

## UMA FORMA DE COMPREENDER O ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR

Henrique Rizek Elias  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
[henriquerizek@hotmail.com](mailto:henriquerizek@hotmail.com)

Alessandro Jacques Ribeiro  
Universidade Federal do ABC  
[alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br](mailto:alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br)

Angela Marta Pereira das Dores Savioli  
Universidade Estadual de Londrina  
[angelamarta@uel.br](mailto:angelamarta@uel.br)

### Resumo

Discutir os números racionais na perspectiva da formação inicial de professores de matemática é a temática que se desenvolve nesse artigo. Elaborado sob o enfoque de um ensaio teórico, os resultados aqui apresentados inserem-se em uma pesquisa mais ampla, realizada no formato de uma tese de doutorado, a qual investigou o ensino do corpo dos números racionais na formação inicial de professores de Matemática. Os referenciais teóricos que embasaram e possibilitaram a construção da proposta que é apresentada no artigo são (i) a diferenciação entre *Matemática Acadêmica* e *Matemática Escolar*, (ii) a abordagem dos *Perfis Conceituais*, e (iii) a noção de *Conhecimento do Conteúdo no Horizonte*. Dentre os resultados apresentados encontra-se a conceitualização proposta, na qual os números racionais na Matemática Escolar sejam tomados como ponto de partida e de chegada nos cursos de formação de professores, permitindo assim, que se explore situações de sala de aula que considerem diferentes contextos de significação, e que proporcione aos futuros professores uma compreensão longitudinal dos números racionais ao longo da Educação Básica. Ao mesmo tempo, intenciona-se com o modelo proposto, favorecer a ampliação da compreensão dos futuros professores para além da Matemática Escolar, promovendo assim a percepção das matemáticas como práticas sociais situadas em contextos diferentes, com objetivos e critérios de validação específicos.

**Palavras-chave:** Formação inicial de professores. Formação matemática do professor. Números racionais. Estrutura algébrica corpo.

### Abstract

Discussing rational numbers from the perspective of the prospective mathematics teacher education is the theme developed in this paper. The results presented here are part of a broader research carried out in the form of a doctoral thesis, which investigated the teaching of the field of rational numbers in the prospective mathematics teacher education. The theoretical framework that support and make possible the construction of the proposal presented in the paper are composed by (i) the differentiation between Academic Mathematics and School Mathematics, (ii) the Conceptual Profiles approach, and (iii) the notion of Content Knowledge in the Horizon. Among the results presented is the proposed conceptualization, in which rational numbers in School Mathematics are taken as starting and finishing points in teacher education

courses, allowing to explore situations in the classroom that consider different contexts of meaning, and to provide future teachers with a longitudinal understanding of rational numbers throughout Basic Education. At the same time, it intends with the proposed model, to promote the expansion of the understanding of future teachers beyond the School Mathematics, thus promoting the perception of mathematics as social practices located in different contexts, with specific objectives and validation criteria.

**Keywords:** Prospective teacher education. Mathematical teacher education. Rational numbers. Algebraic structure of field.

## NÚMEROS RACIONAIS NA PERSPECTIVA DO ENSINO E DA APRENDIZAGEM

Esta edição temática da Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática (ReviSeM) evidencia um aspecto que todos aqueles que se interessam pela Matemática e seus processos de ensino e aprendizagem reconhecem: a importância e os desafios de se ensinar os números racionais, ensino este que atravessa toda a Educação Básica e, em alguns casos, chega ao Ensino Superior. Nos anos iniciais do Ensino Fundamental algumas noções intuitivas de fração (como a de parte-todo e de medida) e de número decimal são tratadas, bem como a comparação e a ordenação dos racionais positivos. Nos anos finais do Ensino Fundamental são aprofundadas as operações de adição e subtração de frações, são discutidas a multiplicação e a divisão, outros significados das frações são trabalhados (parte-todo, quociente, medida, operador e razão), o conjunto dos números racionais é definido e são revisitadas as noções de comparação e ordenação de frações; a noção de equivalência de frações também permeia esses estudos. No Ensino Médio, cada vez mais os números racionais se aproximam de outras áreas, como a Física, a Química, principalmente nos estudos de grandezas e medidas. No Ensino Superior, para quem irá cursar Matemática, novos modos de encarar esses números também são apresentados: números racionais como classes de equivalência de pares ordenados de números inteiros e como elementos de um corpo (o corpo dos números racionais).

As diversas facetas dos números racionais despertam interesse de muitos pesquisadores (KIEREN, 1976, 1980; BERH et al., 1983; STEFFE, OLIVE, 2010). Um modelo teórico bastante difundido no Brasil é o de Kieren (1980), o qual discute os subconstructos dos números racionais, a saber: parte-todo, razão, quociente, medida, operador. Ao apresentar os subconstructos dos números racionais, Kieren (1976, 1980) possibilitou uma vasta discussão acerca dos diferentes significados atribuídos a esses

números. O grupo *The Rational Number Project*<sup>1</sup> (RNP) também contribuiu amplamente para as discussões, trazendo considerações que são, por diversas vezes, citadas em trabalhos que tratam dos números racionais: os conceitos associados aos números racionais estão entre as ideias mais complexas e importantes que os estudantes encontram ao longo dos primeiros anos de escolarização (BEHR et al., 1983).

