revista
PARANAENSE
DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

A CONTRIBUIÇÃO DO GEOGEBRA PARA A COMPREENSÃO DO CONCEITO DE CONVERGÊNCIA

Claudete Cargnin*
Rui Marcos de Oliveira Barros**

Resumo: Esse artigo relata parte da implementação de uma sequência didática, elaborada com base na Teoria das Situações Didáticas e Teoria de Registro de Representação Semiótica, para a construção do conceito de integral de Riemann, na qual o GeoGebra foi um dos *softwares* utilizados para a resolução das atividades. A sequência didática foi aplicada a treze alunos de graduação que já haviam cursado a disciplina de Cálculo I. O objetivo desse artigo é mostrar como esse aplicativo permitiu a exploração do conceito de convergência de sequências e séries, favorecendo sua compreensão. São apresentados os comandos utilizados na realização das atividades bem como a análise. O uso do *software* facilitou a compreensão do conceito de convergência e tornou possível a associação da notação de limite no infinito com a representação algébrica da convergência.
Palavras-chave: Cálculo. Convergência. GeoGebra. Sequências. Séries.

A CONTRIBUTION OF GEOGEBRA TO THE UNDERSTANDING OF CONVERGENCE CONCEPT

Abstract: This paper reports part of the implementation of a didactical sequence, which is based on the Theory of Didactic Situations and Register Semiotics Representation Theory, for the construction of the concept of Riemann integral, which was one of the GeoGebra software used for solving activities. The didactical sequence was applied to thirteen graduate students who had taken the course in Calculus 1. The objective of this paper is to show how this application allowed the exploration of the concept of convergence of sequences and series, fostering to their understanding. The commands used in conducting the activities and the analysis are presented. The use of the application has facilitated the understanding of the concept of convergence and made possible the association of the infinite limit notation with the algebraic representation of convergence.
Keywords: Calculus. Convergence. GeoGebra. Sequences. Series.

Introdução

Nas últimas décadas tem sido crescente o número de investigações voltadas para as dificuldades de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral I. Algumas possibilidades para reverter esse quadro de dificuldades estão sendo apontadas no sentido de inserir recursos computacionais nas salas de aula, os quais podem favorecer a compreensão dos conceitos em estudo e não meramente as técnicas de resolução.

Pesquisas como as de Serhan (2009), Campuzano e Figueroa (2011), Richit *et al* (2011) e Barroso *et al* (2008) apontam que o uso de aplicativos computacionais nas aulas de Cálculo permite uma exploração mais aprofundada dos temas em estudo. Dentre esses aplicativos, situa-se o *software* GeoGebra, o qual possibilita o uso de duas representações semióticas do mesmo objeto: numérica e gráfica, o que, segundo Duval (2009), favorece que o aluno tenha acesso ao objeto matemático e o diferencie de sua representação.

Almeida e Viseu (2002) apresentaram estudos que indicavam que uma abordagem de assuntos por meios excessivamente visuais comprometem os resultados analíticos, e vice-versa. Os resultados da pesquisa sugerem “a importância de uma prática de ensino/aprendizagem de conceitos de Cálculo que integrem simultaneamente as abordagens gráficas e analíticas de forma a evidenciar significados e relações” (ALMEIDA; VISEU, 2002, p.217).

De acordo com indicações da literatura, foi desenvolvida uma sequência didática[1], baseada nos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986) e da Teoria de Registro de Representação Semiótica (DUVAL, 2009), com atividades cuja resolução envolvia o *software* GeoGebra. O objetivo desse artigo é mostrar como esse *software* permitiu a exploração do conceito de convergência de sequências e séries, contribuindo para sua compreensão.

Brousseau, na Teoria das Situações Didáticas (TSD), considera uma situação didática tudo aquilo que envolve o aluno, que está em seu entorno, inclusive o professor e tudo o que pode colaborar no componente matemático da sua formação (BROUSSEAU, 2008). Para o autor, a aprendizagem de um conceito se dá por um processo de adaptação a um meio, o qual deve produzir contradições, dificuldades e desequilíbrios.

[1] A sequência didática foi desenvolvida para a tese de Doutorado intitulada "Um Estudo sobre a Contribuição dos Mapas Conceituais para a Construção do Conceito de Integral de Riemann para Funções de uma Variável Real" (CARGNIN, 2013), e aqui é apresentado um pequeno recorte.

Para o contexto dessa pesquisa, consideramos **meio** como o conjunto de situações (tarefas) propostas, incluindo as mídias digitais, as conversões de registro e a comunicação entre alunos. Na TSD, o papel do professor é justamente organizar esse meio antagônico para que o estudante, autonomamente, adeque seu conhecimento com o saber visado, por meio das interações aluno-meio (MARGOLINAS, 1998). Nesse processo de organização do meio, é importante propor situações (tarefas) que levem o aluno a agir sobre o conhecimento, formando conjecturas passíveis de prova, as quais Brousseau classifica como situações de ação (o aluno age sobre o conhecimento), formulação (busca-se levantar possíveis resultados teóricos passíveis de prova), validação (elaboração de provas intelectuais mas que, no nosso caso, foram consideradas apenas como prova computacional) e institucionalização (momento no qual o professor institui o conhecimento como saber formalmente constituído).

