Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v4i1.9841

COMPREENSÃO DAS OPERAÇÕES ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS COM O USO DO FRAC SOMA POR UM GRUPO DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

Patrícia Pujol Goulart Carpes
Universidade Federal do Pampa
patigou23.carpes@gmail.com

Eleni Bisognin
Universidade Franciscana
eleni@ufn.edu.br

Resumo

Nesse trabalho são relatados resultados parciais de uma pesquisa realizada com alunos de um curso de licenciatura em Matemática, com o propósito de analisar a compreensão que esses alunos possuem sobre as diferentes representações de frações, frações equivalentes e as operações de adição e subtração. Foi organizada uma oficina em que foram propostas atividades e foram selecionados os significados parte/todo e quociente para serem explorados nas atividades elaboradas utilizando-se o material Frac Soma 235. Os dados foram obtidos por meio dos registros feitos pela professora e pelas resoluções das atividades feitas pelos alunos. Pode-se inferir, da análise dos resultados, que os alunos não dominam o conteúdo matemático que é condição necessária para ser um professor de Matemática.
Palavras-chave: Fração; Formação inicial de professores; Operações com números racionais.

Abstract

In this work, partial results of a research carried out with students of a degree course in Mathematics, with the purpose of analyzing the understanding that these students have on the different representations of fractions, equivalent fractions and operations of addition and subtraction are reported. A workshop was organized in which activities were proposed and the part / whole and quotient meanings were selected to be explored in the activities elaborated using the Frac Soma material. The data were obtained through the records made by the teacher and the resolutions of the activities done by the students. It can be inferred from the analysis of results that students do not master the mathematical content that is a necessary condition for being a mathematics teacher.
Keywords: Fraction; Initial teacher training; Operations with rational numbers.

INTRODUÇÃO

As dificuldades dos alunos com os números racionais são notáveis e cada vez mais recorrentes. Concepções errôneas advindas da passagem do campo dos números inteiros para os racionais são frequentes, tais como se 2 < 3, então $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$, ou 2,3 < 2,199 no sentido que 2,3 tem duas casas decimais e 2,199 tem quatro casas decimais e demonstram que os alunos tendem a aplicar as propriedades de um conjunto no outro, embora não sejam válidas.

Em se tratando da dificuldade de compreensão por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, Silva (1997), destaca obstáculos epistemológicos para compreensão das frações, sendo um deles reconhecer uma fração como um número. Isto é, identificar que a barra (sinal de divisão) não separa dois números.

Estudos na área da Educação Matemática, como de Behr et al, 1983; Kieren, 1980; Lamon, 2006; Romanatto, 1997; Silva, 2015 têm apontado para a forma de compreensão do número racional que perpassa por seus significados e diferentes representações. Ripoll, Ripoll, Silveira (2011), definem um número racional como sendo um número da forma " $r = \frac{a}{b}$ onde $a, b \in Z$ e $b \neq 0$ tal que r é a classe de todas as frações equivalentes a $\frac{a}{b}$". Compreende-se, desta forma, que os números racionais não são apenas as frações ou decimais. Como também, a interpretação de uma situação pode ser mais compreensível a um indivíduo numa representação do que em outra.

Indo além das dificuldades de compreensão de um número racional, específico na forma de fração, no tocante às operações nesse conjunto, muitas vezes os alunos colocam as seguintes questões: por que para somar devo tornar os números de baixo (denominadores) das frações iguais? No "m.m.c", primeiro divido embaixo e multiplico em cima? Ou ao contrário? São situações que demonstram a não compreensão dessas operações, assim como, o mecanicismo empregado (uso do algoritmo apenas).

Diante desse contexto, são analisados nesse trabalho, resultados da aplicação de uma oficina em que foram desenvolvidas atividades com o propósito de potencializar a compreensão das operações adição e subtração de números racionais positivos utilizando o material Frac Soma 235 com um grupo de alunos de um curso de Licenciatura em Matemática que estão em formação inicial.

REFERENCIAL TEÓRICO

Os números racionais estão presentes em situações variadas e, neste sentido, Kieren (1975) aponta que os mesmos são constituídos de diferentes construtos e que sua compreensão mais ampla depende do entendimento destes diferentes significados. Além disso, Kieren (1980), indicou cinco ideias básicas para a compreensão dos números racionais, sendo elas, parte/todo, quociente, medida, operador e razão.

