REVISEM

Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v4i1.10271

NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA FRACIONÁRIA: A INFLUÊNCIA DE CARACTERÍSTICAS FORMAIS

Paulo César Freire
Centro Nacional de Educação
profpaulocf@gmail.com

Rosana Nogueira de Lima
Universidade Anhanguera de São Paulo
rosananlima@gmail.com

Resumo

Neste artigo, temos por objetivo analisar as características formais presentes no trabalho de alunos de 6º ano do ensino fundamental com duas questões: uma envolvendo o subconstruto *parte-todo*, outra envolvendo o subconstruto *medida*, de forma a compreender como essas características influenciaram a resolução das questões. Para isso, elaboramos e aplicamos um mesmo questionário antes e depois que alunos de 6º ano do Ensino Fundamental tivessem aprendido números racionais na forma fracionária com o professor de Matemática. Os dados coletados foram analisados à luz dos Três Mundos da Matemática de David Tall, pois acreditamos que esses alunos deixaram de usar características do mundo corporificado para usarem características do mundo simbólico sem entender tal transição. Resultados mostraram que a falta de características do mundo formal pode impedir que os alunos sejam bem-sucedidos até mesmo em situações com o subconstruto parte-todo, que é mais familiar a eles.
Palavras-chave: Números racionais na forma fracionária. Subconstrutos parte-todo e medida. Mundo formal.

Abstract

In this paper we aim at analysing what formal characteristics are evidenced in the work of 6th grade students with two questions, one involving part-whole subconstruct and the other measure subconstruct in order to understand how such characteristics influenced the solving of such questions. For this, we developed and administered a questionnaire before and after 12-year-old students were introduced to rational numbers in the fractional form by their mathematics teacher. Collected data was analysed in the light of David Tall's Three Worlds of Mathematics, since we believe that these students stopped from using embodied world characteristics to use symbolic world ones without understanding such transition. Results showed that the lack of formal world's characteristics may prevent students from being successful even with part-whole subconstruct, which they are more familiar with.
Keywords: Rational numbers in fractional form. Part-whole and measure subconstructs. Formal world.

INTRODUÇÃO

É vasta a pesquisa em Educação Matemática que estuda o ensino e a aprendizagem de números racionais na forma fracionária. Inicialmente, este estudo se referia à análise desses números e em classificações deles em diferentes subconstrutos, como por exemplo, de Behr, Richard, Post e Prata (1983), Nunes, Bryant, Pretzlik, Bell, Evans e Wade (2008) e Romanatto (1997). Com essas pesquisas, observou-se a necessidade e a relevância de se classificar números racionais na forma fracionária em subconstrutos e a importância deles para o ensino e a aprendizagem de números racionais.

Outras pesquisas foram realizadas com o intuito de analisar o trabalho de alunos (por exemplo, CHARALAMBOUS; PITTA-PANTAZI (2005); MERLINI (2005) e de professores (por exemplo, GARCIA SILVA (2007), DAMICO (2007)) com os números racionais na forma fracionária. Percebemos que muitas delas evidenciam que o melhor desempenho dos participantes é em situações que envolvem o subconstruto *parte-todo* e o pior, em situações com o subconstruto *medida*.

Em nossa pesquisa, elaboramos um questionário contendo 13 questões que envolviam os subconstrutos *parte-todo*, *medida*, *operador*, *razão*, *quociente* e *probabilidade*, que foi aplicado a 41 alunos em dois momentos: um no início do 6º ano do Ensino Fundamental, quando eles ainda não tinham estudado números racionais na forma fracionária com o professor de Matemática. O outro, durante o 6º ano, após o estudo desses números. Tínhamos com objetivo verificar quais as mudanças de raciocínio os alunos tiveram depois de estudarem números racionais na forma fracionária. Os dados coletados foram analisados com o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2013). Entendemos que há uma dificuldade de alunos na transição entre os anos iniciais e os anos finais do Ensino Fundamental, pois eles deixam de trabalhar com materiais concretos, parte do mundo corporificado, para utilizar somente números, que habitam o mundo simbólico, sem que uma transição entre esses tipos de conceitos seja realizada, em particular, integrando características do mundo formal.

Assim, neste artigo, tivemos como objetivo analisar as características formais presentes no trabalho desses alunos com duas questões de nosso questionário: uma envolvendo o subconstruto *parte-todo*, outra envolvendo o subconstruto *medida*, de forma a compreender como essas características influenciaram a resolução das questões.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para a elaboração do nosso questionário e para a análise dos dados com ele coletados, escolhemos o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2013).

