Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM ÂNGULOS NOTÁVEIS POR MEIO DO MATERIAL CONCRETO PRÉDIO TRIGONOMÉTRICO

A proposal for teaching trigonometric ratios at remarkable angles through concrete material Trigonometric Building

Gustavo **GONÇALVES**
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS), Porto Alegre, Brasil.
gustgoncalves95@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-1474-4281

Eduardo Boff **RIBEIRO**
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (FURG) – EAD, Rio Grande, Brasil
eduboffribeiro@gmail.com.
https://orcid.org/0000-0002-4679-565X

Gregor Dimitri Teixeira **KAROLESKI**
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, Brasil.
gregordimitri@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-5533-0651

Kelen Berra de **MELLO**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), Caxias do Sul, Brasil.
kelen.mello@caxias.ifrs.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-0131-5373

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

É importante que o professor promova o desenvolvimento de uma aprendizagem ativa e significativa, buscando métodos que permitam ir do concreto ao abstrato. Neste sentido, foi planejado e aplicado uma proposta de aula envolvendo o material concreto denominado Prédio Trigonométrico. O objetivo deste artigo é refletir sobre essa prática docente a fim de apresentar possibilidades para o professor de matemática no uso desse material e da experimentação no ensino de trigonometria. A proposta utiliza da manipulação do objeto e de um roteiro de aplicação para obtenção de resultados do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis. Após a atividade, foi aplicado um outro questionário perguntando sobre a efetividade do material para os alunos. Em grande maioria, os alunos elogiaram a aplicação, mostrando que foi um facilitador em sua aprendizagem. Além disso, percebemos que os alunos foram capazes de abstrair resultado como o valor das relações trigonométricas para o ângulo de 90°. Com isso, notamos um potencial na aplicação de tal metodologia, que pode auxiliar o professor no ensino de trigonometria no Ensino Fundamental e Médio.

Palavras-chave: Educação Matemática, Ensino, Trigonometria, Material concreto

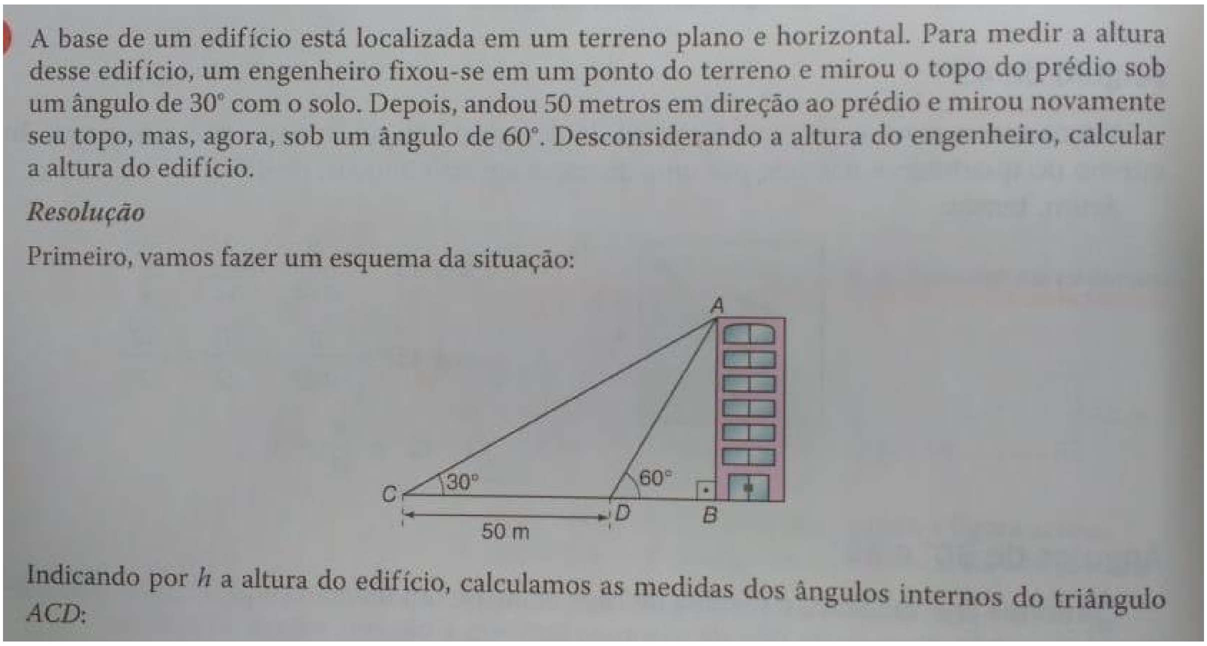
ABSTRACT

It is important that the teacher promotes development of an active and meaningful learning, searching for methods that aim to go from the concrete to abstract. In this regard, a class proposal involving a concrete material called Trigonometric Building was planned and applied. The objective of this article is to reflect on this teaching practice in order to present possibilities for the mathematics teacher in the use of this material and experimentation in the trigonometry teaching. The proposal uses object manipulation and an application roadmap to obtain sine, cosine and tangent of the remarkable angles results, so that, through questioning, develop results related to the values of this relationship. After the activity, another questionnaire was applied asking about the effectiveness of the material for the students. The vast majority of students praised the application, showing that it was a facilitator in their learning. In addition, we noticed that the students were able to abstract the result as the value of the trigonometric relations for the 90° angle. With that, we see a potential in the application of such methodology, which can assist the teacher in teaching trigonometry in Elementary and High School.