Neste trabalho, foram selecionados os significados parte/todo e quociente para serem explorados nas atividades elaboradas por meio do material Frac Soma 235. Ressalta-se que esses dois significados também são os indicados pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017, p.300) para o 6º ano do Ensino Fundamental ao propor o seguinte objetivo: "compreender, comparar, ordenar frações associadas às ideias de parte de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes".

De modo geral o primeiro significado explorado em sala de aula, é o **parte/todo**, apresentado sob a forma $\frac{1}{n}$ em que esta fração representa uma parte da unidade que foi dividida em n partes iguais (LAMON, 2006). Desta forma, a fração indica a comparação entre o numerador (número de partes que se toma da unidade dividida) e o denominador (número total de partes em que a unidade foi dividida).

O significado parte/todo é fundamental para o desenvolvimento de outros significados, no qual os alunos devem conceber a noção de partição (em partes/fatias iguais) e, também a ideia entre partes/fatia e todo: as fatias juntas devem reconstituir o todo; quanto mais fatias tem o todo, menor é cada fatia; independente da forma, tamanho ou orientação das fatias, a relação entre as fatias e o todo é conservada.

Silva (2015), coloca que uma das técnicas mais empregadas para a compreensão do significado parte/todo é da dupla contagem das partes – identificar e quantificar, que possui limitações, pois o aluno pode confundir parte-parte e parte-todo, perceber apenas uma rotina de nomear parte e o todo, por exemplo.

Não se limitando ao significado de parte/todo, o aluno deve perceber o significado de quociente do número racional. Esse significado remete a ideia de partilha, e que a fração $\frac{a}{b}$ indica o quociente $a{:}\, b, b \neq 0$. Neste sentido, o entendimento de dividendo e divisor da operação de divisão deve estar claro, pois dividir em partes iguais é a base para que se compreendam os racionais como quocientes (LAMON, 2006). Desta forma, *a* pode ser maior, igual ou menor que *b*. A critério de exemplificação do significado quociente, podemos ter 3 bolos para 4 crianças ou 4 bolos para 3 crianças. Pelo exemplo dado, nota-se que o significado quociente extrapola o parte/todo, uma vez que existem duas variáveis, bolos e crianças (SILVA, 2015).

Silva (1997) e Magina e Campos (2008), indicaram em seus estudos que os professores costumam empregar situações de parte/todo como o principal contexto para o ensino de frações. Nunes e Bryant (1997) apontam que esta técnica de contagem dupla leva os alunos a desenvolverem um raciocínio sobre frações baseado na percepção, em detrimento das relações lógico-matemáticas envolvidas.

Além disso, Silva e Almouloud (2008) observaram em seu estudo, que mesmo que o significado parte/todo seja o mais empregado nos livros didáticos ou nas práticas dos professores, os mesmos não utilizam para justificar as regras operatórias dos números fracionários.

Neste contexto, emprega-se os significados parte/todo e quociente nas operações com números racionais positivos e o uso do material Frac Soma 235 para dinamizar a visualização das frações como área dos retângulos conforme ilustrado na seção dos resultados.

METODOLOGIA

A presente pesquisa tem uma abordagem qualitativa, pois considera-se a análise que melhor se aproxima da realidade que se foi proposto a investigar. Desta forma, oportunizando alcançar dados descritivos que são produzidos em contato com o investigador na própria situação de estudo. E, ainda, segundo Bogdan e Biklen (1994, p.11)

> Embora os dados quantitativos recolhidos por outras pessoas (avaliadores, administradores e outros investigadores) possam ser convencionalmente úteis tal como foram descritos, os investigadores qualitativos dispõem-se à recolha de dados quantitativos de forma crítica. Não é que os números por si não tenham valor. Em vez disso, o investigador qualitativo tende a virar o processo de compilação na sua cabeça perguntando-se o que os números dizem acerca das suposições das pessoas que o usam e os compilam. [...] Os investigadores qualitativos são inflexíveis em não tomar os dados quantitativos por seu valor facial.

Para tal análise foi desenvolvido um encontro de formação com acadêmicos do curso de Matemática – Licenciatura de uma Instituição de Ensino Superior (IES) pública do Estado do Rio Grande do Sul, Brasil. A proposta constitui-se de uma oficina, que visava compreender as operações de adição e subtração de números racionais positivos por meio de frações equivalentes e a visualização das frações por meio do material Frac Soma 235.