Essa escolha deveu-se ao fato de que ele retrata a existência de pelo menos três diferentes tipos de conceitos matemáticos,

> (...) Os *objetos corporificados*, tais como, os elementos da Geometria, gráficos e outros, podem, inicialmente, ser fisicamente manipulados e, posteriormente, concebidos como objetos mentais. Os *"proceitos" simbólicos* são conceitos matemáticos que necessitam de símbolos para serem representados, como números ou equações algébricas. Por fim, os *conceitos axiomáticos* são axiomas, definições, teoremas, usados para servir de base para o sistema axiomático com o qual desenvolvemos a Matemática formal. (LIMA, 2007, p. 70. grifo da autora)

Esses três diferentes tipos de conceitos em Matemática habitam três diferentes Mundos da Matemática: o mundo conceitual corporificado, o mundo operacional simbólico e o mundo formal axiomático. Aparentemente, na passagem do 5º para o 6º ano, há uma lacuna conceitual no entendimento do aluno, dificultando a aprendizagem dos números racionais na forma fracionária. Entendemos que isso acontece porque, frequentemente, o aluno não utiliza mais materiais manipuláveis durante o aprendizado, que são elementos pertencentes ao mundo conceitual corporificado, e passa a aprender efetuando ações com símbolos para representar conceitos, que pertencem ao mundo operacional simbólico.

O mundo conceitual corporificado (ao qual nos referimos como *mundo corporificado*) é o mundo das observações, ações e reflexões sobre objetos, sejam eles físicos ou mentais. Um indivíduo não precisa, necessariamente, fazer manipulações físicas com um objeto, mas pode manipulá-lo mentalmente, levantar conjecturas sobre propriedades dele ou de uma ação sobre ele. Neste mundo, é por meio da visualização que características matemáticas de um objeto ou figura são percebidas.

Podemos exemplificar características do mundo corporificado nos números racionais na forma fracionária com a divisão de uma figura geométrica plana em partes de mesma área, e o destaque de uma ou mais partes desse todo, como no exemplo apresentado na Figura 1. Visualmente, percebe-se a divisão de um todo, e o destaque de algumas partes. Dessa forma, pode-se determinar que foram destacadas três partes de um todo dividido em cinco partes.

Figura 1 – Divisão de figura em partes de mesma área, e com três partes pintadas
Fonte: Arquivo pessoal

O mundo operacional simbólico (ao qual nos referimos como *mundo simbólico*) é o mundo dos símbolos matemáticos, que têm a função de representar ações e percepções existentes no mundo corporificado. Também é no mundo simbólico que efetuamos cálculos matemáticos. Nesse mundo, os símbolos são vistos como uma dualidade entre o conceito que eles representam e o processo efetuado sobre eles, que é representada pelos "*proceitos*" (GRAY; TALL, 1994).

Uma característica do mundo simbólico no conceito dos números racionais na forma fracionária é a própria representação desse número na forma $\frac{a}{b}$, sendo "a" a quantidade de partes destacadas de um objeto ou de um conjunto de objetos, e "b" o número total de partes em que o objeto foi dividido ou a quantidade total de objetos no conjunto. Para "montar" um número racional na forma fracionária, um aluno pode fazer o que chamamos de dupla contagem. Na primeira, contam-se partes destacadas do objeto ou conjunto de objetos, e o número resultante é colocado no numerador. Na segunda, contam-se partes em que o objeto foi dividido ou a quantidade total de objetos do conjunto e o número resultado é colocado no denominador.

O mundo formal axiomático (ao qual nos referimos como *mundo formal*) é formado por linguagem formal, definições formais e axiomas, que são usados para organizar as estruturas matemáticas, fazer deduções e demonstrações. Apesar de este mundo ser trabalhado em sua totalidade principalmente no ensino superior, em que os processos do pensamento matemático avançado se fazem necessários, o aluno da educação básica também se depara com características dele quando aprende. Por exemplo, ao trabalhar com números racionais na forma fracionária, é necessário que um aluno, na educação básica (ou em qualquer nível de escolaridade), compreenda que uma figura deve ser dividida em *n* partes de mesma área, para que cada uma delas represente exatamente $\frac{1}{n}$ parte da figura. Esta é uma característica formal justamente por fazer parte da definição de divisão.

Podemos citar como exemplo de características formais para os números racionais na forma fracionária a definição apresentada aos alunos ainda no ensino fundamental, $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}\ e\ b \neq 0\right\}$. Traços do mundo formal também aparecem, por exemplo, em situações em que há generalização, tal como, na apresentação da escrita da forma $\frac{a}{b}$, e a generalização de que "a" representa o número de partes destacadas e "b" o número de partes em que o todo foi particionado.

