revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UMA ABORDAGEM HISTÓRICA E TECNOLÓGICA PARA O ENSINO DA CONSTANTE DE EULER

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2019.8.16.206-230

Daniel de Jesus Silva[1]
Victor Giraldo[2]

Resumo: As mudanças que desejamos que aconteçam no contexto educacional demandam metodologias inovadoras. Dentre estas, encontra-se a articulação entre história da matemática e tecnologias digitais em atividades investigativas como possibilidade metodológica no componente curricular de Cálculo Diferencial e Integral II. Este artigo relata práticas pedagógicas em uma experiência conduzida dessa forma, especificamente com a constante de Euler. Participaram da experiência o professor (primeiro autor deste artigo) e 15 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia (UNEB). A experiência foi estruturada em três etapas, que partiram da exploração de um problema histórico sobre finanças, e foram desenvolvidas com a mediação de recursos digitais. Resultados indicam um maior engajamento e produção de sentidos por parte dos estudantes, embora dificuldades com o uso dos recursos digitais tenham sido relatadas.
Palavras-chave: História da matemática. Tecnologias digitais. Constante de Euler. Formação inicial de professores de matemática.

A HISTORICAL AND TECHNOLOGICAL APPROACH FOR THE TEACHING OF THE EULER'S CONSTANT

Abstract: Changes we aim to the educational context demand innovative methodologies. Among these, is the articulation between history of mathematics and digital technologies in investigative activities as a methodological possibility in the teaching of Differential and Integral Calculus II. This paper reports pedagogical practices in an experiment conducted with this approach, specifically with Euler's constant. Participants of the experience were the lecturer (first author of this paper) and 15 students from the Undergraduate Program for Pre-Service Mathematics Teacher Education of the State University of Bahia (UNEB). The experience was structured in three stages, starting from the exploration of a historical problem about finances, and was developed with the mediation of digital resources. Results indicate a greater involvement and production of meanings by students, although difficulties with the use of digital resources have been reported.
Keywords: History of mathematics. Digital technology. Euler's constant. Pre-service mathematics teachers education.

Introdução

Este relato é uma descrição de práticas docentes de um professor de *Cálculo*

[1] Doutorando em Educação pela UFRJ, docente da Universidade do Estado da Bahia – UNEB. E-mail: djsilva@uneb.br
[2] Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação pela UFRJ, docente dos Programas de pós-graduação em Ensino de Matemática e em Educação da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ. E-mail: victor.giraldo@gmail.com

Diferencial e Integral desenvolvida durante o segundo semestre de 2017, com a participação do autor na condição de professor/pesquisador e de 15 estudantes do curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Ciências Humanas (DCH) – *Campus* VI da Universidade do Estado da Bahia (UNEB). Buscou-se investigar como a metodologia de aprendizagem por meio da conexão entre história da matemática e tecnologias digitais em atividades investigativas pode contribuir para a construção do conhecimento sobre a constante de Euler, o número e.

O uso da história numa inter-relação com tecnologias digitais no processo de ensino-aprendizagem da matemática também possibilita a desmistificação dessa componente curricular, como disciplina "difícil" ou "acessível a poucos" e pode estimular a não alienação do seu ensino (SILVA; SILVA; OLIVEIRA, 2016). Conhecer e levar em consideração os percursos históricos das ideias matemáticas pode auxiliar o trabalho investigativo em sala de aula, pois, em muitos momentos, o estudante poderá encontrar nesses percursos paralelos para suas próprias dificuldades (MIGUEL; MIORIM, 2004). Além disso, ferramentas tecnológicas potencialização trabalhos investigativos (REZENDE, 2014). Sobre o uso de software, Rezende (2014, p. 91) pontua que "os argumentos favoráveis [...] são bem diversificados. Experimentar, criar estratégias, fazer conjecturas, argumentar e deduzir propriedades matemáticas são, em verdade, ações desejáveis no ensino de matemática em qualquer domínio de conhecimento e nível de ensino."