Duval, com a Teoria de Registro de Representação Semiótica, busca desvelar o funcionamento cognitivo do aluno para que ele possa conduzir autonomamente seu processo de aprendizagem. Para o autor, os objetos matemáticos (abstratos) são acessíveis por meio de suas representações semióticas, as quais podem ser numéricas, algébricas, gráficas ou em língua natural. Entretanto, o uso de apenas uma forma de representação pode causar confusão na diferenciação entre o objeto matemático e a sua representação. Para Duval (2009), essa diferenciação é possibilitada ao usar ao menos dois tipos de representação semiótica, visto que cada representação fornece informações parciais acerca do objeto matemático.

Metodologia[2]

Pesquisas como as de Beltrão (2009), Santos e Borges Neto (2009), Frescki e Pigatto (2009), Barroso *et al* (2008), Silva *et al* (2006) e Melo (2002), que versam sobre as dificuldades de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral I, apontam o uso computacional como uma ferramenta que pode favorecer a aprendizagem. Com base no levantamento

[2] As atividades a que se refere esse artigo fazem parte de uma sequência didática mais ampla, desenvolvida para a tese de doutorado de uma das autoras (saiba mais em Cargnin (2013)).

bibliográfico, e considerando os pressupostos das teorias TSD e TRRS, foi elaborada uma sequência didática com atividades relacionadas ao conceito de integral definida.

Pretendia-se que, ao final da sequência didática, os alunos pudessem escrever e compreender o significado da expressão

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

Para tanto, dividiu-se a sequência didática em cinco partes, sendo que em cada uma delas foi trabalhado um dos conceitos presentes na expressão (1). O Quadro 1 indica as partes e os conceitos contemplados. Esse artigo abrangerá somente as partes A e C apresentadas no Quadro 1.

Quadro 1: Designação dos conceitos contemplados em cada parte da sequência didática

Parte designada da Sequência Didática	Conceito contemplado
A	Convergência de sequência e sua notação
B	Notação de somatório
C	Convergência de séries e sua notação
D	Cálculo de área de uma região sob uma curva num intervalo
E	Integral definida

Em cada uma das tarefas[3], pretendeu-se que, com a exploração computacional[4], o aluno pudesse transitar entre as várias representações de um mesmo objeto, incluindo a língua natural.

A sequência foi aplicada a alunos de 1º a 3º períodos dos cursos de Engenharia Ambiental, Engenharia de Produção, Engenharia Civil e Licenciatura em Química, em um

---

[3] Aqui, devido à limitação do espaço, não apresentaremos as atividades, mas elas podem ser obtidas em Cargnin (2013).

[4] Além do GeoGebra foi usado, na resolução das atividades, o *software* wxMaxima. Nesse artigo, centraremos nossa discussão apenas no que concerne ao GeoGebra.

minicurso realizado de 06 a 15 de agosto de 2012, das 19 horas às 23 horas, nas dependências da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (Campus Campo Mourão).

Inicialmente, as tarefas propunham a utilização do GeoGebra para a exploração computacional da convergência. Sequências convergentes e não convergentes foram propostas. O estudante deveria analisar o resultado fornecido pelo *software* (representação gráfica) e escrever sua conclusão, em língua natural e com a linguagem algébrica. Trabalhou-se com sequências crescentes, decrescentes e alternadas. O mesmo procedimento foi seguido para a convergência de séries.

No primeiro dia do minicurso, foi entregue uma pasta a cada aluno com as atividades a serem resolvidas durante o minicurso. Para preservar a identidade dos estudantes, foi pedido que cada participante anotasse na sua pasta um nome fictício, o qual será usado para nomeá-los nesse artigo. Ao final de cada encontro, para garantir que cada aluno tivesse o material para o encontro seguinte, era solicitada a devolução da pasta de todos.

As tarefas estavam encadeadamente organizadas, de forma que uma tarefa usava resultados de tarefas anteriores para ser concluída, ou, ainda, possibilitava rever conclusões anteriores. Por isso, os alunos foram orientados a terminarem completamente uma atividade antes de iniciar a resolução da tarefa seguinte.

De início, os alunos agruparam-se pelo nível de amizade entre os participantes. Com o decorrer das atividades, os alunos foram mudando de grupo de acordo com a facilidade/dificuldade em realizar as atividades solicitadas. De modo geral, os alunos buscaram formar, espontaneamente, grupos mais homogêneos. Aqueles com maior facilidade de compreensão uniram-se àqueles com facilidade. Os que possuíam menor facilidade uniram-se àqueles que também possuíam menor facilidade. Mesmo com isso, sempre houve cooperação entre as equipes. Era frequente o grupo daqueles com maior facilidade pararem seu trabalho para ajudarem os demais grupos.