No que se refere aos subconstrutos *parte-todo* e *medida*, de acordo com Behr, et al. (1983), o subconstruto *parte-todo* está presente em uma situação em que uma quantidade contínua ou uma quantidade discreta é dividida em partes iguais. Desse modo, representa o *parte-todo* uma comparação entre o número de partes tomadas da unidade e o número total de partes em que o todo, objeto ou conjunto de objetos, foi dividido. Podemos entender, a partir desta perspectiva, que nesse subconstruto, o numerador do número racional na forma fracionária é menor ou igual ao denominador.

Já o subconstruto *medida*, para Behr, et al. (1983), representa duas situações. Em uma, ele é considerado um número, que pode ser representado em um intervalo na reta numérica. Na outra situação, esse subconstruto é associado à divisão de uma unidade de *medida*, podendo, na divisão $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$, originar uma nova unidade como resultado da subdivisão.

Entendemos que características do mundo formal são essenciais para qualquer trabalho com alunos de qualquer nível de escolaridade, pois são elas que permitem a compreensão integral de um conceito matemático. Assim, nesse artigo, buscamos as características formais presentes no trabalho de alunos na transição do 5º para o 6º ano do Ensino Fundamental, ao resolverem questões com os subconstrutos *medida* e *parte-todo* (BEHR, et al., 1983).

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Nesta pesquisa, tivemos por objetivo verificar quais mudanças de raciocínio os alunos tiveram depois de estudarem números racionais na forma fracionária no 6º ano. Fizemos duas coletas de dados em uma escola pública estadual de São Paulo. A primeira coleta foi realizada com 41 alunos de dois 6ºs anos, no início do ano letivo, antes que eles tivessem contato com o conteúdo de número racional na forma fracionária com o professor do 6º ano. A segunda coleta de dados foi realizada com os mesmos 41 alunos após o ensino desse conteúdo.

Para ambas as coletas de dados, foi elaborado um único questionário, contendo 13 questões sobre números racionais na forma fracionária, à luz do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, e considerando a classificação das frações apresentada por Behr, *et al*. (1983), bem como, o subconstruto *probabilidade* de Romanatto (1997). Uma análise detalhada das questões em relação aos subconstrutos e aos Três Mundos da Matemática encontra-se em Freire (2011).

Depois de classificarmos as respostas apresentadas pelos 41 alunos participantes em cada questão do questionário, tanto para a primeira quanto para a segunda coleta, escolhemos seis alunos para participarem de entrevistas, a fim de melhor compreendermos o raciocínio deles ao responderem as questões. Estas entrevistas foram conduzidas pelo primeiro autor deste artigo, na presença de um observador, que também fez alguns questionamentos aos alunos. As entrevistas foram áudio-gravadas e transcritas para análise.

Com o intuito de compreendermos como foram ensinados os números racionais na forma fracionária às classes de 6º ano com as quais coletamos nossos dados, entrevistamos os dois professores das salas, somente como subsídio para a análise dos dados coletados com os alunos.

Para este artigo, nos detemos em duas questões. A Questão 9 (Figura 2) envolve o subconstruto *medida* e solicita a localização de dois racionais na forma fracionária na reta numérica.

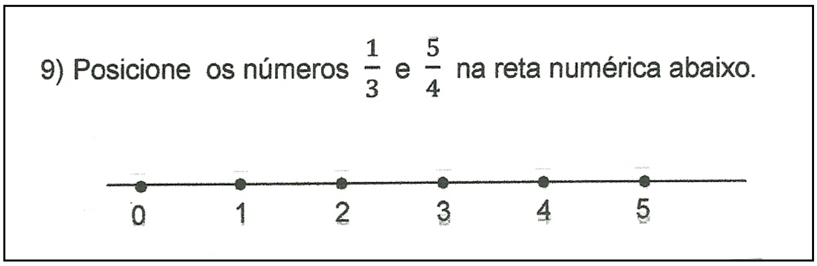

Figura 2 – Questão 9 do Questionário
Fonte: Arquivo pessoal

A Questão 13 (Figura 3) envolve o subconstruto *parte-todo* e solicita um número que represente uma parte destacada de uma figura que não foi dividida em partes de mesma área.

A escolha destas questões se deveu à literatura referente a números racionais na forma fracionária, na qual se observa que, aparentemente, o subconstruto com o qual alunos e professores têm mais facilidade é o *parte-todo*, e o de maior dificuldade é *medida*.