Keywords/Palabras clave: Mathematical Education, Teaching, Trigonometry, Concrete material

1 INTRODUÇÃO

O conteúdo de razões trigonométricas seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis no que se refere à etapa do ensino médio nos livros didáticos[1], normalmente são apresentados a partir da análise de situações que envolvem o triângulo equilátero, para os ângulos de 30º e 60º, e do quadrado, para o ângulo de 45º. Também é comum encontrar questões que envolvam o cálculo da altura de prédios, como o apresentado na Figura 1:


A base de um edifício está localizada em um terreno plano e horizontal. Para medir a altura desse edifício, um engenheiro fixou-se em um ponto do terreno e mirou o topo do prédio sob um ângulo de 30° com o solo. Depois, andou 50 metros em direção ao prédio e mirou novamente seu topo, mas, agora, sob um ângulo de 60°. Desconsiderando a altura do engenheiro, calcular a altura do edifício.

Resolução

Primeiro, vamos fazer um esquema da situação:

Indicando por h a altura do edifício, calculamos as medidas dos ângulos internos do triângulo ACD:

Figura 1: Exercício em livro didático
Fonte: Adaptado de Paiva (2015).

Na disciplina de Estágio Supervisionado nas Modalidades de Ensino, de um curso de Licenciatura de Matemática da serra gaúcha, os licenciandos foram incentivados a elaborar uma aula para trabalhar razões trigonométricas. Alguns alunos tiveram a ideia de construir uma maquete de um prédio para o entendimento dos conceitos inerentes às razões trigonométricas, a partir da experimentação do material pelos alunos da educação

[1] A partir da observação de alguns livros, como de Paiva (2015), Chavante e Prestes (2016) e Iezzi, et al. (2017).

básica. Dessa forma, o projeto passou por algumas evoluções até chegar ao que foi nomeado de “Prédio Trigonométrico”.

Com isso, o artigo tem como objetivo refletir os resultados de uma atividade utilizando o Prédio Trigonométrico em uma turma de 2º ano do Ensino Médio, em uma escola estadual de ensino da serra gaúcha, analisando a relação da abordagem do uso do material concreto e da experimentação com o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de razões trigonométricas no triângulo retângulo.

2 USO DE MATERIAL CONCRETO

O material concreto, segundo Lorenzato (2012), é qualquer instrumento que é útil ao processo de ensino e aprendizagem, ou seja, com essa definição, incluímos giz, calculadora, filmes, jogos, embalagens, entre outros. O material concreto é um recurso didático que pode ser utilizado no ensino para auxiliar a aprendizagem de um conteúdo que é aplicado pelo professor aos seus estudantes. Entretanto, esse recurso deve ser adotado pelo educador com um propósito claro, no qual o conteúdo abordado deve estar dominado e a aplicação organizada, para que de fato possa contribuir para o processo de entendimento dos conceitos. (Souza, 2007).

O material concreto pode ser manipulável ou estático. Os materiais manipuláveis são todos os objetos que o aluno pode sentir, tocar, manipular, movimentar, sendo estes do dia a dia ou apresentarem alguma ideia (Vale, 1999). Esses permitem uma maior participação dos alunos, como é o caso dos jogos. Os estáticos não possibilitam a modificação de sua forma, permitindo apenas a observação, como é o caso dos sólidos geométricos. Além desses, existem os materiais dinâmicos, os quais permitem transformações contínuas, assim facilitando a percepção de propriedades, redescobertas e possibilitando uma efetiva aprendizagem (Lorenzato, 2012).

O uso de material concreto como facilitador da aprendizagem tem sua importância ressaltada por vários educadores, como Comenius, por volta de 1650, Locke, em 1680, Pestalozzi, Herbart e Froebel, por volta de 1800, Dewey, em 1900, Montessori, Vygotsky e Bruner, nos tempos atuais. Todos esses pensadores, e outros, reconhecem que a ação do indivíduo no material didático é fundamental para o aprendizado, corroborando a ideia de Lorenzatto (2012) de que é necessário a passagem pelo concreto para o alcance do abstrato.

A aplicação desse material pode desempenhar funções, das quais salienta-se: a apresentação do conteúdo, a motivação do conteúdo, o auxílio à memorização e no processo de redescobrimento. Toda aplicação necessita da reflexão do professor para verificar qual é o material mais condizente com o objetivo e a aula. O seu uso auxilia na construção, todavia não garante que a aprendizagem ocorra, por isso que os objetivos devem ser decididos anteriormente e de forma clara (Oliveira, 2017).

Segundo Passos (2012), os materiais manipuláveis devem proporcionar a personificação do conceito matemático estudado, ou as ideias que serão exploradas. Além disso, deve representar o conceito de forma clara, motivar os estudantes, bem como, viabilizar a sua utilização em diferentes etapas da consolidação de conceitos, proporcionando uma base para abstração e manipulação individual.

Apesar da potencialidade do material concreto, ser um facilitador para o aluno, para o professor, ele pode ser um complicador. Dar aula sem esses materiais é mais fácil, mas também é mais difícil aprender sem o mesmo. A dificuldade se dá devido ao fato que, ao realizar atividades com material concreto e investigação, o aluno pode realizar ações fora do planejamento do professor (Lorenzatto, 2012).