Resultados e discussão

Para a parte A, pretendeu-se que as atividades levassem os alunos a associarem a convergência de sequências com a noção de aproximação, inclusive para perceberem que, quando denotamos uma convergência por meio de um limite, está implícito que o valor limite é uma aproximação e não um valor exato.

Tendo isso em vista, e pensando nas múltiplas representações, trabalhou-se com a convergência de sequência em $\mathbb{R} \times \{0\}$ e em $\mathbb{R}^2$.

A primeira atividade buscava investigar o comportamento de uma sequência em $\mathbb{R}^2$. Após uma breve explicação do que indicava um par ordenado como representação dos termos de uma sequência, foram fornecidos os termos gerais de seis sequências, algumas convergentes e outras não, e o comando a ser usado no GeoGebra para exibir a representação gráfica de cada sequência: **Sequência[<(n,Expressão)>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>]**[5]. Ainda era solicitado que o aluno descrevesse o comportamento da sequência segundo suas observações.

Nesta tarefa, era dada a representação algébrica da sequência (dada pelo termo geral), o estudante deveria usar a representação gráfica, fornecida pelo *software*, e escrever suas conclusões em língua natural. Ou seja, essa tarefa trata da conversão de representação de um registro algébrico para uma representação em língua natural, usando a representação algébrica como intermediária, isto é, são mobilizados três registros de representação semiótica, como preconiza a TRRS. Essa tarefa pode ser considerada uma situação de ação e formulação, pois o estudante explora, com apoio do *software*, o comportamento das sequências (situação de ação) e elabora conjecturas sobre o seu comportamento (situação de formulação), mesmo que o discente não use a palavra convergência para descrevê-lo.

[5] Esse comando possui uma pequena diferença (na primeira parte, em <n, expressão>) em relação ao comando padrão do *software*, pois nosso objetivo era que o *software* apresentasse os pontos da sequência no plano cartesiano, o que não é possibilitado pelo comando padrão.

revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Um exemplo do que o aluno tinha disponível para essa análise é o que está apresentado na Figura 1, onde foi considerado o termo geral $c_n = \frac{n-1}{n}$. Na figura 2 está apresentado o comportamento da sequência divergente $a_n = \sqrt{n}$, outra sequência analisada pelos estudantes.

Figura 1: representação gráfica de sete pontos da sequência $c_n = \frac{n-1}{n}$ em $\mathbb{R}^2$

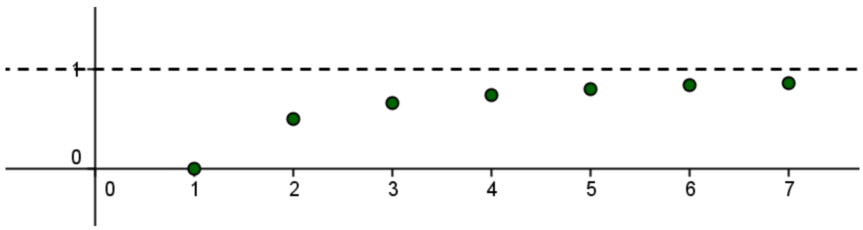
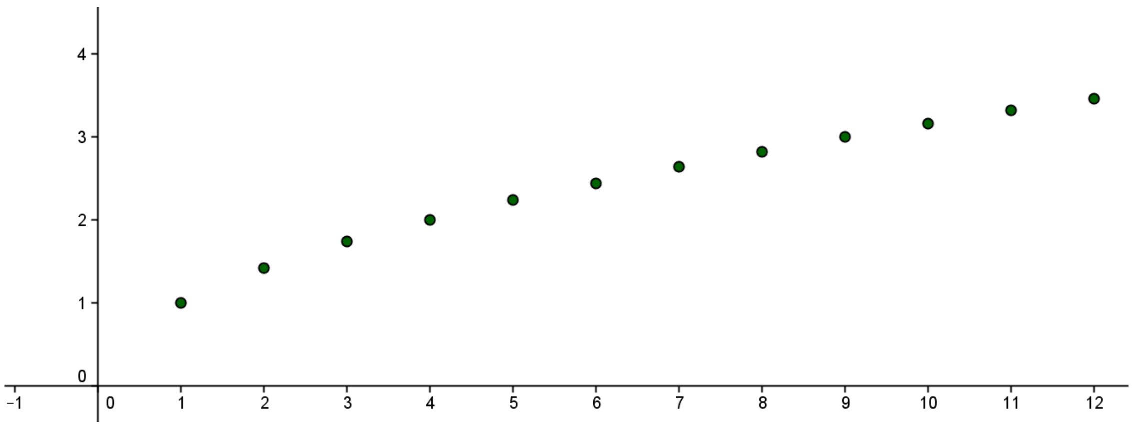


Figura 2: representação gráfica de doze pontos da sequência $a_n = \sqrt{n}$ em $\mathbb{R}^2$



Em ambos os casos (Figura 1 e Figura 2), considerou-se que o aluno transitaria entre os registros semióticos algébrico, gráfico e língua natural, pois lhe era fornecido um registro algébrico, o termo geral da sequência, que seria analisado por meio da sua representação gráfica, facilitada pelo *software*, e cujo comportamento deveria ser descrito usando a linguagem usual (língua natural).