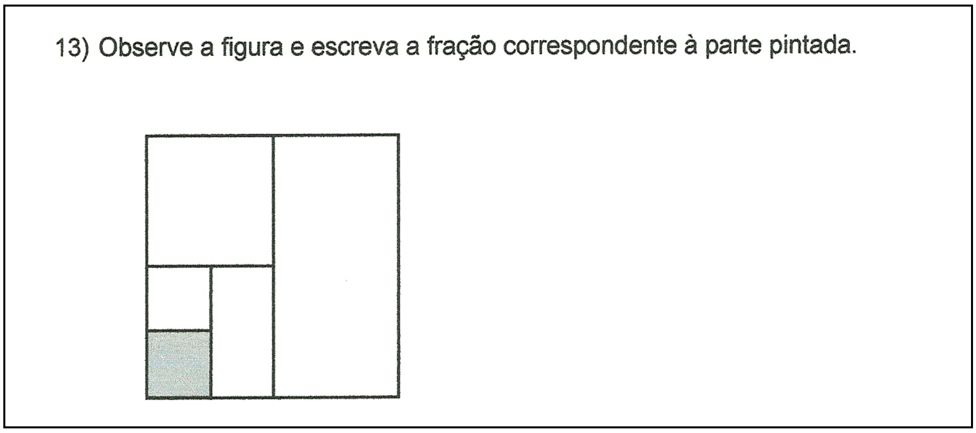

Figura 3 – Questão 13 do Questionário
Fonte: Arquivo pessoal

Analisamos os dados obtidos com estas questões de forma a buscar se os alunos participantes utilizaram características formais ao respondê-las, e como elas interferiram nesse trabalho.

ANÁLISE DOS DADOS COLETADOS

É nosso entendimento que a resolução da Questão 9 envolve características do mundo simbólico no subconstruto *medida*, pela representação dos números por meio de símbolos matemáticos, e características do mundo formal pela localização do número racional na forma fracionária na reta numérica.

Nas entrevistas, os professores dos alunos participantes afirmaram que eles teriam dificuldades de responder à Questão 9, pois a situação nela presente não foi trabalhada por eles em sala de aula por julgarem se tratar de conteúdo do 7º ano.

Para esta questão, tivemos três respostas em branco na primeira coleta e quatro na segunda. Além disso, 14 alunos na primeira coleta e 15 na segunda apresentaram respostas como desenhar figuras sem qualquer ligação com o exercício, respostas com localizações em outros pontos da reta, e muitas respostas rasuradas.

Nenhum aluno, dentre os 41, acertou a questão na primeira coleta. Na segunda, três alunos acertaram parcialmente a questão. Nas respostas, eles localizaram o número $\frac{1}{3}$ na reta numérica no intervalo entre zero e um, porém se equivocaram na localização do número $\frac{5}{4}$, como pode ser visto na resposta de André[1], apresentada na Figura 4.

[1] Os nomes dos alunos foram modificados para preservar a identidade deles.

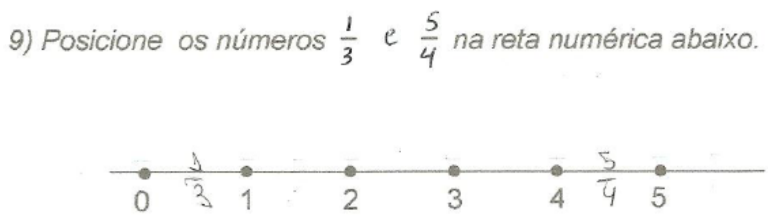

Figura 4 – Resolução do aluno André para a Questão 9
Fonte: Arquivo pessoal

Observe que não houve, por parte de André, a preocupação de localizar o número racional na forma fracionária $\frac{1}{3}$ no ponto exato, ou seja, ele não fez uma divisão do intervalo para localizá-lo, somente o posicionou entre 0 e 1.

As outras respostas a esta questão envolveram localizar os números $\frac{1}{3}$ e $\frac{5}{4}$ após o numerador, após o denominador ou no mesmo ponto que o denominador. Nove alunos na primeira coleta e cinco na segunda responderam como no exemplo da aluna Carla, apresentado na Figura 5, tendo localizado $\frac{1}{3}$ após o número 1 e $\frac{5}{4}$ após o número 5. Observe que a aluna fez alguns “pontinhos” para localizar os números $\frac{1}{3}$ e $\frac{5}{4}$ na reta.