Mais recentemente, os trabalhos de Steffe (por exemplo, Steffe e Olive (2010)) podem, juntamente com o modelo de Kieren, ser considerados como um dos modelos mais proeminentes (NORTON; WILKINS, 2010) a respeito do conhecimento das crianças sobre frações. Diferentemente dos trabalhos de Kieren (1976, 1980), que têm um foco predominantemente na discussão matemática, em que percebemos “o ‘matemático’ definindo o ‘cognitivo’ e este sugerindo o ‘didático’” (MOREIRA; FERREIRA, 2008, p. 118), Steffe e Olive (2010) levam em conta a interação social na elaboração de seu esquema sobre o conhecimento que as crianças têm sobre frações. O foco de interesse desses autores está no que chamam de *conhecimento matemático de segunda ordem*, isto é, nos modelos que observadores podem construir a partir da interação em sala de aula da criança observada. Com uma base piagetiana, Steffe e Olive (2010) têm como hipótese que os esquemas de frações das crianças emergem da acomodação de esquemas que elas já têm a respeito da contagem numérica.

Junto a essas pesquisas, temos também aquelas que se debruçam a discutir o conhecimento matemático necessário ao professor para ensinar os números racionais, com vistas a proporcionar um ensino mais significativo e menos baseado em regras e algoritmos. Zakaryan e Ribeiro (2016) e Pinto e Ribeiro (2013) são alguns exemplos dessas pesquisas que nos permitem conhecer mais profundamente aspectos desse conhecimento matemático que é específico para o ensino dos números racionais e, portanto, diferente do conhecimento matemático de outros profissionais que não o professor.

Diante desse cenário, entendemos ser necessário, também, debater sobre a presença e diferentes maneiras de se abordar os números racionais na formação inicial de professores, que se retrata aqui como foco do presente trabalho.

## A PESQUISA: CONTEXTO E MÉTODO

---

<sup>1</sup> Para maiores informações, acesse:

<http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/default.html>

Os resultados que apresentamos neste artigo compõem uma pesquisa mais ampla, realizado no doutorado do primeiro autor (ELIAS, 2017), a qual teve como objetivo principal investigar e propor fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais em cursos de Licenciatura em Matemática. Para tanto, foram traçados à época, quatro objetivos específicos que, conectados entre si, nos permitiram atingir o objetivo principal buscado na referida tese.

Um desses objetivos específicos, que se consolida aqui como foco do presente artigo, teve relevância singular para o desenvolvimento da tese. Trata-se de um exercício teórico de compreensão e interpretação dos referenciais teóricos assumidos por nós, articulando-os e construindo uma forma de conceitualizar a matemática na formação do professor. Não seria consistente propormos fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na formação inicial de professores sem, antes de tudo, termos clareza de que matemática almejamos para a formação do professor. Por essa razão, uma primeira conceitualização fora produzida logo no início da pesquisa de doutorado, fornecendo-nos uma base mais sólida para caminharmos na direção do objetivo principal supracitado. Ao final da pesquisa, refinamos a conceitualização inicial a partir das demais análises decorrentes das outras etapas da tese, finalizando aquela investigação o resultado que trazemos para discutir neste artigo, quer seja, apresentar uma forma de compreensão dos números racionais que seja mais direcionada e adequada para o ensino dessa temática na formação inicial de professores.

Dessa maneira, o objetivo deste artigo<sup>2</sup> é *apresentar uma forma de compreender a matemática na formação inicial de professores, direcionando essa forma de compreender para o ensino dos números racionais em cursos de Licenciatura em Matemática*. No que se refere à metodologia que utilizamos para construir esse artigo, por se tratar de um ensaio teórico (FIORENTINI; LORENZATO, 2006), não fizemos uso de dados empíricos para validar um ponto de vista, mas realizamos “a construção de uma rede de conceitos e argumentos desenvolvidos com rigor e coerência lógica” (p. 69).

Como já afirmamos anteriormente, essa rede de argumentos que aqui propomos foi inteiramente fundamentada em nossos referenciais teóricos, a saber: o Perfil

---

<sup>2</sup> Uma versão preliminar deste artigo foi apresentada e publicada nos anais do 5º Simpósio Internacional de Pesquisa Em Educação Matemática, realizado em Belém/PA no ano de 2018.

Conceitual (MORTIMER; SCOTT; EL-HANI, 2009; MORTIMER et al., 2014;), o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (JAKOBSEN et al., 2012; JAKOBSEN; THAMES; RIBEIRO, 2013) e a diferenciação entre Matemática Escolar e Matemática Acadêmica (MOREIRA; DAVID, 2010).

Sendo assim, organizamos esse artigo da seguinte maneira: na próxima seção, trazemos algumas pesquisas sobre os números racionais que nos indicam a necessidade de se discutir essa temática na formação inicial do professor. Em seguida, aprofundamos as discussões sobre referenciais teóricos que embasam nosso ensaio teórico. Após a discussão dos referenciais teóricos, apresentamos, na seção seguinte, a nossa conceitualização para a matemática na formação do professor que culmina em uma forma de compreensão para o ensino dos números racionais em cursos de Licenciatura em Matemática. Ao final do texto tecemos algumas considerações finais, sugerindo encaminhamentos para a formação inicial de professores.

## FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Começamos nos posicionando em uma perspectiva vygotskyana de que o indivíduo é construído socialmente. O desenvolvimento intelectual do indivíduo se dá na internalização de significados produzidos socialmente, a partir de suas relações com outros sujeitos através da linguagem. Nessa perspectiva sócio-interacionista, em que homem e ambiente se modificam, a construção do conhecimento, de acordo com Vygotsky, nunca é realizada apenas com recursos individuais, “ela sempre depende da mediação social, da apropriação de significados num sistema simbólico” (MORTIMER, 2006, p.170).