Nessa descrição, foi extremamente importante a participação da professora pesquisadora, elaborando perguntas para orientar a escrita dos alunos, pois eles sabiam falar sobre a experiência, que algumas sequências se aproximavam de um determinado valor e outras não, sabiam expressar critérios, baseados nas representações gráficas, para a sequência convergir, mas, como não tinham o hábito de escrever, não sabiam como colocar essas conclusões no papel, pois não conseguiam associar palavras na língua portuguesa que pudessem representar a informação que eles gostariam de transmitir.

A variação proposta por meio das diferentes expressões algébricas caracteriza os procedimentos metodológicos necessários para a proposta cognitiva de conversão segundo Duval (2009), que não é trivial, nem cognitivamente neutra. Essa operação cognitiva é caracterizada por procedimentos específicos e precisa ser coordenada pelo sujeito aprendente (aluno), como afirmam Brandt e Moretti (2005, p.206):

> A operação de conversão, por sua vez, não é nem trivial, nem cognitivamente neutra. A operação de conversão coloca tanto a questão do papel da semiósis no funcionamento do pensamento quanto o das condições de uma diferenciação entre representante e representado. A complexidade da conversão de representações só pode ser compreendida desde que se veja os sistemas semióticos em sua estreita relação com as representações ou mais exatamente ao par (conhecimento, representação).

De um modo geral, com essa atividade os alunos perceberam que algumas sequências se aproximavam de um valor enquanto outras não. Atribuímos isto ao trabalho em grupo que realizaram. Durante a resolução da questão, houve muitas discussões em todas as equipes para chegar a um consenso, a fim de verificar se as sequências se aproximavam ou não de um número. Vale comentar que o registro gráfico das sequências colaborou intensamente para que os alunos percebessem o comportamento das mesmas, já que isso não foi possível mediante apenas a observação dos pares ordenados listados na janela de álgebra do GeoGebra.

A partir da discussão em grupos, foi possível perceber as variáveis visuais gráficas (aproximação ou não de um determinado valor à medida que se aumentava o número de pontos exibidos) correspondentes à convergência de uma sequência. No entanto, os alunos tiveram dificuldades em escrever esta observação na língua natural, pois não conseguiam encontrar palavras da língua portuguesa que designassem a sua percepção gráfica, como já frisado anteriormente.

A segunda tarefa solicitava que o aluno escrevesse essa conclusão sobre o comportamento da sequência usando a linguagem algébrica, isto é, usando a notação de limites, como, por exemplo, $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$. Chamou-nos a atenção o fato de nenhum aluno ter conseguido fazer isso, pois todos os participantes já tinham cursado Cálculo I pelo menos uma vez. Isto nos indicou que o estudo da teoria de limites não foi devidamente compreendido por eles, pelo menos não enquanto uma possibilidade de descrever um comportamento de uma sequência (ou função).

Ainda considerando a necessidade de variação de representação, a tarefa 4 da sequência didática levava o estudante a analisar o comportamento de uma sequência considerando sua representação gráfica sobre a reta real, isto é, em $\mathbb{R} \times \{0\}$.

No enunciado da tarefa 4, era explicado como inserir o controle deslizante no *software* e, após, solicitava-se que fosse usado o comando: **Sequência[<(Expressão,0)>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>]**[6], no qual o valor final deveria ser substituído pela letra usada para o controle deslizante, para analisar o comportamento das mesmas sequências da tarefa 1. Ao final, era solicitado que o aluno escrevesse sobre as diferenças de comportamento percebidas para as sequências convergentes e não convergentes em $\mathbb{R} \times \{0\}$ e em $\mathbb{R}^2$.

A Figura 3 mostra o comportamento de alguns termos da sequência $c_n = \frac{n-1}{n}$, e a Figura 4 indica o comportamento de alguns pontos da sequência $a_n = \sqrt{n}$, ambas em $\mathbb{R} \times \{0\}$.

[6] Esse comando sofreu alterações em relação ao comando padrão do software, para que pudesse exibir os pares ordenados, referentes aos termos da sequência, sobre o eixo horizontal (das abscissas).