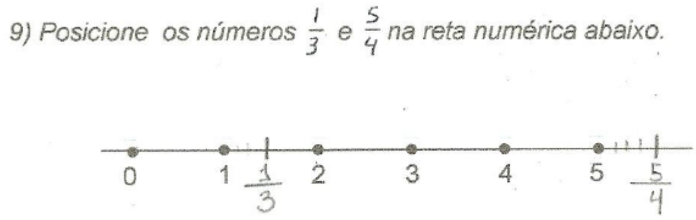

Figura 5 – Resposta da aluna Carla para a Questão 9
Fonte: Arquivo pessoal

Na entrevista, ao ser questionada sobre esta resposta, Carla afirmou que se lembrou da graduação de uma régua.

P. Nessa questão, você tinha que posicionar $\frac{1}{3}$ e $\frac{5}{4}$ aqui nessa reta numérica. Você entendeu que isso era uma reta numérica?
Carla. Entendi.
P. O $\frac{1}{3}$ você pôs depois do número 1. Por que?
Carla. Aqui eu coloquei mais dois pontinhos para formar um terço.
P. Mas por que depois do um?
Carla. Eu pensei que era aqui.
P. E o $\frac{5}{4}$ você colocou depois do cinco?
Carla. Porque na régua às vezes está assim. Não tá? Tem aqueles pontinhos. Então eu fiz assim.
P. Então o cinco quartos é maior que o cinco?
Carla. É.

P. E o um terço é maior que o um. É isso?
Carla. Acho que é.
P. Você lembrou da régua?
Carla. Foi.

Trecho de entrevista com aluna Carla

A aluna comparou a reta numérica a uma régua graduada. Para ela, os numeradores dos números $\frac{1}{3}$ e $\frac{5}{4}$ representam o centímetro da régua e os denominadores a parte decimal, ou seja, os milímetros. Note que ela afirmou que, para localizar o número, ela desenhou mais três pontinhos. Entendemos que Carla buscou características do mundo corporificado no subconstruto *medida* para tentar resolver a questão.

Seis alunos na primeira coleta e três na segunda localizaram $\frac{1}{3}$ no número 1 e $\frac{5}{4}$ no número 5, utilizando o número natural da reta numérica como numerador do número racional na forma fracionária.

De forma similar, seis alunos na primeira coleta e dez na segunda localizaram $\frac{1}{3}$ no número 3 e $\frac{5}{4}$ no número 4, como no exemplo apresentado na Figura 6. Eles fizeram esta localização utilizando o número natural da reta numérica como denominador do número racional na forma fracionária.

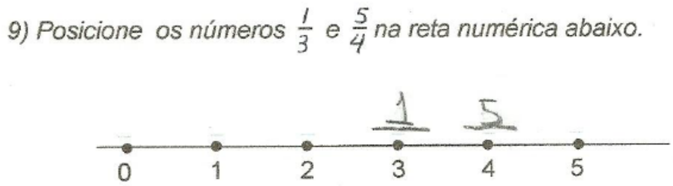

Figura 6 – Resposta do aluno Flávio para a Questão 9
Fonte: Arquivo pessoal

André respondeu da mesma forma que Flávio, e, ao ser questionado na entrevista, respondeu que se baseou na régua.

P. Nessa questão, você tinha que posicionar o $\frac{1}{3}$ e o $\frac{5}{4}$ na reta numérica. Você já tinha visto uma reta numérica?
André. Já.
P. Onde você já tinha visto uma reta numérica?
André. Já tinha visto em uma régua.
P. Você posicionou o $\frac{1}{3}$ depois?
André. Três e pouquinho.
P. Você posicionou depois?
André. Do três, como se fosse trinta, depois vem o trinta e um, por isso que eu coloquei o ponto.
P. Você tirou daí? Mas por que trinta? Não é três?
André. É como se fosse dois inteiros, por exemplo, se em cima, no numerador, fosse dois, seria dois terços.

P. E aí era depois do dois ainda?
André. Era mais um pouco.
P. E o $\frac{5}{4}$ você colocou ele onde?
André. No meio. Que é o quatro. Então, não são dez pontinhos? Eu coloquei no meio do quatro.
P. Por causa do cinco?
André. É. No meio não, um pouco mais para cá, no meio cabe o cinco.
P. Você está falando que tem dez pontinhos, dez divisões. Por que dez?
André. Assim, do zero vai dez pontinhos para chegar no um.

Trecho de entrevista com aluno André

Para esses alunos, os denominadores representam o centímetro da régua graduada e os numeradores os milímetros. Note que André considera os milímetros como unidade de medida, e confunde o número racional na forma fracionária com um número natural, ou seja, ao partir do número três da reta, ele conta 31, 32 e 33 para localizar $\frac{1}{3}$.