A abordagem dos Perfis Conceituais, de Mortimer e colaboradores, que está fortemente embasada nas ideias de Vygotsky, e pode ser brevemente apresentada como:

A abordagem dos perfis conceituais é fundamentada, precisamente, na ideia de que as pessoas apresentam diferentes formas de ver e conceitualizar o mundo e, portanto, diferentes modos de pensar são usados em diferentes contextos. [...] Perfis conceituais podem ser vistos como modelos da heterogeneidade dos modos de pensar acessíveis a pessoas com um background cultural para usar em uma variedade de contextos ou domínios (Mortimer 1995, 2000). Modos de pensar são formas estáveis de conceitualizar um determinado tipo de experiência, relacionados a significados socialmente construídos que podem ser atribuídos a um determinado conceito.  
(MORTIMER et. al., 2014, p. 14-15, tradução nossa)

Segundo esta abordagem, conceitos polissêmicos, como os de átomo e de massa, por exemplo, permitem a elaboração de perfis conceituais. Os perfis são compostos de

diferentes zonas que representam, cada uma delas, um modo particular de atribuir significado a um conceito. As diferentes zonas de um perfil conceitual podem conviver simultaneamente num mesmo indivíduo, e cada zona se mostra mais ou menos poderosa em diferentes contextos.

Pesquisas como as de Kieren (1976, 1980), Behr et al. (1983), apontam para o fato de que os números racionais são um exemplo, no contexto da matemática, de um conceito polissêmico e, portanto, passível de ser perfilado, isto é, de ser construído um perfil conceitual de número racional. Em Elias (2017) iniciamos o processo de construção do perfil conceitual de número racional, porém esse processo ainda se encontra em andamento. Para a proposta do presente trabalho, entendemos que seja suficiente assumirmos a polissemia do conceito de número racional e a possibilidade de construirmos diferentes zonas de significação deste conceito.

Um aspecto importante da abordagem dos perfis conceituais é o fato de se considerar a coexistência de diferentes modos de pensar e formas de falar sobre um determinado conceito em um mesmo indivíduo. A coexistência de diferentes modos de pensar e formas de falar é tomada, inclusive, como resultado da aprendizagem científica. Isso traz implicações relevantes para os processos de ensino e de aprendizagem segundo a perspectiva dos perfis conceituais.

De acordo com Mortimer, Scott e El-Hani (2009), é “objetivo crucial do ensino e da aprendizagem a promoção de uma visão clara, entre os estudantes, da demarcação entre os modos de pensar e significados, bem como entre seus contextos e aplicação” (p. 7). O ensino deve, então, promover aos estudantes uma tomada de consciência de que há conceitos com diferentes significados socialmente estabelecidos e que cada um desses significados é mais ou menos poderoso para resolver determinado problema. Do ponto de vista da aprendizagem, essa tomada de consciência de demarcação das zonas (significados) de um perfil conceitual de determinado conceito

implica ser capaz de aplicar uma ideia científica nos contextos em que ela é apropriada, inclusive na vida cotidiana, e, ao mesmo tempo, preservar modos de pensar e falar distintos do científico nas situações em que se mostrem pragmaticamente apropriados. (MORTIMER; SCOTT; EL-HANI, 2009, p. 8)

É exatamente nesse sentido que, para nós, os perfis conceituais se caracterizam como uma abordagem de ensino que pode contribuir para a formação de professores de Matemática, instrumentalizando os futuros professores para compreender a diversidade

de significados que podem compor os conhecimentos de seus alunos (RIBEIRO, 2013). Para além disso, tal abordagem contribui para uma conscientização de que aquela matemática acadêmica ensinada na Licenciatura é portadora de um significado (mas não o único) para conceitos que possivelmente serão trabalhados na Educação Básica (como é o caso dos números racionais).

Como já afirmamos na introdução deste trabalho, assumimos a diferenciação feita por Moreira e David (2010) entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar. A Matemática Acadêmica é tida como aquele sistema lógico-formal-dedutivo que os matemáticos profissionais produzem. A Matemática Escolar é entendida aqui, nem como uma matemática científica didatizada, nem como uma construção autônoma da escola, mas sim, como um conjunto de saberes associados ao exercício da profissão docente (MOREIRA; DAVID, 2010). A Matemática Escolar pensada dessa maneira valoriza os significados produzidos e mobilizados pelos professores naquele contexto da sala de aula da Educação Básica, considerando toda a heterogeneidade dos modos de pensar dos estudantes. Porém, essa Matemática Escolar não é advinda somente da prática, mas, também, produto de pesquisas sobre ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos.

O fato de uma abordagem de ensino fundamentada nos perfis conceituais objetivar uma tomada de consciência dos diferentes significados de um conceito e da demarcação das diferentes zonas (isto é, da percepção de situações em que um significado é mais poderoso que outro para resolver um problema) parece-nos esclarecer uma situação um tanto nebulosa quanto à forma que o ensino da Matemática Acadêmica muitas vezes é tratado na formação de professores, indicando-nos caminhos alternativos para se pensar isso de forma diferente.