Figura 3: Representação Gráfica de 50 pontos da sequência convergente c_n

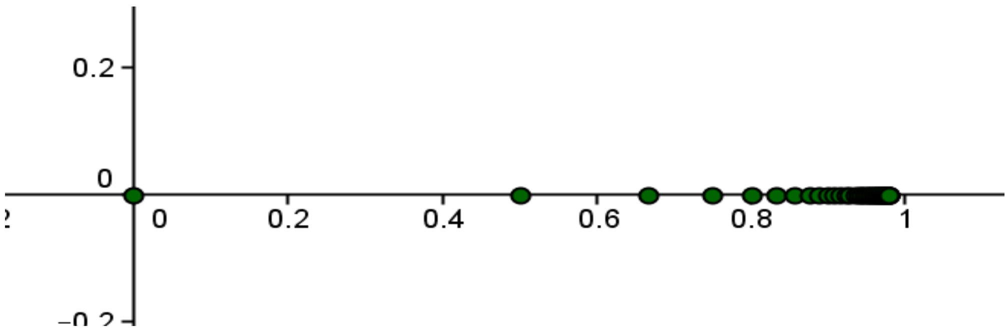


Figura 4: Representação Gráfica de 50 pontos da sequência divergente $a_n = \sqrt{n}$

Observe, na Figura 3, que a convergência de uma sequência, analisada em $\mathbb{R} \times \{0\}$, acarreta uma "aglutinação" de pontos em torno do limite de convergência da sequência. A mesma aproximação não pode ser visualizada nas sequências divergentes, como pode ser observado na Figura 4.

De modo geral, essa exploração, em $\mathbb{R} \times \{0\}$ e em $\mathbb{R}^2$, permitiu que os alunos associassem a convergência de uma sequência com uma aproximação numérica, mesmo que o termo convergência não tenha sido explicitamente usado para representar as aproximações. Observou-se, ainda, que os alunos não conseguiram, num primeiro momento, expressar essa convergência usando a notação de limite, que já era conhecida pelos participantes do minicurso, pois todos já haviam cursado a disciplina. Esse fato nos indicou que os conceitos de limite ainda não estavam bem consolidados nesses alunos e que dúvidas ainda persistiam (a título de informação, com o decorrer das atividades, os alunos começaram a descrever os comportamentos das sequências usando a notação de limites).

Nessas atividades, constatou-se a necessidade de analisar sequências cujos limites sejam diferentes de zero ou 1, para não dar a impressão aos alunos de que todas as sequências convergem para 0 ou para 1.

Ainda, para que os alunos pudessem perceber que, para uma sequência convergir para o número L, é importante que, a partir de um dado momento, cada um dos termos dessa sequência esteja tão próximo quanto se queira desse número L, a tarefa 5 solicitava que fossem analisados os comportamentos de duas sequências convergentes em relação às retas $y = L \pm \varepsilon$, onde $\varepsilon = 0.5; 0.3; 0.1; 10^{-2}$. Na atividade, os alunos eram orientados a representarem as sequências em $\mathbb{R}^2$ e encontrar um n_0 a partir do qual todos os pontos da sequência estavam contidos na faixa $y = L \pm \varepsilon$, para cada valor de ε dado. Também eram estimulados a pensarem sobre as possíveis diferenças gráficas, caso a sequência fosse divergente.

Em relação às diferenças de comportamento observadas entre as sequências convergentes e divergentes, os alunos afirmaram que a sequência convergente fica “dentro da faixa”, e a divergente fica sempre “para fora”. A explicação de um dos alunos foi: “se a sequência for divergente a amplitude da faixa, fica impossível de ser definida, ou se possível consideração de a amplitude da faixa tender ao mais e menos infinito” (aluno Claison). Com esta afirmação, percebe-se que ainda há confusão no que seja o limite graficamente, pois, neste caso, em sala, o aluno mostrava o gráfico indicando o ‘menos infinito’ a que fez menção, como sendo a parte negativa do eixo x e não em relação à amplitude da faixa. Outra aluna explicou a diferença como mostra a Figura 5:

Figura 5: Distinção dos critérios de convergência feita pela aluna Débora.

i: No exercício 4, quando são convergentes os pontos aparecem sempre próximos, e os divergentes são estão sempre se afastando. No exercício 5 quando são convergentes independente da amplitude da faixa é possível encontrar um n_0, quando é convergente foi possível um único n_0 para a faixa y: 0,5