Entendemos que a necessidade do uso de características formais para a resolução desta questão foi fator determinante para a dificuldade enfrentada pelos alunos participantes. Mesmo que esse tipo de questão tenha lugar somente no ano letivo seguinte, os tipos de erros apresentados pelos alunos, de considerar o numerador ou o denominador como um número natural, foram observados também na análise de outras questões do questionário que envolviam outros subconstrutos.

Ao invés de trabalharem com as características do mundo formal presentes na questão, esses alunos apresentaram características do mundo corporificado, na tentativa de resolução da questão, como, por exemplo, a ideia da régua graduada que interferiu diretamente na localização dos números na reta numérica, pois os alunos relacionaram a régua graduada com a reta numérica, e as divisões da reta (em milímetros) com numerador ou denominador do número racional na forma fracionária.

Na Questão 13, entendemos que estão presentes características do mundo corporificado, com a visualização da figura e a ideia de dupla contagem no subconstruto *parte-todo*, e características do mundo formal, pela necessidade de se redividir a figura para o entendimento de quantas partes o inteiro foi dividido.

Os professores dos alunos participantes julgaram que, provavelmente, eles teriam dificuldades para responder à Questão 13, pois esse tipo de situação não foi trabalhado durante as aulas. Por outro lado, foi trabalhada a necessidade de dividir uma figura em partes de mesma área.

Para esta questão, houve cinco respostas em branco na primeira coleta e uma na segunda. Cinco alunos na primeira coleta e doze na segunda apresentaram respostas como desenhar figuras e pintar totalmente, respostas com números inteiros ou respostas rasuradas.

Na primeira coleta, nenhum aluno acertou esta questão. Já na segunda, quatro alunos responderam de forma correta, como o exemplo apresentado na Figura 7.

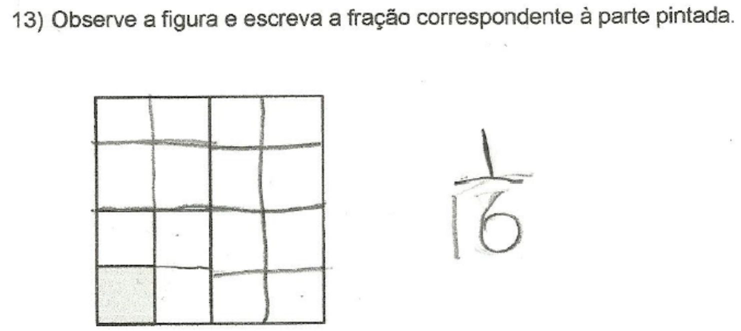

Figura 7 – Resposta da aluna Priscila para a Questão 13
Fonte: Arquivo pessoal

Os alunos que acertaram esta questão redividiram a figura, de modo que as partes ficassem com a mesma área, e apresentaram o número racional na forma fracionária correspondente. Vale enfatizar que todos os alunos que perceberam a necessidade de dividir a figura em partes de mesma área, uma característica do mundo formal no subconstruto *parte-todo*, acertaram a questão.

A aluna Priscila que, utilizando características do mundo corporificado, e observando as características do mundo formal, resolveu corretamente a questão na segunda coleta, explicou durante a entrevista o porquê da divisão usada.

> P. Por que $\frac{1}{4}$?
> Priscila. Porque tem uma pintada, e eu não sabia direito, eu contava a parte pintada e as partes que não estavam pintadas.
> P. Agora aqui na segunda você mudou. Conta para mim o que você fez.
> Priscila. Por que tinha dezesseis quadrinhos e só um pintado.
> P. E por que você resolveu dividir em mais partes?
> Priscila. Porque os quadradinhos tinham que ser do mesmo tamanho.
> P. Como que é?
> Priscila. Os quadrados tinham que ficar todos do tamanho desse, e aí ficaram dezesseis e um pintado.
>
> Trecho de entrevista com aluna Priscila

Vinte alunos na primeira coleta e sete na segunda apresentaram $\frac{1}{4}$ como resposta. Exemplo disso pode ser visto na Figura 8. Esses alunos indicaram a parte pintada no numerador e a parte não pintada no denominador do número racional na forma fracionária, aparentemente não levaram em conta que as partes não eram de mesma área e também não utilizaram o número total de partes no denominador, mas número de partes não pintadas.