O material Frac Soma 235 de autoria do Prof. Roberto Ribeiro Baldino, busca trabalhar o conceito e operações com frações. Consiste em barras de mesmo tamanho, 60 centímetros, que são divididas em peças congruentes, com divisores múltiplos de 2, 3 e 5 e para cada um dos divisores é atribuída uma cor conforme apresentado na figura 1.

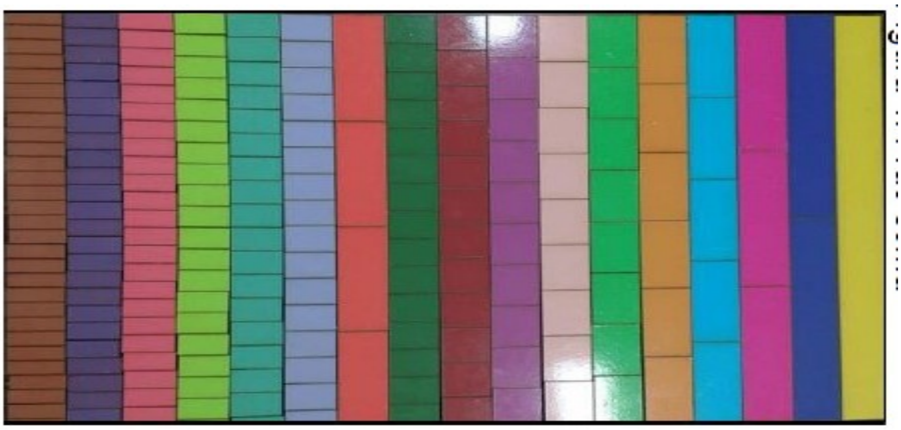

Figura 1 – Frac Soma 235
Fonte: da pesquisa.

A critério de exemplificação do emprego do material, pode-se compreender a barra rosa *pink* repartida em três partes iguais e um pedaço refere-se a $\frac{1}{3}$ da barra amarela (considerada a unidade, o todo). Como também, com o material organizado conforme a figura 1, é possível verificar que à direita de $\frac{1}{5}$ as partes são maiores e à esquerda são menores ($1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \mathbf{\frac{1}{5}} > \frac{1}{6} > \frac{1}{8} > \cdots$).

Estavam presentes neste estudo 12 licenciandos que também participam do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - PIBID. Os participantes se organizaram em duplas e receberam o material do Frac Soma, como também, um roteiro com atividades elaboradas para desenvolver a compreensão de fração no sentido parte/todo e como um quociente empregando o material de apoio e, foi discutida com os alunos a compreensão do conceito de frações equivalentes e operações.

Os dados foram levantados por meio dos registros escritos das soluções das atividades supracitadas dos licenciandos e pelas observações da professora registradas em seu diário.

A seguir são apresentados os resultados dessa oficina.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

As atividades ilustradas a seguir foram organizadas com o propósito de analisar algumas possibilidades de emprego do material Frac Soma 235 que podem dar significado às frações, às operações de adição e subtração com frações e superar possíveis dificuldades com esse conceito e com as operações. Neste sentido, Nunes e Bryant (1997), apontam que as frações e suas operações devem ser compreendidas pelas suas relações lógico-matemáticas, isto é, no entendimento de partição e unidade por exemplo.

Após os licenciandos reconhecerem o material Frac Soma 235, foi proposto uma tabela consistindo de três colunas: cor, número de divisões e a fração que representa a parte do todo. Conforme preenchiam os dados na tabela, ilustrada na Figura 2, os participantes formaram a Figura 1.

Cor	Número de divisões	A fração que representa a parte do todo
Amarela	1	1
Azul Marinho	2	1/2
Rosa	3	1/3
Vermelho	4	1/4
Azul água	5	1/5
Laranja	6	1/6
Verde	8	1/8
Nude	9	1/9
Lilás	10	1/10
Bordo	12	1/12
Verde musgo	15	1/15
Rosa claro	16	1/16
Azul esverdeado	18	1/18
Verde claro	20	1/20
Vermelho claro	24	1/24
Rosa	25	1/25
Marrom	30	1/30

Figura 2 – Reconhecendo o material Frac Soma 235
Fonte: da pesquisa.