Para falar do ensino da Matemática Acadêmica nos cursos de formação de professores, vamos tomar o caso da estrutura algébrica corpo. O ensino dessa estrutura algébrica é, quase sempre, atrelado a conjuntos numéricos. Porém, esse ensino não contempla muitos aspectos ligados ao tratamento escolar dos números, como apontam Moreira e David (2010). Há uma (super)valorização da Matemática Acadêmica que, ao nosso ver, não favorece aos futuros professores a compreensão de que o significado de números racionais como elemento de um corpo (o corpo dos números racionais) é apenas um dos significados possíveis para este conceito. Pelo contrário, essa (super)valorização da Matemática Acadêmica pode levar os licenciandos a tomarem a

ideia de corpo dos números racionais como a “versão” mais avançada e resumida de números racionais, isto é, promover nos futuros professores uma visão de que esse significado de números racionais é uma evolução daqueles significados construídos na Educação Básica. Estamos chamando a atenção para o fato de que esse ensino, pautado na Matemática Acadêmica e que valoriza aspectos formais de conceitos matemáticos, pode levar os licenciandos a acreditarem na necessidade de romper com suas concepções prévias para aprender aquela “versão” científica.

Moreira e David (2010) explicitam essa ideia de como a Matemática Acadêmica funde diferentes significados em um único e como a Matemática Escolar exige o contrário. Para os autores, enquanto a Matemática Acadêmica

[...] funde numa única expressão – a que sintetiza a essência abstrata do conceito, ou seja, aquilo que lhe dá identidade como objeto matemático científico – as várias formas de se pensar concretamente a ideia de número racional, a Matemática Escolar faz quase o caminho inverso. [...] para o ensino escolar é fundamental “decompor” a ideia de razão entre inteiros nas suas diversas formas de manifestação e explicitar suas diferentes possibilidades de interpretação, uma vez que o processo de construção escolar da noção de número racional se desenvolve a partir da integração progressiva dos vários subconstrutos. (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 67)

Neste trabalho, buscamos seguir justamente no sentido oposto dessa intenção de fundir os diferentes significados já aprendidos pelos futuros professores - enquanto estudantes da Educação Básica - em um único significado formal. Pelo contrário, ao assumirmos a posição de Mortimer (2006), de que o processo de ensino não deve propor uma substituição de ideias prévias de estudantes por ideias científicas, consideramos que a construção de uma nova ideia possa, em algumas situações, “ocorrer independentemente das ideias prévias e não necessariamente como uma acomodação de estruturas conceituais já existentes” (MORTIMER, 2006, p. 68). Nesse mesmo sentido, Moreira e David (2010) afirmam que a introdução de um novo significado “aprofunda o processo de construção do conceito de número racional e, também, pode desencadear um processo paralelo de reelaboração e ampliação das ideias já estabelecidas no trabalho com outros subconstrutos” (p. 68).

Assumimos então, que as disciplinas de conteúdos específicos matemáticos em um curso de formação inicial de professores devem valorizar não apenas os significados da Matemática Acadêmica, mas também, e principalmente, os significados produzidos e validados no âmbito da Matemática Escolar, buscando sempre a tomada de consciência



da demarcação entre esses significados. Por tal razão, nossa proposta vem sendo a de assumir os números racionais como o foco e não como um motivo para se ensinar a estrutura algébrica corpo. Acreditamos, conforme afirma Kluth (2007), que

[...] não dá mais para colocar-se numa situação de construção do conhecimento tão vazia e sem chão, como o é quando as estruturas são tomadas como hipóteses, perdendo suas relações ôntico/ontológicas. Isto é levado a tal ponto no ensino, que a única pergunta que resta ao aprendiz é: para que a Álgebra Abstrata? Onde eu uso isto? E nós, professores de Matemática, sempre prontos a tornar nossa disciplina mais aceitável, recorreremos à resposta direta: a aplicabilidade das estruturas. (KLUTH, 2007, p.110)

Tomar os números racionais como foco significa assumi-los como o conceito matemático a ser trabalhado em cursos de formação de professores. Nesse caso, a estrutura algébrica surge como uma zona de significação de seu perfil conceitual, enquanto o corpo dos números racionais. Dessa maneira, busca-se ampliar (e não substituir) as ideias que os estudantes (seja em que nível de ensino for) já possuam a respeito dos números racionais, procurando articular esse conhecimento da Álgebra Abstrata com a prática docente na escola, visando contribuir para um desenvolvimento do Conhecimento Matemático para o Ensino<sup>3</sup> (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) dos números racionais.

Dentre os domínios que compõem o MKT, focamos no Conhecimento do Conteúdo no Horizonte<sup>4</sup>, pois entendemos que este seja o conhecimento que melhor caracteriza o papel do ensino das estruturas algébricas em cursos de formação de professores. A perspectiva de HCK que assumimos é aquela apresentada por Jakobsen et. al. (2012) e Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013), quando consideram o HCK como uma *orientação para* e uma *familiaridade com* a Matemática que contribui para o ensino dessa disciplina no âmbito escolar, proporcionando aos professores uma compreensão de como o conteúdo que está sendo ensinado em um determinado momento está *situado em* e *conectado a* um território disciplinar mais amplo. Com relação à expressão *familiaridade com*, Jakobsen et. al. (2012) afirmam que ter familiaridade com algum conteúdo matemático avançado parece ser uma forma adequada para caracterizar como o conhecimento é compreendido e mantido na mente

<sup>3</sup> No original, *Mathematical Knowledge for Teaching*. Por este motivo, utilizaremos a sigla MKT quando nos referirmos ao Conhecimento Matemático para o Ensino.