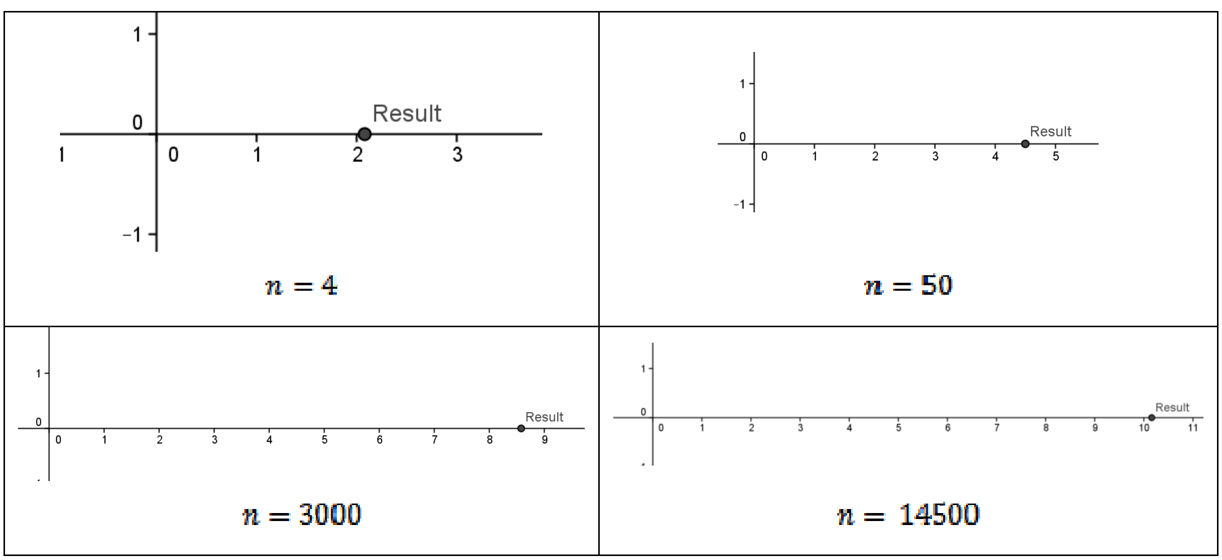
Nosso objetivo era de que a resolução da tarefa 5 ajudasse o aluno a compreender os termos da definição formal de convergência de uma sequência: "Definição: A sequência $\{a_n\}$ converge para o número L se para todo número positivo ε existe um número inteiro n_0 tal que para todo N , N > $n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. Se esse número L não existe, dizemos que $\{a_n\}$ diverge" (CARGNIN, 2013, p.143). Entretanto, mesmo os alunos tendo conseguido entender e explicar a convergência de uma sequência mediante as atividades resolvidas até o momento da definição, a dificuldade com a representação algébrica ainda persistiu, pois os alunos não conseguiram associar a expressão $|a_n - L| < \varepsilon$ com a aproximação dos termos de uma sequência a_n ao número L, a partir de um dado momento.

O *software* GeoGebra favoreceu, ainda, que os alunos avaliassem a convergência de uma série, cujas atividades eram contempladas na parte C da sequência didática. Ao serem questionados se poderia ser convergente uma sequência construída de forma que cada termo era a soma dos termos anteriores (ou seja, uma série), os participantes do minicurso foram unânimes em responderem que uma soma de infinitos termos não poderia convergir, pois, pela intuição, sempre que somamos alguma quantidade positiva a uma quantidade, aumentamos indefinidamente essa quantidade inicial.

Foi usado o comando **Soma(sequência[<expressão>,<variável>,<valor inicial>, <valor final>])**[7] para obter a soma de termos de uma sequência. Como este comando resulta num valor numérico, digamos a, para permitir uma visualização gráfica do comportamento dessa soma, foi solicitado que os alunos complementassem o comando, usando outra estrutura, traduzida pela escrita na linha de comando de: **Result=(a,0)**, onde a é o valor mostrado na janela de álgebra para a soma de termos. Essa estrutura permite que o *software* mostre na sua janela gráfica o par ordenado (a,0) e o "caminhar" desse ponto sobre o eixo horizontal pode ajudar o aluno a compreender, sob outro ponto de vista, a convergência de uma série, pois pode acompanhar visualmente o crescimento de uma soma.

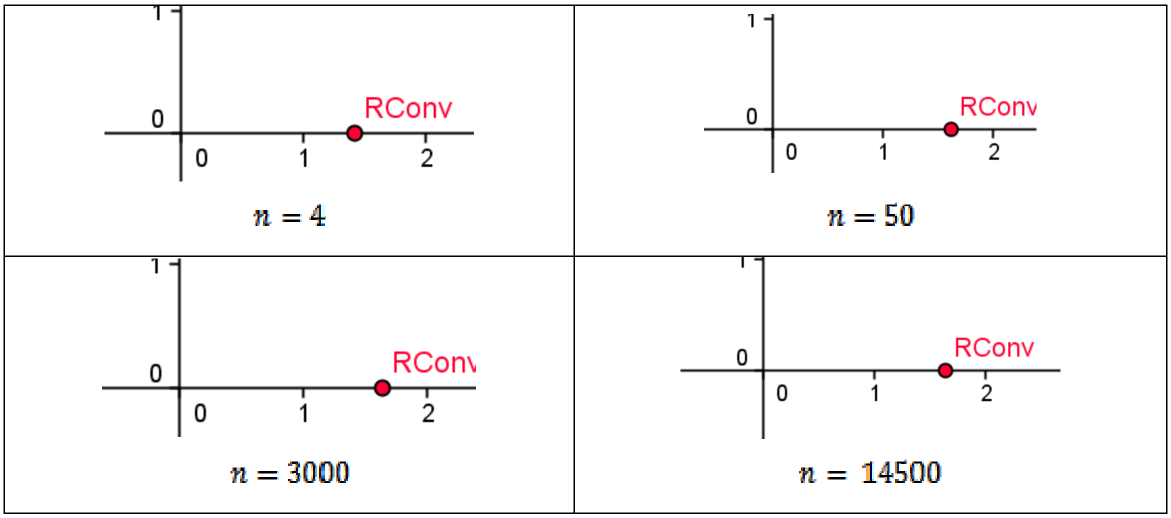
Usando esses dois comandos, os estudantes analisaram a convergência das séries $S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}\right)$ e $s_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i^2}\right)$. As Figuras 6 e 7 nos mostram o comportamento das somas parciais de S_n e s_n para alguns valores de n.