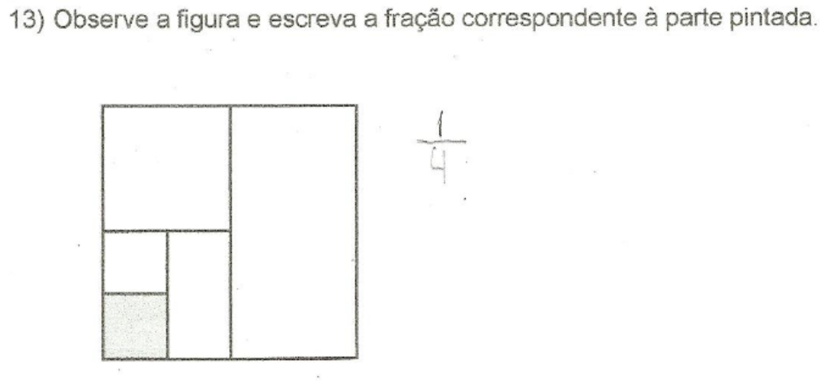

Figura 8 – Resposta do aluno Mateus para a Questão 13
Fonte: Arquivo pessoal

Oito alunos na primeira coleta e dezessete na segunda responderam $\frac{1}{5}$ à questão, como na **Figura 9**. Indicaram a parte destacada no numerador, e a quantidade de partes em que o quadrado foi dividido no denominador do número racional na forma fracionária, porém aparentemente não se considerarem que as partes não eram de mesma área.

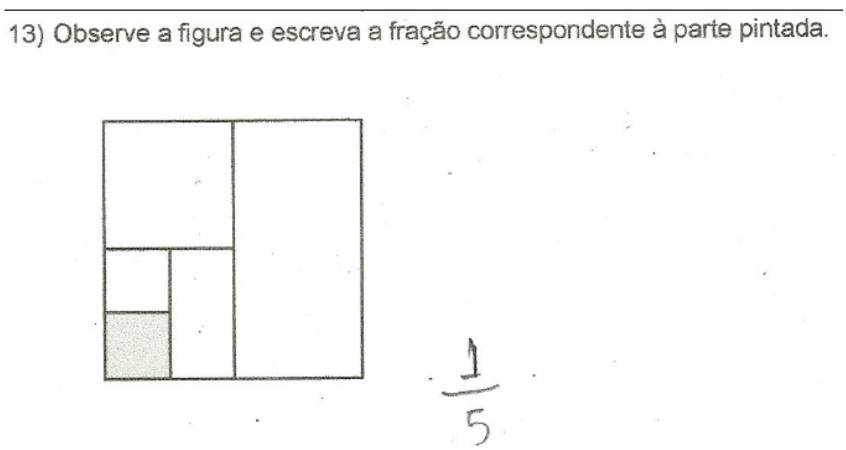

Figura 9 – Resposta do aluno Igor para a Questão 13
Fonte: Arquivo pessoal

Três alunos na primeira coleta responderam $\frac{4}{1}$ ou $\frac{5}{1}$, invertendo a posição de numerador e denominador ao fazer a contagem de partes não destacadas da figura ou partes em que a figura foi dividida, na montagem do número racional na forma fracionária com utilização da dupla contagem.

Houve também tentativas de dividir a figura, mas que não obtiveram êxito, como na **Figura 10**. Em sua resposta, Ricardo buscou dividir a figura, fazendo algumas partes dela de mesma área, obtendo sete divisões, e portanto a área destacada representou $\frac{1}{7}$ da figura.

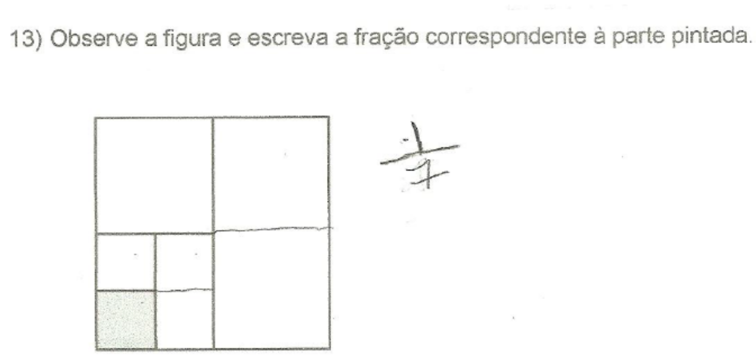

Figura 10 – Resposta do aluno Ricardo para a Questão 13
Fonte: Arquivo pessoal

Houve mudança significativa da primeira para a segunda coleta, se pensarmos na dupla contagem, pois a quantidade de alunos que efetuou a dupla contagem passou de oito na primeira coleta para 21 na segunda. Porém, somente quatro alunos na segunda coleta observaram que a figura estava dividida em partes de áreas diferentes, ou seja, esses alunos efetuaram uma redivisão da figura para que as partes ficassem com áreas iguais.