Com o intuito de manipularem o material e visualizar as frações indicadas na terceira coluna da tabela foi proposto aos licenciandos para registrarem em uma reta numérica, já numerada em quintos, as frações encontradas por meio do Frac Soma. Ressalta-se que é essencial o aluno reconhecer a quantia que a fração representa e por meio da comparação e sobreposição de peças do material, evidenciando o tamanho de cada peça (fração). Muitas vezes, opera-se com frações e o aluno não tem uma estimativa do resultado (se maior ou menor que 1 por exemplo). A figura 3 ilustra o desenvolvimento de um grupo para esta atividade. Os outros grupos para identificação das frações na reta numérica, atribuíram o significado de quociente da fração e realizaram a divisão (numerador e denominador) para localizá-las na reta.

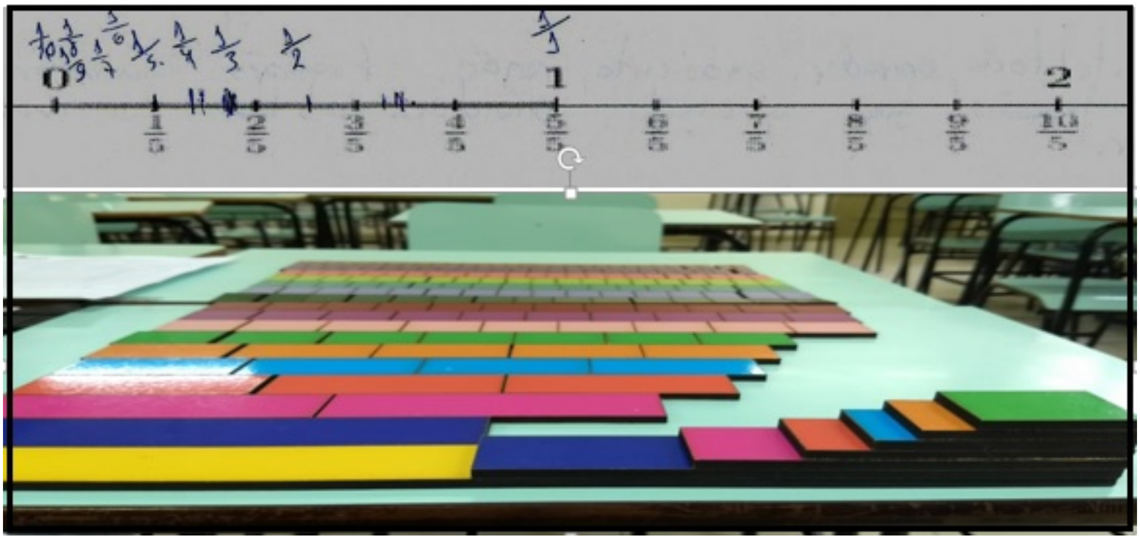

Figura 3 – Sobreposição de peças para comparação de frações e identificação das mesmas na reta numérica.
Fonte: da pesquisa.

Por meio do recurso Frac Soma 235, buscou-se explorar concepções fundamentais das frações (partição, ordenação e comparação) para servir de subsídio para compreender a quantidade que uma fração representa e assim efetuar operações. Fundamenta-se essa iniciativa pelo aporte teórico adotado neste estudo, ao indicar que a fração é vista pelo aluno como numerador e denominador (como uma contagem dupla) em detrimento do significado parte/todo (SILVA, 2015; MAGINA, CAMPOS, 2008).

Em se tratando da compreensão do significado parte/todo foi questionado aos licenciandos o que representa a fração $\frac{1}{3}$ (rosa *pink*) em relação ao todo (barra amarela). Buscando, assim, a interpretação uma parte das três partes iguais que o todo foi repartido. Além disso, foram feitos questionamentos quanto o que diferencia uma cor da outra? Quantas peças azuis são necessárias para formar o todo (barra amarela)? As peças são do mesmo tamanho? Aos licenciandos as perguntas pareceram bem primárias. Porém, quando destacado que as partes devem ser iguais (mesmo tamanho) para representar uma fração e as possibilidades que a barra amarela pode ser decomposta e recomposta para formar o todo, os licenciandos perceberam a necessidade de instigar em seus futuros alunos, quando estiverem atuando em sala de aula, o significado de parte/todo de uma fração.