Figura 6: Comportamento da série $S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}\right)$ para alguns valores de n



[7] Esse comando foi adaptado, pois o comando padrão é Soma[<Lista>].

Figura 7: Comportamento da série $s_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i^2}\right)$ para alguns valores de n



É possível observar, na Figura 6, o deslocamento horizontal do ponto que representa, em $\mathbb{R} \times \{0\}$, o valor da soma parcial da série S_n, indicando que esse valor sempre aumentará. Os alunos puderam observar melhor essa alteração pelo uso da ferramenta controle deslizante como valor final no comando inicial dado para esta atividade. O fato da soma ser mostrada graficamente no GeoGebra chamou-lhes a atenção, pois assim eles podiam, usando o controle deslizante, observar a velocidade de crescimento e o aumento no valor numérico calculado.

Inicialmente, considerando as experimentações realizadas até $n = 1000$, todos os cursistas afirmaram que a soma teria um valor máximo. Sobre o comportamento dessa série, um dos cursistas afirmou: “o número aumenta, porém irá chegar em um ponto que a sequência tende a aproximar sendo que quanto maior o denominador mais desprezível o valor é”. Esse comentário é representativo do grupo de alunos, haja vista que eles afirmavam que para n muito grande o valor que estaria sendo somado era muito próximo de zero, sendo, portanto, desprezível.

Infelizmente, por uma limitação no *software*, os alunos não puderam observar a representação gráfica do ponto representante da soma, em $\mathbb{R}^2$, para n muito grande (maior que

30.000, por exemplo), por ser muito trabalhoso para visualizar a tela. Os alunos fizeram isso observando o registro numérico na janela de álgebra.

Já na Figura 7, graficamente não se percebe alteração do ponto que representa o valor da soma parcial de s_n. Isso causou certo desconforto aos alunos, porque eles também não percebiam alteração no valor da soma, mostrado na janela de álgebra do *software*, já que estavam usando apenas duas casas decimais de aproximação. Alterando o número de casas decimais de duas para dez, foi possível perceber que a soma mudava muito pouco em relação à soma anterior, motivo pelo qual o ponto parecia "parado" na tela do computador.

Essa diferença no comportamento do valor das somas parciais, visualizada a partir do recurso computacional, permitiu que os alunos aceitassem a possibilidade de uma série ser convergente. Alguns alunos frisaram a importância da visualização gráfica da soma na reta numérica como apoio à observação e análise do comportamento da série.

A exploração computacional do conceito de convergência de série, que oficialmente é estudada no âmbito do Cálculo II, permitiu que a aluna Débora desse a seguinte definição para a convergência de série, sob duas versões: "quando uma série tem um valor máximo podemos dizer que a série é convergente" e também "uma série convergente é quando somando infinitos termos se mantém o mesmo resultado".

Após as atividades relativas à convergência de séries e sequências, com a exploração do conceito via *software*, com a discussão com os colegas e a necessidade de redação de um texto conclusivo em cada tarefa, percebeu-se que a noção intuitiva do que seja uma série convergente foi alcançada pelos alunos. Esse é um exemplo da construção da teia de relações do conceito mediante registro em língua natural.

Considerações

Após a implementação das atividades elaboradas relativas ao conceito de convergência, notou-se que, quando o aluno usa um recurso computacional como meio de exploração, um meio no qual ele não precisa se preocupar com os resultados obtidos para os cálculos, mas sim com o que é mostrado na tela do computador, o aluno faz investigações mais elaboradas e aprofundadas. Ele pode ir além do que é solicitado pelo professor.

É em meio a essas explorações que os alunos constroem significações para os conceitos estudados. Isso ficou claro quando os alunos souberam analisar e explicar a convergência das sequências, mas não souberam representá-las mediante a notação de limites no infinito, já estudadas por eles. Entretanto, após as atividades exploratórias em que essas notações foram apresentadas como uma forma de representar um determinado conhecimento, não identificamos problemas para o seu uso.