Neste sentido, para a aplicação desse recurso, é necessário que o professor saiba utilizá-lo corretamente. Assim, o docente deve refletir sobre a utilização desta prática em sala de aula, analisando se contribuiu no processo de ensino e aprendizagem do aluno. Lorenzatto (2012) afirma também, que não é só a maneira que o material é aplicado que influencia na aprendizagem do aluno, também depende do estado de cada aluno durante a aplicação. Neste sentido, o uso do material concreto deve vir acompanhado de um planejamento reflexivo a fim de assegurar a aprendizagem do estudante.

3 EXPERIMENTAÇÃO E INVESTIGAÇÃO

A experimentação teve ênfase, principalmente no ensino de Ciências, por volta da época de 1960, sob influência de currículos ingleses e norte-americanos. Entretanto, esse método ainda é discutido, havendo literaturas que são favoráveis, como também contrárias a sua utilização (Marandino, 2002).

Esse método pode ser utilizado como uma atividade mobilizadora, incentivando a motivação para o processo de ensino e aprendizagem. A mobilização é a sensibilização para o conhecimento, de forma a criar uma atitude favorável à aprendizagem (Vasconcelos, 2002). Entretanto, ela pode contribuir de forma decisiva ao ser aplicada com um enfoque diferente do anterior, mas isso dependerá das necessidades do aluno e das condições e materiais que o professor possui (Silva, 2010).

Independentemente do enfoque dado a experimentação, existem dois aspectos fundamentais no que se refere à eficiência desta estratégia, principalmente na área das Ciências: primeiro é a capacidade de permitir a participação ativa do estudante, despertando seu interesse e sua curiosidade e favorecendo um efetivo envolvimento com sua aprendizagem, segundo aspecto é a

> […] tendência em propiciar a construção de um ambiente motivador, agradável, estimulante e rico em situações novas e desafiadoras que, quando bem empregadas, aumentam a probabilidade de que sejam elaborados conhecimentos e sejam desenvolvidas habilidades, atitudes e competência [...](Araújo & Abib, 2003, p.190)

Entretanto, existem críticas acerca desse método ao utilizar experimentos que usam apenas um material, de um determinado formato, o qual procede de uma forma. Critica-se pelo fato que, se ocorre sempre o mesmo resultado independente do que é alterado, estaríamos analisando uma situação específica, sem a possibilidade de generalizar o conhecimento obtido com a experimentação (Silveira & Ostermann, 2002).

A experimentação está ligada ao que chamamos de investigação. Sobre o último, ao realizarmos uma investigação chegaremos a um momento que necessita de uma exploração inicial sobre o tema investigado, o qual, para que haja uma melhor base, é necessário leituras e experiências acerca da temática (Fiorentini & Lorenzato, 2012).

Investigar é entender como buscar conhecer aquilo que não se sabe. Na matemática, “[...] é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2009, p.13). A investigação também pode ser utilizada como uma metodologia de aula. Desse modo, a investigação envolve os seguintes momentos para ser realizada: exploração e formulação de questões, conjecturas, testes, reformulação (o qual experimentaremos nossas conjecturas), justificação e avaliação.

Deve-se ter a ciência de que ao utilizar esse método, não se terá o controle de suas conclusões, tornando-a uma atividade de caráter qualitativo. Para isso, usualmente as aulas, ou conjunto de aulas, se, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p.25) dá em três fases: “(i) Introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma [...], (ii) realização da investigação [...], e (iii) discussão dos resultados”, nas quais essas fases podem ser realizadas de várias maneiras.

4 METODOLOGIA

Para verificarmos a aplicabilidade desse material concreto, foi realizada uma pesquisa experimental, a qual o pesquisador é um agente ativo, participando do processo de pesquisa, sendo mais que um observador. Esse tipo de pesquisa consiste em escolher um objeto de estudo, analisando e separando quais fatores podem influenciar os resultados e definir formas de observação e controle nos efeitos que esses fatores causam no objeto de estudo (Gil, 2010).

Também foi utilizada uma pesquisa qualitativa, pois foi pretendido a partir de um questionário, levantar dados qualitativos no que tange à viabilidade de aplicação e sua relação no processo de ensino e aprendizagem. No caso desta pesquisa, foi realizada uma pesquisa grupal, a qual estimula a conversa e discussão entre os participantes, permitindo a geração de espontaneidade, ideias e conclusões criativas, entre outros. Além disso, busca um debate acessível a todos, com questões e assuntos de interesse comum (Bauer & Gaskell, 2012).

Para a realização da pesquisa, foi escolhida uma turma de 2º ano do Ensino Médio de uma escola estadual da serra gaúcha. Após, foram elaborados o roteiro e o questionário para a utilização do material concreto Prédio Trigonométrico. Na aplicação, inicialmente foi apresentado o material, dividido em grupos e aplicado o roteiro. Ao surgimento de dúvidas, o professor funcionou como mediador, pois direcionava os estudantes, a partir do roteiro, para que assim, ocorresse de fato uma investigação pelos estudantes, a partir da manipulação do material concreto. Os alunos seguiam com a manipulação de acordo com os passos descritos no roteiro, permitindo a investigação do material. Depois da finalização do roteiro e do preenchimento dos questionários pelos estudantes, os mesmos entregaram ao professor para a sua análise e correção. Após a devolução, foi realizada uma discussão das principais respostas apresentadas pelos alunos, retirada de dúvidas e uma breve pesquisa sobre o material aplicado.