CONCLUSÃO

Neste artigo, tivemos como objetivo analisar as características formais presentes no trabalho de alunos de 6º ano do Ensino Fundamental com duas questões: uma envolvendo o subconstruto *parte-todo*, outra envolvendo o subconstruto *medida*, de forma a compreender como essas características influenciaram a resolução das questões.

Nossa coleta de dados teve duas etapas. Coletamos dados no início do ano letivo, antes de o aluno ter contato com os números racionais na forma fracionária, e também depois do estudo desses números. Usamos o mesmo questionário para ambas as etapas. Buscamos entender se os alunos utilizavam características do mundo formal ao fazer esse trabalho.

Observamos que houve uma melhora entre a primeira e a segunda coletas, mesmo que para poucos alunos. No que se refere à Questão 9, três alunos tiveram acerto para a localização de $\frac{1}{3}$ na reta numérica. Nas respostas a esta questão, evidenciamos, principalmente, características do mundo corporificado, ao fazerem relação entre a reta numérica e uma régua numerada. As dificuldades que esses alunos tiveram nesta questão nos parecem relacionadas à falta de entendimento de características do mundo formal presentes no subconstruto *medida*. Na pesquisa de Merline (2005), por exemplo, dificuldades de se trabalhar esse subconstruto também foram evidenciadas.

Já na Questão 13, quatro alunos apresentaram resposta correta na segunda coleta, também evidenciando uma melhora em relação à primeira aplicação do questionário. Todos os alunos que acertaram a questão redividiram a figura para obter divisões em partes de mesma área. Assim, evidenciamos que o acerto nesta questão foi exclusivamente a partir do uso de características formais.

Esta questão envolveu respostas com a utilização da dupla contagem. A partir dela, os alunos apresentaram o conceito que têm em relação ao número racional na forma fracionária no subconstruto *parte-todo*. Aparentemente, para eles, a dupla contagem é suficiente para se obter uma representação numérica da figura. Isso evidencia a necessidade de se discutir características formais no trabalho com esse subconstruto. Mesmo que ele seja o mais trabalhado dos subconstrutos (GARCIA SILVA, 2007), evidenciamos em nossa pesquisa que, em situações nas quais exige-se características formais nesse subconstruto, os alunos ainda apresentam dificuldades em resolvê-las.

Mesmo que o mundo formal não seja trabalhado nos anos finais do Ensino Fundamental em sua totalidade, características dele podem e devem ser discutidas com alunos nesse nível de escolaridade. Elas permitem que o aluno desenvolva seu entendimento do conceito, no nosso caso de números racionais na forma fracionária, com mais coerência e profundidade. Entendemos que o trabalho com características formais é a chave para o melhor desenvolvimento do ensino e da aprendizagem de números racionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEHR, M. J. et al. **Rational-Number Concepts**. New York: Academic Press, 1983.

CHARALAMBOUS, C.; PITTA-PANTAZI, D. Drawing on a Theoretical Model to Study Students Understandings of Fractions. **Educational Studies in Mathematics**, 64, n. 3, 2005. 293-316.

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de Matemática para o ensino dos números racionais no ensino**. Pontifíica Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP. São Paulo. 2007.

FREIRE, P. C. **Uma jornada por diferentes Mundos da Matemática investigando os números racionais na forma fracionária**. Universidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo. 2011.

GARCIA SILVA, A. F. **O desafio do desenvolvimento profissional docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, tendo como objetivo de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações**. PUC/SP. São Paulo. 2007.

GRAY, E.; TALL, D. O. Duality, Ambiguity and Flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. **The Journal for Research in Mathematics Education**, 26, n. 2, 1994. 115-141.

LIMA, R. N. D. **Equações Algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da matemática**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 358p. 2007.

MERLINI, V. L. **O Conceito de Fração em seus Diferentes Significados: Um Estudo Diagnóstico com Alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP. São Paulo. 2005.

NUNES, T. et al. **Children's Understanding of Fractions**. Anais do encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics. Oxford: [s.n.]. 2008.

ROMANATTO, M. C. **Número racional: relações necessárias à sua compreensão**. Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 1997.

TALL, D. **How Humans Learn to Think Mathematically:** Exploring the Three Worlds of Mathematics. 1a. ed. New York: Cambridge University Press, 2013. 457 p.

Submetido em 04 de outubro de 2018.
Aprovado em 25 de março de 2019.