<sup>4</sup> No original, *Horizon Content Knowledge*. Por este motivo, utilizaremos a sigla HCK quando nos referirmos ao Conhecimento do Conteúdo no Horizonte.

do estudante. Com o termo *orientação para*, alertam para a possibilidade de se pensar que a formação matemática avançada proporcionaria ao professor uma orientação valiosa para pensar sobre o conteúdo a ser ensinado e aprendido nas escolas, mas eles querem afirmar o inverso disso. Para Jakobsen et. al. (2012), a orientação é para envolver o próprio conteúdo avançado em termos de sua relevância para o ensino e a aprendizagem. Quer dizer, a matemática avançada para docentes, segundo os autores, tem de ser demonstrativamente relacionada com o trabalho de ensino na escola.

Sobre a frase “*situado em e conectado a um território disciplinar mais amplo*”, os autores querem destacar as conexões entre a matemática da escola e a matemática acadêmica e não sobre como o conteúdo a ser ensinado está situado dentro do currículo escolar. Nesse ponto, os autores explicitam a diferença entre o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte e o Conhecimento do Conteúdo e do Currículo, uma vez que este último sim, trata muito mais sobre uma compreensão da matemática escolar e abordagens específicas para a organização do currículo escolar (JAKOBSEN; THAMES; RIBEIRO, 2013). Para os autores, a forma como Ball e colaboradores descreveram o HCK como sendo “uma consciência de como temas matemáticos estão relacionados sobre a extensão de matemática incluída no currículo” causa confusão e uma má interpretação para o HCK. Para Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013), o HCK não se trata do conteúdo a ser ensinado e nem do desenvolvimento curricular desse conteúdo, mas sim de um conhecimento de como o conteúdo que está sendo ensinado está situado em e ligado ao território disciplinar mais amplo.

Para finalizar a discussão sobre esse domínio do MKT, conforme indicam Jakobsen et. al. (2012), o HCK inclui o conhecimento das principais estruturas da disciplina, permitindo aos professores "ouvir" seus alunos e fazer julgamentos a respeito da importância de ideias ou perguntas específicas, tratando a disciplina com integridade e, com isso, conectando os alunos a um vasto e altamente desenvolvido campo do conhecimento.

Na seção a seguir, apresentamos o resultado de nossa compreensão e interpretação desses referenciais teóricos, construindo nossa forma de compreender a matemática na formação do professor, em particular, para o ensino dos números racionais em cursos de Licenciatura em Matemática.

## **RESULTADOS E DISCUSSÃO: UMA FORMA DE COMPREENDER A MATEMÁTICA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES**

Entendemos que os três referenciais teóricos apresentados na seção anterior permitiram-nos olhar para a questão da formação matemática do professor de uma maneira ampla e distinta do que usualmente tem sido feito. Moreira e David (2010), ao realizarem a diferenciação entre Matemática Acadêmica e Matemática Escolar, afirmam que deve haver um “redimensionamento da formação matemática na Licenciatura, de modo a equacionar melhor os papéis da Matemática Científica e da Matemática Escolar nesse processo” (p. 103). Nesse “equacionar melhor”, entendemos que as formas de conhecimento matemático abordados em sua caracterização para Matemática Escolar devem prevalecer (em relação à Matemática Acadêmica) ao longo da Licenciatura e que o papel da Matemática Acadêmica no curso precisa ser revisto. Nesse sentido, acreditamos que o HCK é o domínio do MKT que nos permite redefinir esse papel, uma vez que um estudo aprofundado sobre o HCK nos possibilita ter clareza de um horizonte matemático plausível e que contribua para o conhecimento do professor. Em outras palavras, aqueles valores e perspectivas da Matemática Acadêmica que, explicitamente, favorecem o desenvolvimento do HCK para o ensino, comporiam as disciplinas de conteúdo matemático na Licenciatura, incorporando-se, quem sabe, à Matemática Escolar.

Mas, como estabelecer que conteúdos ou valores da Matemática Acadêmica podem compor as disciplinas de um curso de Licenciatura em Matemática? A nossa resposta a essa pergunta parece estar fundamentada no pressuposto de que a abordagem dos perfis conceituais possa ser uma alternativa que possibilita essa compreensão. Ao perfilar determinado conceito, explicitando seus diferentes significados, podemos avaliar e propor discussões sobre quais contextos em que esses significados característicos da Matemática Acadêmica podem ser mais ou menos poderosos, avaliando em que medida esses significados podem ser incluídos no conjunto de saberes “associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica em Matemática” (MOREIRA; DAVID, 2010, p. 20), isto é, incluídos na Matemática Escolar.

Assim, a partir desses referenciais e utilizando seus conceitos, apresentamos um resultado de cunho conceitual que foi desenvolvido em Elias (2017), quer seja, uma forma de compreender a matemática que almejamos à formação do professor como sendo: *uma matemática a partir da e cujo objetivo seja a Matemática Escolar; que permita ao professor conhecer, identificar e trabalhar diferentes modos de pensar os*

*conceitos matemáticos em contextos variados da Educação Básica; que possibilite ao professor, ao mesmo tempo, perceber o potencial desses conceitos ao longo do currículo escolar e possíveis relações com a Matemática Acadêmica* (Elias, 2017, p 57).