É importante ressaltar que, ao utilizar a metodologia de investigação, procurou-se seguir as três fases: introdução da atividade por meio de uma proposta, a realização da investigação e uma discussão dos resultados (Ponte et al., 2015). A última fase foi realizada após a análise dos resultados por parte do professor.

Esse trabalho foi realizado em grupo, mas cada aluno entregou individualmente seus resultados. A atividade tem o objetivo de calcular os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis, utilizar os conhecimentos de relação trigonométrica em uma simulação concreta, identificar a relação entre tangente como a divisão entre seno e cosseno e estimar o valor das relações do ângulo de 90°. Além disso, é possível realizar a revisão dos conceitos de catetos adjacente, cateto oposto e hipotenusa.

A construção do material é realizada a partir de materiais de baixo custo, como cartolinas, papel paraná, caixas de leite, palitos de madeira, canudos, entre outros, onde na Figura 2, apresenta-se o "prédio trigonométrico".

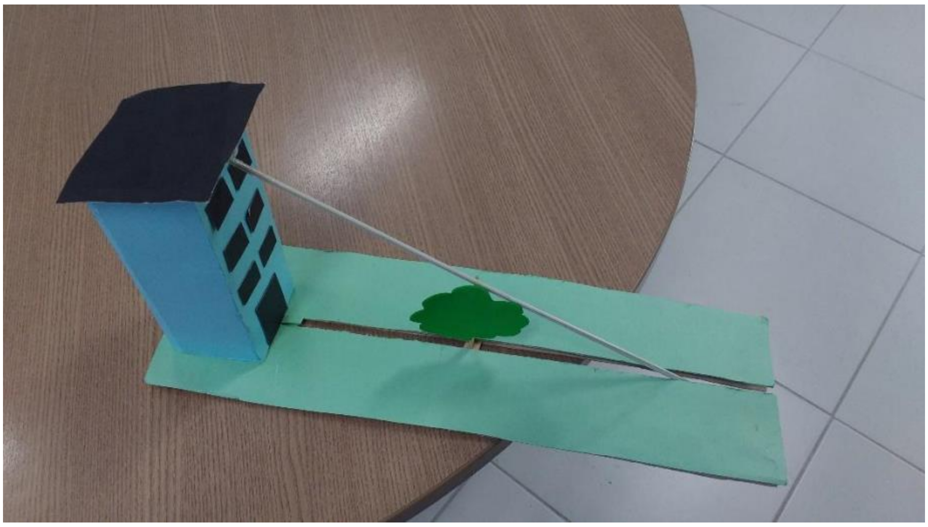


Figura 2: Material concreto "Prédio Trigonométrico".
Fonte: Arquivo Pessoal

A partir da Figura 2 verifica-se a existência de um canudo preso ao topo do prédio e apoiado na árvore. Para que fosse possível modificar o triângulo formado entre o prédio, o chão e o canudo, foi criado um vão por onde o canudo ultrapassa a base. Pode-se notar também que a árvore é móvel (em relação a distância entre o prédio) permitindo variar o ângulo entre o chão e o canudo. Esta variação é necessária para os alunos conseguirem medir o ângulo formado e as distâncias entre os lados do triângulo formado entre o chão e o prédio.

Para auxiliar na aplicação do material, foi criado um Roteiro para os Alunos (Quadro 1) que possui um passo a passo da manipulação do material concreto.

Quadro 1: Roteiro para a utilização do Prédio Trigonométrico

Siga o passo a passo e anote os resultados atingidos na tabela: 1. Meça a altura do prédio. 2. Com o auxílio do transferidor, coloque o ângulo entre o canudo e o chão em 30°. 3. Meça a distância entre o ponto onde o canudo toca o "chão" e a porta do prédio. 4. Calcule a tangente 30°.

5. Use o Teorema de Pitágoras e descubra o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo formado.
6. Utilizando a hipotenusa, calcule o seno e o cosseno de 30°.
7. Com o auxílio do transferidor, coloque o ângulo entre o canudo e o chão em 45°.
8. Meça a distância entre o ponto onde o canudo toca o “chão” e a porta do prédio.
9. Calcule a tangente de 45°.
10. Use o Teorema de Pitágoras e calcule o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo formado.
11. Utilizando a hipotenusa, calcule o seno e o cosseno de 45°.
12. Com o auxílio do transferidor, coloque o ângulo entre o canudo e o chão em 60º.
13. Meça a distância entre o ponto onde o canudo toca o “chão” e a porta do prédio.
14. Descubra a tangente de 60°.
15. Use o Teorema de Pitágoras e descubra o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo formado.
16. Utilizando a hipotenusa, descubra o seno e o cosseno de 60°.
17. Preencha o campo $sin\frac{x}{cos}x$.

Fonte: Elaborado pelo autor

Ao seguir o passo a passo, era necessário que os resultados obtidos, a partir da manipulação do Prédio Trigonométrico, fossem anotados no Quadro 2.

Quadro 1: Roteiro para a utilização do Prédio Trigonométrico.