Com o desenvolvimento de atividades investigativas, objetivamos contribuir para uma prática pedagógica inovadora, propiciando aos estudantes um protagonismo na construção do conhecimento. Assim, este trabalho, de caráter qualitativo, sustentado na participação direta em situações de ensino e de aprendizagem, tornou-se de grande importância para o professor, que desejava desconstruir visões preconcebidas sobre a matemática, bem como provocar transformações nas formas como esta é usualmente ensinada: sem considerar suas ideias como produções humanas, resultantes de percursos históricos, situados cultural e socialmente – o que torna a disciplina sem conexões com o(s) passado(s) e com o(s) presente(s).

Neste trabalho, apresentamos resultados do desenvolvimento da história da matemática em atividades investigativas, fazendo uso de computadores, para a construção do conhecimento sobre a constante de Euler, mediante as observações feitas antes e durante a realização da experiência intitulada "*A constante de Euler: um tratamento histórico e tecnológico*".

História e Tecnologias: um ambiente propício para aulas de matemática

Ao iniciar este relato de experiência, que se sustenta na importância do contexto histórico e da utilização de tecnologias digitais no ensino de matemática, destacamos que preocupações de como se ensinar as disciplinas da chamada área das "ciências exatas" não são novas. Segundo Roque (2012), as formas de escrever definições, teoremas e demonstrações é há séculos uma grande preocupação dos matemáticos. Podemos crer que "um dos fatores que contribuem para que a matemática seja considerada abstrata reside na forma como a disciplina é ensinada, fazendo-se uso, muitas vezes, da mesma ordem de exposição presente nos textos matemáticos" (ROQUE, 2012, p. 30). Ponderando sobre os desafios contemporâneos das práticas docentes, Lara (2016) pontua que:

> Ensinar Matemática num contexto em que os estudantes possuem cada vez mais acesso à informação por meio da tecnologia tem se tornando um desafio para os professores. Ao mesmo tempo, torna-se difícil desenvolver o gosto pela Matemática por meio de práticas fundadas em princípios metodológicos e crenças de um modelo pedagógico tradicional (LARA, 2016, p.02).

O professor que ministra aulas fazendo uso apenas do quadro e do livro didático, com meras exposições de fórmulas, está sujeito a estimular o desenvolvimento por parte de seus estudantes de concepções da matemática como um campo pronto e acabado. Dessa maneira, tem-se um processo de ensino mecanizado, apartado da arte que envolve variadas metodologias para ensinar, afinal:

> A matemática é uma ciência fundamental para nossa compreensão e adaptação ao mundo. Etimologicamente, a palavra matemática é formada pela junção de dois vocábulos: matema, que significa "explicar", "entender"; e tica (techne), que significa "arte ou técnica". Dessa forma, consideramos que Matemática significa a arte ou técnica de entender e explicar as coisas que há no mundo (BRASIL, 2007, p.17).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2007) destacam que a matemática ajuda na compreensão de tudo que está em nossa volta, pois a descoberta parte do instante em que se questiona algo. Essas descobertas no campo da matemática sempre se deram frente a situações-problemas e foram moldadas pelas ideologias de suas épocas, sendo posteriormente sistematizadas e formalizadas em conteúdos de livros que comumente adotados nas instituições de ensino. Sendo assim, conhecer a história pode auxiliar na concepção e no esclarecimento do conteúdo matemático que estudamos atualmente, além de nos ajudar a compreender muitas transformações do contexto social e político que influenciam o ensino de matemática. Roque e Carvalho (2012) destacam a importância do ensino em um contexto histórico para a compreensão de um conteúdo matemático.

> A matemática se desenvolveu, e continua a se desenvolver, a partir de problemas. O papel da história da matemática pode ser justamente exibir esses problemas, muitas vezes ocultos no modo como os resultados se formalizaram. Para além da reprodução estéril de anedotas visando "motivar" o interesse dos estudantes, é possível reinventar o ambiente "problemático" no qual os conceitos foram criados (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 22).

A partir daí, pode-se considerar que, no ensino de matemática, é necessário buscar nos problemas históricos geradores de descobertas, situando nestes os contextos presentes no âmbito escolar, apresentando a matemática como uma produção humana e, assim, possibilitando a produção de novos sentidos para as ideias matemáticas pelos estudantes. Como afirma Lara (2016, p. 4), "conhecer a História da Matemática oportunizaria aos estudantes uma visão de que a evolução da Matemática é dinâmica, trazendo os fatos que deram origem aos conceitos que são estudados em sala de aula e o modo como estão ou não relacionados".

