionados, para a maioria dos discentes algumas atividades serão revistas de modo que numa próxima aplicação desta engenharia didática, as fragilidades observadas no parágrafo anterior sejam superadas.

REFERÊNCIAS

Almouloud, Saddo Ag. (2007). Fundamentos da Didática da Matemática. São Paulo: Editora UFPR.

Almouloud, S. A., Manrique, A. L., Silva, M. J. F. D., & Campos, T. M. M. (2004). A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. Revista Brasileira de Educação, (27), 94-108.

Almouloud, S. A., & da Silva, M. J. F. (2012). Engenharia didática: evolução e diversidade Didactic engineering: evolution and diversity. Revista Eletrônica de Educação Matemática, 7(2), 22-52.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(3), 281-308.

Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique. In: Recherche en didactique des mathématiques, 10(2). Grenoble: La Pensée Sauvage éditions, 1990. 241-286.

Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. In Nordic research in mathematics education (pp. 5-16). Brill Sense.

Barquero, B., & Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. In Task design in mathematics education (pp. 249-272). Springer, Cham.

Bellemain, F., & Trouche, L. (2016). Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. I Simpósio Latino Americano de Didática de Matemática. https://drive. google. com/file/d/0B6OphkgfrkD3eGRlSW1iVHg3YjQ/view.

Cargnin, C. (2013). Ensino e aprendizagem da integral de Riemann de funções de uma variável real: possibilidades de articulação da utilização de mapas conceituais com a teoria dos registros de representações semióticas.

Cargnin, C. (2018). Mapas conceituais como ferramenta no acompanhamento da construção do conceito de Integral de Riemann. *Ensino em Re-Vista*, 1137-2256.

Cargnin, C., & de Oliveira Barros, R. M. (2016). O conceito de integral de Riemann do ponto de vista da congruência semântica. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *11*(1), 16-35.

Carneiro, V. C. (2005). Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e paraformação de professores de matemática. Zetetiké : Revista de Educação Matemática, p.85-118.

Douady, R. (1987). L'ingenierie didactique: une methodologie privilegiee de la recherché. In Proceedings of 11th PME Conference, 3, pp. 222-228.

Douady, R. (1990). A universidade e a didática da matemática: os IREM na França. In conferência proferida no Impa. Caderno da RP., Sociedade Brasileira de Matemática.

Douady, R. (1993). L'ingénierie didactique. Un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. Educational Studies in mathematics, 75(2), 213-234.

Duval, R. (2004). Semiosis y Pensamiento Humano Registros Semióticos y Apendizajes Intelectuales. Santiago de Cali: PeterLang SA.

Guidorizzi, H. L. (2001). Um curso de cálculo, v. 1. Editora LTC, 5.

Igliori, S. B. C., & Almeida, M. V. (2017). Material para o ensino de cálculo diferencial: continuidade e diferenciabilidade. VIDYA, 37(2), 383-396.

Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM*, *46*(4), 533-548.

Machado, S. D. A. (2008). Engenharia didática. Educação Matemática: uma introdução, 2, 197-208.

Nguyen, D. H., & Rebello, N. S. (2011). Students' understanding and application of the area under the curve concept in physics problems. Physical Review Special Topics-Physics Education Research, 7(1), 010112.

Rasmussen, C., Marrongelle, K., & Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go?. ZDM, 46(4), 507-515.

Rasslan, S., & Tall, D. (2002, July). Definitions and images for the definite integral concept. In *PME CONFERENCE* (Vol. 4, pp. 4-089).

Robert, A., & Speer, N. (2001). Research on the teaching and learning of calculus/elementary analysis. In The teaching and learning of mathematics at university level (pp. 283-299). Springer, Dordrecht.

Sealey, V. (2006, November). Definite integrals, Riemann sums, and area under a curve: What is necessary and sufficient. In *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, No. 1991, pp. 46-53).

Serhan, D., & Syam, M. (2015). The effect of multiple representations instruction on students'images of the definite integral. Far East Journal of Mathematical Education, 14(1), 1.

Simmons, C., & Oehrtman, M. (2017). Beyond the product structure for definite integrals. In *Proceedings of the 20th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 912-919).

Tall, D. O. (1989). Concept Images, Generic Organizers, Computers & Curriculum Change, For the Learning of Mathematics, 9,3, 37–42.

Tall, D. (1993). Students' difficulties in calculus. In *proceedings of working group* (Vol. 3, pp. 13-28).

Tall, D. O. (2000). Biological brain, mathematical mind & computational computers, em "ATCM Conference". ATCM.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational studies in mathematics, 12(2), 151-169.

Tarmizi, R. A. (2010). Visualizing Student's Difficulties in Learning Calculus. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *8*, 377-383.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics*, *73*, 43-52.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. In *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 137-162). Springer, Boston, MA.

Wagner, J. F. (2018). Students' obstacles to using Riemann sum interpretations of the definite integral. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *4*(3), 327-356.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Funções integráveis e integral de Riemann: um contributo da engenharia didática e da orquestração instrumental.

Francisco Eteval Feitosa
Doutorado em Matemática
Universidade Federal do Amazonas, Professor Adjunto do Departamento de Matemática, Manaus-Am, Brasil.
sfeitosa@ufam.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-0913-3427

Roberta dos Santos Rodrigues
Licencianda em Matemática.
Universidade Federal do Amazonas
roberta10rodrigues@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-9903-7644

Endereço de correspondência do principal autor
Avenida das Oliveiras, n.9, CEP: 69.039-205, Manaus, AM, Brasil.

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: L. S. Sobrenome, J. T. Sobrenome, A. P. Sobrenome
Coleta de dados: L. S. Sobrenome, J. T. Sobrenome, A. P. Sobrenome
Análise de dados: L. S. Sobrenome, J. T. Sobrenome
Discussão dos resultados: J. T. Sobrenome
Revisão e aprovação: A. P. Sobrenome

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Devido ao estado de pandemia, os trabalhos do Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade na qual o estudo foi desenvolvido foram suspensos o que não permitiu obter o parecer desse conselho. Entretanto, estamos enviando os Termos de Consentimento assinados por todos os sujeitos que participaram da pesquisa.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 14-02-2021 – Aprovado em: 25-03-2021