O significado de quociente foi explorado por meio da seguinte situação: "Represente a fração $\frac{4}{2}$ com o material. Faça o mesmo com a fração $\frac{6}{3}$." Num primeiro momento essa tarefa causou estranheza aos licenciandos, pois as frações são impróprias (maior que 1). Eles argumentaram que com o material não era possível fazer a representação. Como os grupos começaram a discutir entre si e com a professora sobre a fração $\frac{4}{2}$, concluíram que dava 2. Quando questionados sobre o significado desse número 2 obtido, uma dupla respondeu "2 barras amarelas", mas para as demais duplas a resposta não foi imediata, pois estavam representando a fração $\frac{4}{2}$ como a barra amarela dividida em 4 partes iguais. O grupo que concluiu 2 barras amarelas, tomaram frações equivalentes para representar o resultado. Eles colocaram que uma barra amarela equivale a $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ representadas pelas barras azuis e $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ representadas pelas barras vermelhas, conforme ilustrado na figura 4. Para duas barras amarelas bastava duplicar.

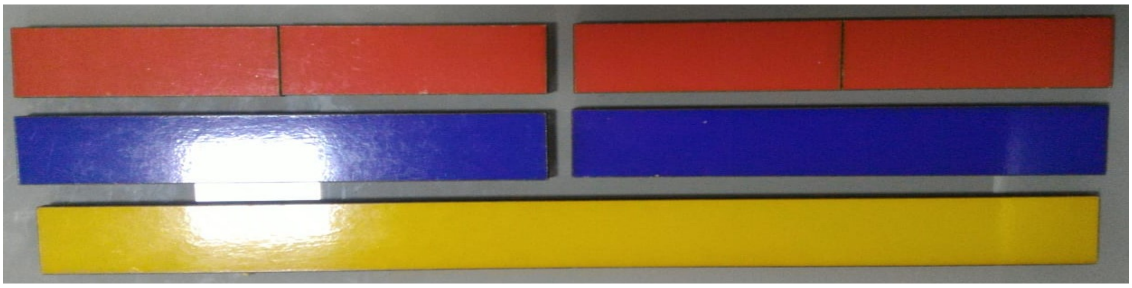

Figura 4 – Representação da equivalência construída por uma das duplas
Fonte: da pesquisa.

Conforme já apontado na literatura, o significado parte/todo muitas vezes é o primeiro e único significado explorado pelos professores ou pelos livros didáticos (MAGINA, CAMPOS, 2008). Neste estudo, os licenciandos demonstraram maiores dificuldades em interpretar o significado de quociente do que parte/todo de uma fração, inferindo-se, assim, que há uma maior familiaridade de um significado a outro.

Além da ideia de divisão de uma fração, $\frac{4}{2}=4:2=2$, essa atividade teve como propósito, também, ilustrar a equivalência, pois o aluno consegue "cobrir" a barra amarela de diferentes modos. Algumas duplas cobriram com "quartos" e outras cobriram com "oitavos" e assim por diante. Deste modo, foi questionado aos licenciandos se essas igualdades eram verdadeiras $\frac{4}{2}=4:2=2=\frac{6}{3}=6:3$, então $\frac{4}{2}$ é a mesma coisa que $\frac{6}{3}$?

De modo geral, responderam que a divisão dá o mesmo resultado. Quando questionados para representarem (contextualizarem) as frações, então, perceberam que não se tratava da mesma coisa, porém sempre se está dividindo o dobro do número por ele. O propósito da questão era que os licenciandos concluíssem o que são frações equivalentes e o que o sinal de igualdade representa nesta situação.

Ainda sobre a ideia de equivalência, foi questionado se com peças de $\frac{1}{9}$ era possível cobrir a peça de $\frac{1}{3}$. Como também, se com peças de $\frac{1}{10}$ era possível cobrir a peça de $\frac{1}{3}$. E, deste modo, concluírem porque no primeiro caso é possível cobrir e no segundo não. Os licenciandos buscaram a peça $\frac{1}{3}$ no material e a cobriram com 3 peças de $\frac{1}{9}$. Com a peça de décimos, facilmente perceberam que faltava ou sobrava para cobrir o terço. Quanto ao por que desse fato, eles mencionaram que denominador 3 não é divisor de 10. Com o material buscaram peças que $\frac{1}{10}$ poderia cobrir. E foram direto para as peças de vinte e trinta avos.