Ângulo (x)	**Cateto Adjacente**	**Cateto Oposto**	**Hipotenusa**	**Seno**	**Cosseno**	**Tangente**	$\frac{\sin x}{\cos x}$
30°							
45°							
90°							

Fonte: Elaborado pelo autor

Inicialmente os alunos mediram o tamanho do prédio, cateto oposto em relação ao ângulo de inclinação com a horizontal. Posteriormente, modificaram o ângulo entre o canudo e o chão no ângulo solicitado, utilizando o transferidor para realizar a medição. Assim, os alunos mediram a distância entre a base do prédio e o ponto onde o canudo toca o chão. Em sequência, foi solicitado para que seja calculado a tangente do ângulo com as medições realizadas.

Após, utilizando o Teorema de Pitágoras, foi calculada a medida da hipotenusa do triângulo formado, para que fosse possível calcular o seno e o cosseno do ângulo. Esse processo era solicitado para todos os três ângulos notáveis. Por fim, os alunos utilizavam o cosseno e seno calculado para completar a última coluna, a qual é a divisão entre as duas relações verificando assim que o valor da tangente do ângulo também pode ser obtido a partir da divisão.

Após completar a tabela, os alunos recebiam a folha de questionamentos que possuía quatro questões. Na primeira foi entregue a tabela com os valores exatos do seno, cosseno e tangente dos ângulos e foi solicitado aos alunos se os resultados obtidos estavam próximos dos valores exatos e o motivo do ocorrido. O segundo questionamento perguntava qual conclusão que o aluno chegava ao analisar a coluna da tangente e a razão entre o seno e o cosseno. O terceiro solicitava para que o aluno analisasse o comportamento das relações trigonométricas com o aumento do ângulo (sendo que o ângulo fica entre 0° e 90°). Por fim, foi solicitado que os alunos estimassem os valores de seno, cosseno e tangente de um ângulo de 90°, informando qual o raciocínio que fez para alcançar tais valores.

Após a aplicação, foi realizada uma pesquisa que questionava os alunos se a atividade os auxiliou para reforçar os conteúdos das Relações Trigonométricas no triângulo retângulo, quais as principais dificuldades, os pontos positivos e negativos da atividade. Da mesma forma, foi questionado se o uso de materiais influenciou na aprendizagem do conteúdo. Por fim, todos os dados foram analisados e as respostas foram agrupadas por aproximação.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Esse material foi aplicado em uma turma de 2º ano do Ensino Médio de uma escola estadual numa cidade da Serra Gaúcha. A turma possuía 32 alunos, os quais foram divididos em sete grupos, devido ao número restrito do material concreto. Em função de algumas interrupções na aula, a atividade foi aplicada em dois dias.

A principal dificuldade durante o desenvolvimento foi a interpretação dos passos descritos no roteiro, neste sentido o professor auxiliou os estudantes no início da atividade. Além disso, o professor teve que ressaltar a importância de anotar os dados coletados na Tabela 1 já apresentada anteriormente. Nas medições, os alunos solicitaram uma conferência pelo professor, nas quais se percebia que havia, em alguns casos, erro de medição, mas, com a prática, os alunos conseguiram realizar sem a necessidade de intervenção.

No desenvolver da atividade, percebeu-se que os grupos preencheram corretamente os valores calculados. Entretanto, notou-se que um grupo fez uma medição errônea, em que a hipotenusa teve um valor menor que o cateto. Isso se deu, provavelmente, a um erro no cálculo no Teorema de Pitágoras, pois não se media a hipotenusa com a régua.

De restante, todos os resultados estavam coerentes com os valores exatos de seno, cosseno e tangente, além da variação das medições conforme a mudança do ângulo. Analisando a coluna de tangente calculada no triângulo retângulo e a calculada a partir da divisão de seno e cosseno, os alunos alcançaram valores muito próximos em ambos, permitindo a visualização das duas formas de calcular a tangente.

Após finalizar a construção da tabela os alunos responderam o questionário. Como muitos dos alunos trabalharam em grupo, muitas conclusões ficaram iguais. Desse modo, as respostas foram agrupadas conforme cada grupo. Caso houvesse alguma diferença considerável em uma resposta do grupo que ela pertencia, ela foi separada. Assim, temos 9 grupos de respostas (identificados de A até I).

O primeiro questionamento introduz os valores exatos do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis, solicitando aos alunos para lerem a tabela das relações e comparar com os valores obtidos com o material concreto. Na análise, detectou-se que os grupos C, D e E não realizaram justificativas. Os grupos G e H não deram respostas coerentes com o que estava sendo solicitado. Os grupos A, B, F e I afirmaram que a aproximação ocorreu por conta da medição realizada. Segue a transcrição das respostas do grupo A e B:

> *Grupo A: Porque as medidas no verso da folha do cateto oposto e adjacente podem não estar exatas, por terem sido medida "a olho".*
> *Grupo B: Sim, pois os valores são exatos e os valores do prédio variam de acordo e forma que medimos.*
> (Respostas dos grupos A e H, 2019)

O questionamento seguinte solicitava que os alunos analisassem os resultados da tangente e o resultado da divisão do seno pelo cosseno. O grupo A percebeu que nos ângulos de 30° e 45° estavam dando exatos, mas o de 60° não, justificando por ser um erro no cateto adjacente (chão). O grupo H percebeu que a divisão de seno pelo cosseno resulta na tangente. Segue as duas respostas:

> *Grupo A: Posso afirmar que entre os 3 ângulos estudados o 30º e o 45º o resultado da tangente e do seno foi igual, porém a medida do ângulo de 60º deu diferente por algum erro na medida do cateto adjacente.Grupo F: sen 90º = 1, cos 90º = 0, tan 90º = 0. Porque o cateto adjacente é igual a 0. Cateto oposto é igual a 20. Hipotenusa é igual a 20.*
> *Grupo H: Pode-se afirmar que a tangente é a divisão do seno e cosseno*
> (Respostas dos grupos A e H, 2019)

Todos os grupos restantes perceberam que o valor se aproxima, mas não concluíram que a divisão resultava na tangente, como o grupo H.