Na realização das atividades, percebeu-se a contribuição do uso dos *softwares* para o entendimento das situações apresentadas. No entanto, é preciso atentar-se para algumas dificuldades que podem ficar mascaradas sob o uso do computador, como: somar frações, operar com as potências de base 10, compreender o significado de um par ordenado, entre tantas outras. Estas pequenas dúvidas podem dificultar a formalização de conceitos em momento posterior.

Nesse aspecto, recomenda-se cautela no uso de recurso computacional nas aulas de Cálculo, a fim de que não sejam suprimidas dificuldades que se tornarão obstáculos mais adiante.

Notas

*Doutora, Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), cargnin@utfpr.edu.br.
**Doutor, Universidade Estadual de Maringá (UEM), rmobarros@uem.br.

Referências

ALMEIDA, C.; VISEU, F. Interpretação Gráfica das Derivadas de uma função por professores estagiários de Matemática. **Revista Portuguesa de Educação**. 2002, 15 (1), 193-219.

BARROSO, N. M. C. *et al*. Uma sequência de ensino para a introdução do conceito de integral de Riemann. **Anais IX ENEM**. 2008. Disponível em: www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC23187786391 . Acesso em: 24 jan. 2012.

BELTRÃO, M. E. P. **Ensino de Cálculo pela modelagem matemática e aplicações** – Teoria e Prática. Tese (doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cp101274.pdf Acesso em: 20 mar. 2011.

BRANDT, C.F.; MORETTI, M.T. O papel dos registros de representação na compreensão do sistema de numeração decimal. **Educação Matemática Pesquisa**. 2005, 7(2), 201-227, 2005.

BROUSSEAU, G. (1986). **Theorization des phénomènes d'enseignement des Mathématiques.** Thèse. L'Université de Bordeaux I, 1986. Disponível em: http://tel.archivesouvertes.fr/docs/00/50/92/25/PDF/TheseetAnnexesGBA.pdf. Acesso em: 12 fev. 2012.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. Tradução de Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.

CAMPUZANO, J.C.P.; FIGUEROA, A.R. Un análisis del uso de La tecnologia para El cálculo de primitivas. **Números – Revista de Didactica de las Matemáticas** , 2011, 77, 85-98.

CARGNIN, C. **Um Estudo sobre a Contribuição dos Mapas Conceituais para a Construção do Conceito de Integral de Riemann para Funções de uma Variável Real.** Tese de doutorado. Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática – Universidade Estadual de Maringá. Maringá-PR, 2013.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. (fascículo I). Tradução de Lenio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

FRESCKI, F. B.; PIGATTO, P. Dificuldades na Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral na Educação Tecnológica: proposta de um Curso de Nivelamento. *In*: I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia. **Anais.** Ponta Grossa: UTFPR, 2009.

MARGOLINAS, C. Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement. *In*: Noirfalise, R. (Eds). **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques**, conférence, Actes de l'Université d'Eté, La Rochelle, Juillet 1998, ed. IREM Clermont-Ferrand, pp. 3-16. Disponível em: http://halshs.archivesouvertes.fr/docs/00/42/18/45/PDF/1998_La_Rochelle.pdf. Acesso em: 16 fev. 2013.

MELO, J. M. R. **Conceito de Integral**: uma proposta computacional para seu ensino e aprendizagem. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática). Pontifícia

Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002. Disponível em: http://www4.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/jose_manuel_melo.pdf. Acesso em: 14 jan. 2012.

RICHIT, A. *et al.* Possibilidades Didático-Pedagógicas do Software Geogebra no Estudo do Conceito de Integral. **XIII CIAEM-IACME**. 2011. Disponível em: http://cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2022/130. Acesso em: 08 jan.2012.

SANTOS, R. M.; BORGES NETO, H. **Avaliação do Desempenho no Processo de Ensino-Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral I (O Caso da UFC).** Disponível em: http://www.multimeios.ufc.br/arquivos/pc/artigos/artigo-avaliacao-do-desempenho-no-processo-de-ensino-aprendizagem.pdf. Acesso em: 10 set. 2009.

SILVA, S. V.*et al*. Ambiente Colaborativo de Aprendizagem – Um estudo de caso baseado no curso de Engenharia de Produção dos Institutos Superiores de Educação (ISECENSA). XIII SIMPEP. **Anais.** Bauru, SP, 6 a 8 de novembro de 2006.

SERHAN, D. Using Concept Maps to Assess the Effect of Graphing Calculators Use on Students' Concept Images of the Derivative at a Point. **International Journal for Mathematics Teaching and Learning**. 2009. Disponível em: http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/serhan2.pdf. Acesso em: 08 jan. 2012.

Recebido em: Março de 2014
Aprovado em: Setembro de 2014