Inicialmente, neste estudo, priorizou-se a compreensão de frações equivalentes no intuito que esse pensamento não fosse uma dificuldade a mais para, na sequência, operar com frações. Com a manipulação do material, reconstituição do todo, comparação de frações, dentre outras possibilidades, os participantes criaram familiaridade em dizer, por exemplo, $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$, ou seja, a soma de frações com o mesmo denominador (mesma cor). O que normalmente nas salas de aula, os alunos não apresentam dificuldade nessa soma. Porém, quando os denominadores são distintos, o raciocínio não é o mesmo e, em geral, acabam escrevendo, por exemplo, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$. Perante essa dificuldade, elaborou-se as atividades a seguir que emprega o significado de parte/todo, de equivalência e visualização dessas equivalências por meio do material Frac Soma 235.

Uma das atividades propostas foi realizar a soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Assim, foi solicitado que os licenciandos buscassem no material a peça correspondente a cada fração e fossem dispostas abaixo da barra amarela (unidade). A formadora iniciou os encaminhamentos colocando que se fosse “um meio” mais “um meio” teriam a unidade completa. Ou a soma de 3 terços também teria a unidade completa. Para a soma desejada nota-se que as cores e os tamanhos das peças são distintos. Se as peças têm a mesma cor (tamanho) a soma é imediata. A ideia, então, é a seguinte: buscar no material peças da mesma cor que recubram a peça de um meio e um terço. Ainda é possível notar que a soma dessas frações é menor que um (unidade, barra amarela). A figura 5 ilustra a solução encontrada por uma dupla.

Figura 5 – Representação do cálculo $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ por uma das duplas.
Fonte: da pesquisa.

No quadro e no material de apoio de cada grupo, foi feito o registro numérico que a representação do material proporciona. Também, foi estimulado que as duplas buscassem outras representações para essa soma, isto é, com outras cores (tamanhos). Por exemplo, os múltiplos de 6. Uma ideia já explorada anteriormente, a multiplicidade dos denominadores para cobrirem ou não uma peça.

Deste modo, o registro organizado foi $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$. Ou seja, pelo material, visualiza-se que um meio equivale a três sextos e um terço equivale a dois sextos num total, então, de cinco sextos para a soma desejada. Raciocínio análogo foi explorado para a operação subtração. A figura 6 ilustra a subtração de frações realizada por uma das duplas.

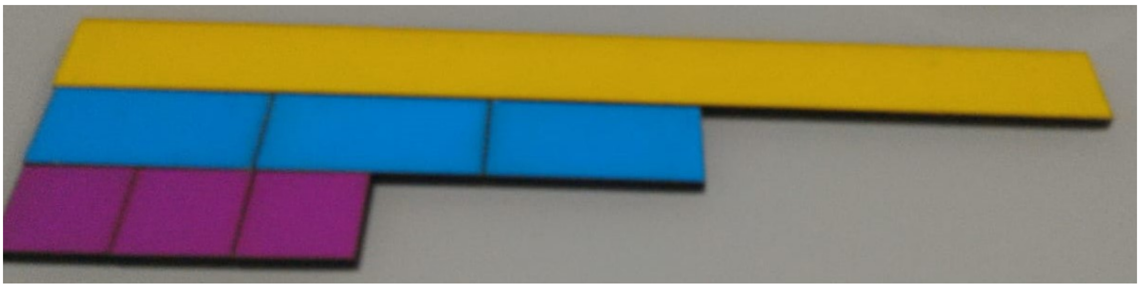

Figura 6 – Representação do cálculo $\frac{3}{5}-\frac{3}{10}=\frac{3}{10}$.
Fonte: da pesquisa.

O procedimento para a subtração foi análogo ao da soma de frações. Pelo material ilustrado na figura 6, os alunos visualizaram que um quinto equivale a dois décimos. Logo, a diferença de três quintos e três décimos pode ser compreendida como o que falta das peças roxas para completar as peças azuis (figura 6). O que representa mais três peças roxas. Em termos de equivalência, $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$, assim como, $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$. Logo, $\frac{6}{10}-\frac{3}{10}=\frac{3}{10}$.

Segundo Silva e Almouloud (2008), durante o processo de ensino e aprendizagem não se faz a ligação dos significados de uma fração com as suas operações. O roteiro de atividades pré-elaboradas aplicado aos licenciandos, buscava uma relação e interpretação das operações com frações a partir do significado parte/todo e contando com o auxílio da visualização propiciada pelo Frac Soma 235. Esse recurso auxiliou na interpretação da operação de adição (e subtração) de frações, tornando o procedimento de somar sem uma regra *a priori* mais compreensível, pois tinha-se a possibilidade de buscar peças do mesmo tamanho (mesmo denominador) para determinar a equivalência e soma de peças (frações).