Essa forma de compreender a matemática a ser considerada e ensina na Licenciatura leva-nos às seguintes considerações: 1) a matemática a ser trabalhada na Licenciatura deve ter como ponto de partida e de chegada a Matemática Escolar. Enquanto ponto de partida, a Matemática Escolar se coloca como aquilo a ser tratado, o objeto de estudo. Enquanto ponto de chegada, a Matemática Escolar deve estar impregnada de novas reflexões do licenciando como futuro professor e não mais como ex-estudante da Educação Básica; 2) a formação matemática do professor, nesse sentido, tem o papel de alterar qualitativamente o conhecimento do futuro professor sobre a Matemática Escolar. Portanto, que não se trata de uma alteração quantitativa, de “saber mais matemática” sem conexão com aquela a ser tratada na Educação Básica, pelo contrário, trata-se de que aqueles saberes associados ao exercício da profissão docente passem por processos de questionamentos, reflexões e aprofundamentos; 3) a Matemática Acadêmica faria parte desses processos, na medida em que se coloca em discussão as tensões entre ela e a Matemática Escolar, questionando até que ponto seus valores e seus métodos contribuem para o desenvolvimento do MKT, ampliando, assim, a visão de matemática enquanto campo de conhecimento do futuro professor (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013). Com “ampliar a visão de matemática”, estamos propondo permitir ao futuro professor ter uma compreensão da matemática enquanto prática social, tendo consciência da Matemática Escolar “como produto da prática da educação escolar em matemática” (MOREIRA; DAVID, 2003, p. 77) e da Matemática Acadêmica como prática do matemático, sem, com isso, estabelecer uma hierarquia entre elas.

A conceitualização descrita acima nos permitiu caminhar com a pesquisa de doutorado supracitada (ELIAS, 2017) de modo a investigar aspectos mais específicos dos números racionais. Para tanto, percebemos a necessidade de investigarmos os números racionais em dois contextos distintos: na Educação Básica, em particular nos anos finais do Ensino Fundamental, e no Ensino Superior, em particular em cursos de Licenciatura em Matemática.

Para os números racionais no contexto da Educação Básica, utilizamos as seguintes fontes de dados para aprofundar nossas compreensões: uma coleção de livros

didáticos para os anos finais do Ensino Fundamental (CHAVANTE, 2015a, 2015b, 2015c); entrevistas com quatro professores da Educação Básica; pesquisas acadêmicas que envolvessem os números racionais no contexto escolar (por exemplo, ONUCHIC; ALLEVATO, 2008; BEHR et a., 1983; KIEREN, 1976); e uma análise da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que, na época de nosso estudo, estava em sua segunda versão.

Para os números racionais no contexto do Ensino Superior, as seguintes fontes de dados nos foram importantes para compreender melhor tal contexto: livros didáticos para o Ensino Superior (por exemplo, DOMINGUES, 2009; NIVEN, 1984; CARVALHO; LOPES; SOUZA, 1984); entrevistas com três professores formadores que atuam ou atuaram com disciplinas que tratam das estruturas algébricas na formação inicial de professores; pesquisas acadêmicas que envolvessem os números racionais no contexto do Ensino Superior (WASSERMAN, 2014, 2016; DAMICO, 2007); e documentos curriculares voltados aos cursos de Licenciatura em Matemática, como as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, e Projetos Pedagógicos de 15 cursos do Brasil.

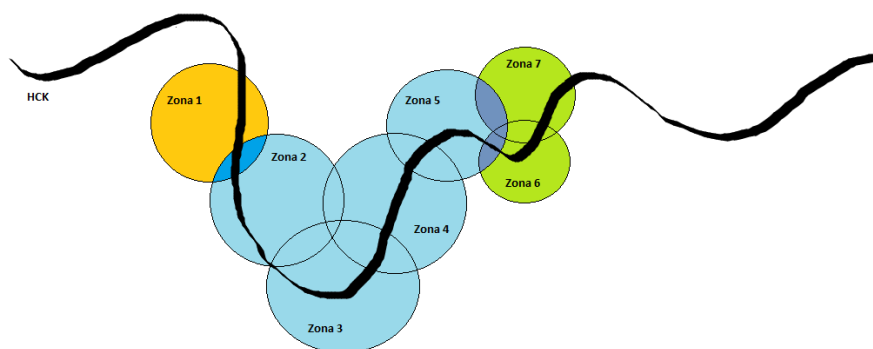
Da investigação que fizemos a partir da análise das diferentes fontes de dados apresentadas, ficou ainda mais evidente que, dentre os diferentes modos de pensar os números racionais, há aqueles que aparecem no contexto escolar e outros que não. Por isso, temos utilizado a expressão *números racionais na Matemática Acadêmica* para indicar os significados atribuídos aos números racionais em disciplinas de conteúdo matemático do Ensino Superior e em livros destinados a esse nível de ensino, além de ser o modo como os matemáticos profissionais usualmente compreendem esses números. Por exemplo, os números racionais como classe de equivalência de pares ordenados de números inteiros, os números racionais como elementos de um corpo ordenado ou como o corpo das frações do domínio de integridade  $\mathbb{Z}$ . De maneira análoga, entendemos *números racionais na Matemática Escolar* como os significados dos números racionais atribuídos no contexto da Educação Básica, seja do ponto de vista do conhecimento do professor, de pesquisas sobre ensino e aprendizagem ou de livros didáticos. Por exemplo, os números racionais entendidos como uma divisão de números inteiros ou uma razão entre duas quantidades. Não estamos usando números racionais “da” Matemática Escolar ou “da” Matemática Acadêmica, pois entendemos

que o conceito de número racional não pertence a um ou a outro contexto, mas tem diferentes significados atribuídos em cada um deles.