A Questão 3 perguntava sobre a variação do valor dos resultados do seno, cosseno e tangente, se os valores aumentam ou diminuem quando aumentados os ângulos se aproximando de 90º. O grupo C não detectou que o resultado da tangente aumenta, apesar dos valores em sua tabela estarem de forma crescente. Todos os outros grupos perceberam que o seno e tangente aumentam e o cosseno diminui conforme aumentamos um ângulo agudo, apresenta-se a resposta do Grupo I:

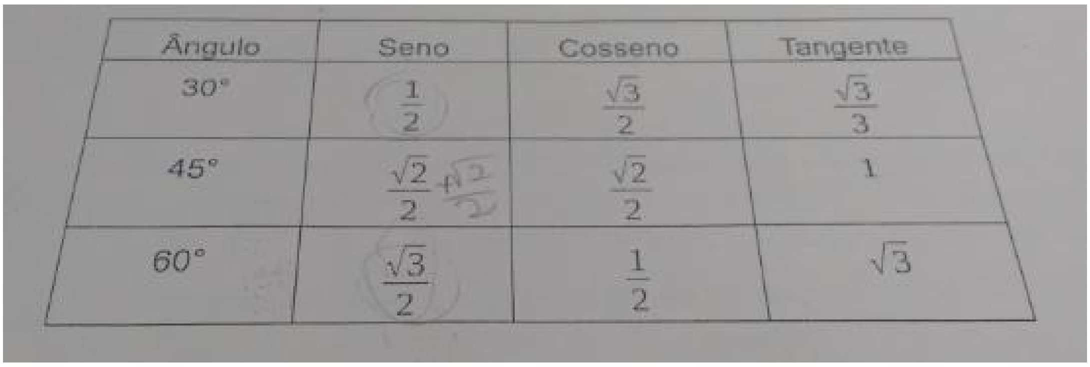
> *Grupo I: Seno vai aumentar, cosseno vai diminuir e tangente vai aumentar.*
> (Resposta do grupo I, 2019).

O último questionamento perguntava aos alunos estimarem o valor do seno, cosseno e tangente do ângulo de 90°. Infelizmente, os grupos B e I utilizaram-se da calculadora para ter os resultados, sem buscarem uma explicação pelo triângulo retângulo. Segue algumas das respostas:

> *Grupo A: sen 90º = 1, cos 90º = 0 tan 90º = ∄. Cateto adjacente = 0. Cateto oposto igual a hipotenusa. Sendo seno cateto oposto dividido pela hipotenusa, o resultado é igual a 1. Sendo cosseno porque zero dividido por qualquer número é zero. Tangente se torna impossível de se dividir.*
> *Grupo F: sen 90º = 1, cos 90º = 0, tan 90º = 0. Porque o cateto adjacente é igual a 0. Cateto oposto é igual a 20. Hipotenusa é igual a 20.*
> *Grupo H: sen 90º = não preencheu cos 90º = não preencheu tan 90º = não preencheu . É incalculável, pois o valor do cateto e a hipotenusa é 0.*
> *Grupo I: sen 90º = 1 cos 90º = 0 tan 90º = erro. Os valores foram dados pela calculadora, e existe uma tabela afirmando isso.*
> (Respostas dos grupos A, F, H e I, 2019).

Os grupos A, F, G perceberam que o cateto oposto e a hipotenusa teriam o mesmo valor, enquanto o cateto adjacente teria valor zero, assim conseguiram chegar aos resultados das relações no ângulo de 90°. Os grupos C, D, E, H pensaram que é incalculável, pois o cateto adjacente "some". Percebe-se que alguns pensaram que o valor da tangente seria 0, pois não lembraram que a divisão de um número por zero é uma indeterminação, fazendo com que não exista o valor da tangente de 90°. Esse último fato apenas o grupo A conseguiu perceber em função do questionamento do grupo ao professor sobre esta questão.

Durante a discussão de como resolver o último questionamento, uma aluna veio com a ideia: 90° é a soma de 45° e 45°, logo seria só dobrar o valor do seno de 45º. Ao questionar o professor com essa dúvida, o professor sugeriu que testasse seu argumento com outros valores, por exemplo se o dobro do seno de 30° é igual ao valor do seno 60° (Figura 3). Percebendo que não funcionava sua conjectura, o grupo começou a pensar em outra solução para estimar o valor das relações para o ângulo de 90°.



Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Figura 3: Tentativa de Estimativa do Ângulo de 90°.
Fonte: Arquivo Pessoal

No dia em que foi devolvido e analisado o trabalho para retirada de dúvidas dos alunos, foi realizada uma pesquisa verificando como a atividade auxiliou a turma a entender o conteúdo. Esta pesquisa foi respondida por 24 alunos (os que estavam presentes na aula). Nesta mesma aula foi destinado um tempo para responder as possíveis dúvidas quanto ao conteúdo, mas os alunos afirmaram que não possuíam nenhuma.