Ao questionar os licenciandos sobre essa forma de compreender e resolver uma adição ou subtração de números racionais positivos, eles foram unânimes em dizer que esse procedimento (equivalência de frações e visualização no material) é mais coerente e com mais significado ao aluno que está iniciando seus estudos sobre esse conteúdo. Entretanto, eles próprios, já se colocam "presos" pelo algoritmo (uso do m.m.c.). Um grupo mencionou que "achamos o m.m.c mais eficiente pela prática e por ter visto esse método na escola", embora sem compreensão do significado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo teve como propósito analisar a compreensão do conceito de frações equivalentes e das operações adição e subtração com licenciandos em Matemática. Para isso, foi organizada uma oficina em que foram desenvolvidas atividades com o propósito de favorecer a compreensão das operações adição e subtração de números racionais positivos por meio do material Frac Soma 235.

Os licenciandos participantes desse estudo estão todos na primeira metade do curso de graduação, desse modo, com poucas experiências de ensino de Matemática e não tendo cursado disciplinas específicas direcionadas ao ensino. Neste sentido declararam que as atividades propostas para compreensão de frações equivalentes e, na sequência, operações com frações, são complexas para um aluno de 6º ano do Ensino Fundamental, já que eles próprios não se sentiam seguros, com apropriação/conhecimento para tal.

Falas como por exemplo "por m.m.c é muito mais rápido" ou " fração equivalente não é apenas multiplicar em cima e em baixo pelo mesmo número?" demonstram o mecanicismo já incorporado pelos licenciandos. Neste estudo, foi proposto a operação de soma pelo procedimento de equivalência, mas, não colocou que o uso de algoritmos (m.m.c.) não seja eficiente. Quando questionados o que significa o m.m.c. e o processo de reduzir ao mesmo denominador, os licenciandos desconheciam porque funcionava, mas complementam que foi assim que aprenderam na escola e reproduzem.

Durante o desenvolvimento das atividades propostas, os licenciandos indagaram sobre como entender as operações de adição e subtração pelas frações equivalentes e não pelo m.m.c. Questionaram a professora e discutiram entre eles sobre a preparação do material do professor para ensinar esse tema, o não uso precoce do algoritmo e a possibilidade de trabalhar com frações equivalentes unindo o material por hora explorado.

O sentido de adotar a proposta aqui ilustrada é de provocar no licenciando em Matemática a ideia de que conceitos/definições/propriedades básicas da Matemática precisam estar bem consolidadas no ensino básico. Ou ainda, que o aluno precisa entender a Matemática para poder ensiná-la.

REFERÊNCIAS

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação Matemática**: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994.

BEHR, M.; et al. Rational number concepts. In Lesh, R; Landau,M (Eds.). **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes**. New York: Academic Press. 1983. p. 91-125

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília. 2017. 472f. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf. Acesso em 24 jan 2018.

KIEREN, T. Personal Knowledge of rational numbers: its intutive and formal development .In: Hiebert, J and Behr, M. (eds.) **Number Concepts and Operations in the Middle Grades**. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 1980, p. 162-180.

KIEREN, T. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers**.** In Lesh, R. (Ed.) **Number and measurement: Paper from a research workshop**. Columbus, Ohio: ERIC/MEAC, 1975, p.101-144.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding**: essential content knowledge and instructional strategies for teachers 2 ed. Mahwah: Lawrence Erlbaum Association. 2006.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. A fração na perspectiva do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do Ensino Fundamental. **Boletim de Educação Matemática**: Rio Claro, ano 21, n. 31, 2008, p. 23-40.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas. 1997

RIPOLL, B.R.; RIPOLL, C.C.; SILVEIRA, J.F.P. **Números racionais, reais e complexos**. Porto Alegre: URFRGS Editora. 2ed. 2011.

ROMANATTO, M.C. **Número racional**: relações necessárias a sua compreensão. 1997. 169f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1997.

SILVA, M.F.F.; ALMOULOUD, S. A. As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte/todo. **Bolema**: Rio Claro, Ano 21, nº 31, 2008, p. 55 a 78.

SILVA, V. T. S. **Estudo e ensino de frações:** aprendizagens e dificuldades docentes no processo de formação continuada. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2015.

SILVA, M.J.F. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. 1997. 245f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1997.

Submetido em 19 de setembro de 2018.
Aprovado em 25 de março de 2019.