Afirmamos que uma maneira possível de se abordar os números racionais, em particular o corpo dos números racionais, em cursos de formação de professores com vistas a favorecer o desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino dos números racionais envolve: *tomar os números racionais na Matemática Escolar como ponto de partida, explorando situações de sala de aula em diferentes contextos (desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio), permitindo que os licenciandos desenvolvam uma compreensão longitudinal desse conceito ao longo da Educação Básica e, também, buscando ampliar essa compreensão para além da Matemática Escolar, propondo o trabalho com zonas do perfil conceitual de número racional que são mais características da Matemática Acadêmica* (ELIAS, 2017, p. 294).

Ao propor o trabalho com os números racionais na Matemática Acadêmica, estes devem ser problematizados em termos de sua relação (ou falta dela) com os números racionais na Matemática Escolar, promovendo (i) a tomada de consciência da demarcação das zonas do perfil conceitual de número racional e (ii) a percepção das matemáticas (Escolar, Acadêmica, Cotidiano) como práticas sociais situadas em contextos diferentes, com objetivos e critérios de validação específicos.

A articulação entre os três referenciais teóricos que embasam nossa pesquisa pode ser sintetizada na Figura 1. As cores dos distintos círculos (laranja, azul e verde) indicam zonas do perfil conceitual de determinado conceito (que pode ser número racional) que são características de um determinado contexto. Por exemplo, a laranja poderia representar os números racionais na Matemática do Cotidiano, as zonas azuis representariam os números racionais na Matemática Escolar e, as verdes, os números racionais na Matemática Acadêmica. A linha preta indica o HCK, um conhecimento que permite ao professor “um sentido de como o conteúdo que está sendo ensinado está situado em e conectado a um território disciplinar mais amplo” (JAKOBSEN et al., 2012, p. 4642, tradução nossa). O HCK, no caso da Figura 1, é entendido como um fio que conecta o conhecimento sobre as diferentes zonas do conceito e, ao mesmo tempo, que conecta o conhecimento do conceito ao conhecimento de outros conceitos (observe, na figura, que o fio não se limita às zonas, mas se estende para se ligar a outros conceitos).



**Figura 1** – Articulações entre HCK, zonas de um perfil conceitual e as diferentes matemáticas como um modelo para a formação do professor

**Fonte:** Elias (2017, p. 295)

## CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente artigo apresentamos uma forma de se conceitualizar e de se compreender a formação matemática do professor. Diversas pesquisas (VIOLA DOS SANTOS; LINS, 2016; MOREIRA; DAVID, 2010; ELIAS, 2018) têm apontado para a necessidade de um redimensionamento da formação matemática na licenciatura, equacionando melhor os papéis da Matemática Acadêmica e da Matemática Escolar nesse processo formativo. Esse redimensionamento sugerido para a formação matemática pode ser compreendido quando se levantam algumas questões, tais como: o que é mais urgente, do ponto de vista de seus conhecimentos profissionais, para que o professor possa desempenhar seu papel de ensinar matemática na Educação Básica? Ou ainda, “de que matemática estamos falando, quando dizemos que o professor precisa saber bem a matemática para ensiná-la?” (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 919). Como afirmam Viola dos Santos e Lins (2016), não se trata de pensar que o professor precisa de uma formação matemática menos sofisticada e menos “pesada” do que a formação do bacharel em matemática, mas sim, uma formação que ofereça modos de lidar com as demandas matemáticas de sua prática profissional.

Para nós, o mais urgente para o professor, em termos de formação matemática, são os conhecimentos sobre os conteúdos matemáticos da escola e esses devem ser centrais na formação matemática do futuro professor. Por isso, a direção que sugerimos em nossa forma de compreensão para a matemática na formação do professor é que as disciplinas de conteúdo matemático sejam, essencialmente, de discussões sobre e para a Matemática Escolar, e que a Matemática Acadêmica entre em cena no sentido de

problematizar a Matemática Escolar e de se discutir com os licenciandos modos de se fazer matemática, evidenciando a matemática como uma atividade humana.

No caso específico do corpo dos números racionais, reiteramos nossa sugestão de inverter os papéis que até então parecem estar consolidados, tomando-se assim, os números racionais como o foco de ensino, e não como um exemplo da estrutura algébrica corpo. Dessa forma, entendemos que o corpo dos números racionais possa integrar o que entendemos por Matemática Escolar, a partir do momento em que favoreça o desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino dos números racionais. Em Elias, Savioli e Ribeiro (2017), apresentamos uma sequência de tarefas para serem desenvolvidas com professores em formação inicial, as quais ilustram nossa sugestão de como abordar os números racionais nos cursos de Licenciatura, incluindo aí a discussão sobre o corpo dos números racionais. Contudo, tal sequência de tarefas ainda encontra-se no campo propositivo, necessitando-se assim, que estas sejam levadas para salas de aula de cursos de Licenciatura em Matemática e discutida com futuros professores de matemática, de modo que possamos avaliar seu potencial, suas limitações e/ou necessidades de reformulações.

## REFERÊNCIAS

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, n. 59, p. 389-407, 2008.

BEHR, M. J. et al. Rational number concepts. In: LESH, R.; LANDAU (Eds.). **Acquisition of mathematics concepts and process**. New York: Academic Press, 1983. p.91-126.