Pelos alunos, esta atividade permitiu reforçar, tirar dúvidas, compreender melhor e mais facilmente o conteúdo, por ser algo prático e por estar em grupo colaborou para o bom desenvolvimento do estudo da matéria. Também permitiu que os alunos percebessem pontos para reforçar com mais estudos posteriormente.

Ao questionar as dificuldades, alguns alunos relataram que não possuíram durante a execução, outros que não tiveram após explicação. Os alunos também pontuaram as seguintes dificuldades:

1. Comparar e calcular a tabela (3 menções);
2. Responder questionamentos específicos (2 menções);
3. Medição dos ângulos (6 menções);
4. Manipulação do objeto (4 menções);
5. Compreensão inicial;
6. Lembrar das fórmulas;
7. Ter atenção para realizar a atividade;
8. Cálculos, especialmente quando há radiciação (4 menções);

Os pontos positivos listados pelos alunos foram o maior esclarecimento da matéria (com 10 menções), cooperação em grupo (com 9 menções), a atividade ser diferenciada e divertida (com 5 menções), não sendo cansativa e a visualização do triângulo (com 3 menções). Vinte dos alunos citaram que não houve pontos negativos nesta atividade. Os pontos negativos listados, todas mencionadas apenas uma vez, foram dificuldade em compreender a atividade, a dificuldade das perguntas, a grande quantidade de pessoas no grupo e a conseguir completar a tabela.

Ao questionar se atividade com material concreto manipulável, como o aplicado, os auxiliaram na aprendizagem, os alunos responderam, em unanimidade que sim. Ao questionar o porquê, alguns alunos justificaram o auxílio pela atividade simular uma situação próxima da realidade, permitir a manipulação prática e visual, adquirir as medições por conta e por estimular o aprendizado mais que cálculos no caderno, corroborando com o que Lorenzatto (2012) afirma relativo ao potencial do uso do material concreto dinâmico na aprendizagem. Também vemos o potencial de motivação para a aprendizagem, como descrito por Vasconcelos (2002).

Também foi mencionado que esta possibilitou uma melhor atenção dos alunos, por serem agentes ativos da atividade. Um aluno enfatizou que seu método de aprendizagem é pela prática. Outro aluno realçou novamente que o trabalho em grupo gera mais incentivo na aprendizagem. Também foi relatado que o ensino apenas no caderno dificulta a aprendizagem, pois algo físico auxilia a ver o que está aprendendo. Segue uma das respostas desse questionamento:

> *Aluno: Mas é claro que sim, até porque ver o que estamos fazendo, tocar e compreender o porque deram aquelas medidas. Isso ajudou bastante.*
> (Resposta de um aluno, 2019).

Por fim, questionou-se sobre o aprendizado especificamente no conteúdo abordado: relações trigonométricas dos ângulos notáveis. Os alunos relataram que essa atividade permitiu uma noção melhor sobre a matéria, ajudando na compreensão, principalmente pelo fato de ser concreto e manipulável, mostrando o objetivo de se calcular tais relações. Um aluno relatou que gostaria de mais atividades assim, o qual facilita quando os números, neste caso os ângulos, geram resultados com números racionais (apesar da atividade resultar em números irracionais em sua grande maioria). Um aluno relatou que a facilidade se dá pelos ângulos já estarem definidos. Dois alunos não identificaram se a atividade auxiliou ou prejudicou, simplesmente a classificando uma atividade “neutra”.

6 CONCLUSÃO

Essa atividade, envolvendo a investigação e o uso de material concreto, sai do ensino tradicional de matemática, e os resultados obtidos pelo seu uso exemplificam a potencialidade do material concreto indo ao encontro da revisão bibliográfica realizada (Lorenzatto, 2012; Passos, 2012; Araújo & Abib, 2003).

Foi observado que o material concreto, por meio da experiência, possibilitou uma aprendizagem mais ativa do aluno. Pelos resultados obtidos pelos questionamentos e o retorno na avaliação do objeto, os próprios alunos identificaram uma facilidade de partir do concreto para a abstração, tendo uma aprendizagem significativa do conteúdo.

Vale reforçar que, o professor teve um papel fundamental no desenvolvimento da atividade não dando respostas prontas, fazendo com que o aluno se colocasse em um papel ativo na produção do conhecimento matemática conforme sugerido por Lorenzatto (2012).

Com base nos questionamentos dos alunos ao professor e nas discussões em grupo, foi possível perceber que o uso do material com apoio do roteiro e do questionário transformou a sala de aula em um lugar de investigação. Os estudantes puderam criar suas próprias hipóteses, testá-las, aprová-las ou refutá-las. Logo, os resultados apresentados pela atividade mostram que o Prédio Trigonométrico se revelou, para grande maioria dos alunos, como um método facilitador de aprendizagem do conteúdo.

É importante ressaltar que a aplicação desenvolvida neste trabalho também foi desenvolvida em outras escolas e no ensino fundamental (9º ano), tendo igualmente os mesmos resultados positivos. Lembrando que para realização desta atividade em uma turma do ensino fundamental é necessário primeiramente trabalhar o Teorema de Pitágoras para, posteriormente, desenvolver as relações trigonométricas.

Espera-se que aplicações com materiais concretos, como o Prédio Trigonométrico, sejam desenvolvidas por outros profissionais, ampliando e desenvolvendo novas ideias e metodologias para o melhoramento do ensino e aprendizagem de matemática.