CARVALHO, M. S; LOPES, M. L. M. L.; SOUZA, J. C. M. **Fundamentação da Matemática Elementar**. Rio de Janeiro: Câmpus, 1984.

CHAVANTE, E. R. **Convergências**: Matemática, 6º ano: anos finais: Ensino Fundamental. (Manual do Professor). 1. Ed. São Paulo: Edições SM, 2015a. (Coleção Convergências).

CHAVANTE, E. R. **Convergências**: Matemática, 7º ano: anos finais: Ensino Fundamental. (Manual do Professor). 1. Ed. São Paulo: Edições SM, 2015b. (Coleção Convergências).

CHAVANTE, E. R. **Convergências**: Matemática, 8º ano: anos finais: Ensino Fundamental. (Manual do Professor). 1. Ed. São Paulo: Edições SM, 2015c. (Coleção Convergências).



DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental.** 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética.** Florianópolis: Editora da UFSC, 2009.

ELIAS, H. R. **Fundamentos teórico-metodológicos para o ensino do corpo dos números racionais na formação de professores de matemática.** 2017. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina/PR, 2017.

ELIAS, H. R. Os números racionais na Matemática Acadêmica: uma discussão visando à formação matemática de professores. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 61, p. 439-458, ago. 2018

ELIAS, H. R.; SAVIOLI, A. M. P. das D.; RIBEIRO, A. J. Números racionais e estrutura algébrica corpo: problematizando o currículo da formação inicial de professores de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.19, n. 3, p.182-208, 2017.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e práticas formativas? **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 917- 938, 2013.

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: Percursos Teóricos e Metodológicos.** Campinas, SP: Autores Associados, 2006. – (Coleção Formação de Professores).

JAKOBSEN, A. et al. **Using Practice to Define and Distinguish Horizon Content Knowledge.** In: ICME (Ed.), 12th International Congress In Mathematics Education. Seoul (Coreia): ICME, 2012, p. 4635-4644.

JAKOBSEN, A.; THAMES, M. H.; RIBEIRO, C. M. **Delineating issues related to Horizon Content Knowledge for mathematics teaching.** In: Eight Congress Of The European Society For Research In Mathematics Education. Antalia, Turquia: ERME, 2013.

KIEREN, T. E. **On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers.** In: LESH, R. (Ed.) Number and measurement: papers from a research workshop. Columbus, Ohio: Eric/Smeac, 1976, p.101-144.

KIEREN, T. E. **The rational number construct – its elements and mechanisms.** In: KIEREN, T. (Ed.) Recent Research on Number Learning. Columbus: Eric/Smeac, 1980, p.125-150.

KLUTH, V. S. O Movimento da Construção das Estruturas da Álgebra: uma visada fenomenológica. **Bolema**, Rio Claro (SP), Ano 20, n. 28, p. 95-113, 2007.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. *Zetetiké*, Campinas (SP), v.11, n. 19, 2003.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor:** Licenciatura e prática docente. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Tendências em Educação Matemática, 11).

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, M. C. C. A Teoria dos Subconstrutos e o Número Racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 21, nº 31, p. 103-127, 2008.

MORTIMER, E. F.; SCOTT, P.; EL-HANI, C. N. **Bases teóricas e epistemológicas da abordagem dos perfis conceituais.** In: Encontro Nacional de Pesquisa em Ensino de Ciências, VII, 2009. Anais... Florianópolis: ABRAPEC, 2009.

MORTIMER, E. F. et al. **Conceptual Profiles:** Theoretical- Methodological Bases of a Research Program. In: MORTIMER, E. F.; EL-HANI, C. N. (Eds) *Conceptual Profile: a theory of teaching and learning scientific concepts.* New York: Springer, 2014.

NIVEN, I. **Números:** racionais e irracionais. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro. 1984.

NORTON, A.; WILKINS, J. L.M. Students' partitive reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 29, p. 181–194, 2010.

RIBEIRO, A. J. Elaborando um perfil conceitual de equação: desdobramentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática. *Ciência e Educação*, Bauru, v. 19, n.1, p. 55-71, 2013.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S.G. As Diferentes “Personalidades” do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. *Bolema*, Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, p. 79-102, 2008.

PINTO, H.; RIBEIRO, M. Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido de número racional. *Da investigação às práticas*, v.33, n. 1, p. 77 -96, 2013.

STEFFE, L. P.; OLIVE, J. **Children's fractional knowledge.** New York: Springer, 2010.

VIOLA DOS SANTOS, J. R.; LINS, R. C. Uma Discussão a Respeito da(s) Matemática(s) na Formação Inicial de Professores de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 351-372, 2016.

ZAKARYAN, D.; RIBEIRO, M. Conocimiento de la enseñanza de números racionales: una ejemplificación de relaciones. *Zetetiké*, Campinas, SP, v. 24, n. 3, p. 301-321, 2016.

WASSERMAN, N. H. Introducing Algebraic Structures through Solving Equations: Vertical Content Knowledge for K-12 Mathematics Teachers, **PRIMUS: Problems**,

**Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies**, Filadélfia, v. 24, n. 3, p. 191-214, 2014.

WASSERMAN, N. H. Abstract Algebra for Algebra Teaching: Influencing School Mathematics Instruction. **Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education**, Ontário, v. 16, n. 1, p. 28-47, 2016.

**Submetido em 20 de setembro de 2018.**  
**Aprovado em 19 de fevereiro de 2019.**