REFERÊNCIAS

Araújo, M. S. T. & Abib, M. L. V. S. (2003). Atividades Experimentais no Ensino de Física: diferentes enfoques, diferentes finalidades. *Revista Brasileira de Ensino de Física*. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/rbef/v25n2/a07v25n2

Bauer, M. W. & GASKELL, G. (orgs.) (2012). *Pesquisa Qualitativa com texto, imagem e som: um manual prático*. Petrópolis: Vozes.

Chavante, E. & Prestes, D. (2016) *Quadrante matemática, 1º ano: ensino médio*. São Paulo: Edições SM.

Fiorentini, D. & Lorenzato, S. (2012) *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.* Campinas: Autores Associados.

Gil, A. C. (2010). *Como Elaborar Projetos de Pesquisa.* São Paulo: Atlas.

Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R. & Almeida, N. (2016). *Matemática: ciência e aplicações: ensino médio*. São Paulo: Saraiva.

Lorenzato, S. (2012). Laboratório de ensino de Matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: Lorenzato, S. (Org.), *O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.* (pp 3-38). Campinas: Autores Associados.

Marandino, M (2002). *Tendências Teóricas e Metodológicas no Ensino de Ciências.* São Paulo: USP. Recuperado de https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/349832/mod_resource/content/1/Texto%201%20-%20Marandino%20Tend%C3%AAncias%20no%20Ensino%20de%20ci%C3%AAncias%20final.pdf

Oliveira, M. B. (2017). *Material manipulativo na prática em matemática: percepções dos bolsistas do Pibid.* (Trabalho de Conclusão de Curso). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul, campus Caxias do Sul, Caxias do Sul. Recuperado de http://matematica.caxias.ifrs.edu.br/wp-content/uploads/2018/10/2017-12-04-MICHELE-BRANCAGLIONE-DE-OLIVEIRA.pdf

Paiva, M. R. (2015). *Matemática: Paiva.* São Paulo: Moderna.

Passos, C. L. B. (2012). Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: Lorenzato, S. (Org.), *O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores*. Campinas: Autores Associados.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J. & OLIVEIRA, H. (2009). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Silva, M. N. M. (2010, agosto). O Papel Atual da Experimentação no Ensino de Física. In.: *Anais do XI Salão de Iniciação Científica* (pp. 903-905). Porto Alegre: Pontifícia Universidade Católica. Recuperado de: http://www.pucrs.br/edipucrs/XISalaoIC/Ciencias_Exatas_e_da_Terra/Fisica/84372-MAURICIONOGUEIRAMACIELDASILVA.pdf

Silveira, F. L. & Ostermann, F. (2002). A Insustentabilidade da Proposta Indutivista de "Descobrir a lei a partir de resultados experimentais". *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*. Recuperado de https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/download/10052/15382

SOUZA, S. E. O uso de recursos didáticos no ensino escolar. In: I ENCONTRO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO, IV JORNADA DE PRÁTICA DE ENSINO, XIII SEMANA DE PEDAGOGIA DA UEM, Maringá, 2007. Arq. Mudi. Periódicos. Recuperado de http://www.dma.ufv.br/downloads/MAT%20103/2015-II/slides/Rec%20Didaticos%20-%20MAT%20103%20-%202015-II.pdf: Acesso em: 22 mar. 2016.

Vasconcelos, C. S. (2002) *Construção do conhecimento em sala de aula*. São Paulo: Liberdad.

Vale, I. (1999) Materiais manipuláveis na sala de aula: o que se diz, o que se faz. In: *APM (Eds.)*, *Actas do ProfMat 99* (p. 111-120). Lisboa: APM. Recuperado de http://www.academia.edu/1493722/Materiais_manipul%C3%A1veis_na_sala_de_aula_o_que_se_diz_o_que_se_faz

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Uma proposta de ensino de relações trigonométricas em ângulos notáveis por meio do material concreto Prédio Trigonométrico

Gustavo Gonçalves
Pós Graduando no curso A Moderna Educação: Metodologias, Tendências e Foco no Aluno
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul (PUCRS), Porto Alegre, Brasil.
gustgoncalves95@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-1474-4281

Eduardo Boff Ribeiro
Pós Graduando no curso Especialização para Professores de Matemática
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (FURG) – EAD, Rio Grande, Brasil
eduboffribeiro@gmail.com.
https://orcid.org/0000-0002-4679-565X

Gregor Dimitri Teixeira Karoleski
Licenciando do curso Licenciatura
Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, Brasil.
gregordimitri@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-5533-0651

Kelen Berra de Mello
Doutora em Engenharia Mecânica
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS), Caxias do Sul, Brasil.
kelen.mello@caxias.ifrs.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-0131-5373

Endereço de correspondência do principal autor
Rua Avelino Antônio de Souza, 1730, CEP 95043-700, Caxias do Sul, RS, Brasil.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: G. Gonçalves K. B. Mello
Coleta de dados: G. Gonçalves E. B. Ribeiro G. D. T. Karoleski K. B. Mello
Análise de dados: G. Gonçalves K. B. Mello
Discussão dos resultados: G. Gonçalves K. B. Mello
Revisão e aprovação: G. Gonçalves E. B. Ribeiro G. D. T. Karoleski K. B. Mello

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EDITOR – uso exclusivo da revista
Méricles Thadeu Moretti e Rosilene Beatriz Machado

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 31-08-2020 – Aprovado em: 10-02-2021