Além disso, diante dos desafios impostos ao professor "com o advento e a disseminação de recursos tecnológicos com base na informática, cada vez mais docentes procuram tornar suas aulas atrativas e estimular a participação ativa do estudante na construção do conhecimento" (TENÓRIO; CARVALHO; TENÓRIO, 2016, p. 2). Discutindo especificamente vantagem do uso de planilhas eletrônicas no ensino de matemática, Giraldo, Caetano e Mattos (2012, p. 26) comentam: "Manipulação e operações com grandes quantidades de dados numéricos; articulação entre diversas formas de representação; ferramentas lógicas; ferramentas estatísticas." Valente (1999) destaca que o ensino deixa de ser transmissão de informações e passa a ser criação de situações-problema, auxiliando na construção de novos conhecimentos. Logo, o professor passa de transmissor para mediador. Roque e Giraldo (2014) comentam que:

> O conhecimento histórico por parte do professor permite *recontextualizar as ideias matemáticas no ambiente problemático de sua gênese, reconhecendo e situando os aspectos epistemológicos que emergem no processo de ensino-aprendizagem*. O uso de tecnologias computacionais pode se articular, na prática de sala de aula, a essa forma de ver a matemática (ROQUE; GIRALDO, 2014, p.34, grifo dos autores).

Diante do exposto, articulações entre história da matemática e tecnologias digitais apresenta-se como elemento que pode propiciar a criação de um ambiente investigativo para o ensino de matemática. Tais articulações possibilitam abordagens em que problemas históricos são potencializado pelo uso de recursos digitais – o que norteará a experiência com a constante de Euler em sala de aula relatada neste texto.

Reflexões sobre os momentos experienciados no desenvolvimento da experiência "A constante de Euler: um tratamento histórico e tecnológico"

A experiência "*A constante de Euler: um tratamento histórico e tecnológico*" foram elaboradas com o intuito de explorar como uma metodologia de ensino por meio da história de matemática em atividades investigativas tendo como suporte planilhas eletrônicas pode contribuir para a construção do conhecimento acerca da constante de Euler. Essa experiência foi desenvolvida na sala de informática, tendo como recursos didáticos: materiais concretos manipuláveis; um texto previamente preparado versando sobre a história do número e; uma lousa móvel; planilhas eletrônicas instaladas nos 14 microcomputadores disponíveis na sala. Como procuraremos argumentar ao longo deste texto, a realização das atividades que compõem esta experiência constituiu uma rica possibilidade de construção de conhecimento e de reflexões profissionais, partindo das necessidades reais presentes no cenário de investigação.

A experiência foi desenvolvida nos horários das aulas de Cálculo II, do curso de Licenciatura em Matemática do *Campus* VI da UNEB, com a participação de 15 estudantes que foram subdivididos em sete grupos, sendo seis duplas e um trio. A organização em grupos deu às aulas um caráter de parceria, com a finalidade de gerar um ambiente dinâmico e cooperativo, onde os participantes foram instigados a investigar, criar conjecturas, testar e validar (ou refutar) hipóteses, criar conceitos por meio de noções intuitivas e então formalizar definições. Elaboramos objetivos que esperávamos alcançar no decorrer das atividades, tais como: provocar discussões matemáticas, recorrer a conhecimentos prévios, compartilhar experiências matemáticas. A experiência foi estruturada em três etapas:

1. Definição da constante de Euler, elaborada a partir de um problema financeiro histórico com utilização da planilha eletrônica (que facilitou os cálculos e viabilizou investigações matemáticas);
2. Cálculo do valor aproximado da constante de Euler, com precisão de treze casas decimais, utilizando uma expansão em série de Taylor, por meio de planilha eletrônica;
3. Abordagem de aplicações práticas do conteúdo abordado.

Primeira etapa: **Investigações para conhecer aspectos históricos e a constante de Euler**

A experiência se iniciou com a distribuição de um texto impresso sobre aspectos históricos da criação da constante de Euler, com o objetivo de familiarizar os estudantes com os contextos históricos em que as ideias matemáticas são produzidos, desconstruindo possíveis concepções de que os conceitos matemáticos "já nascem prontos".

Discutimos que desde épocas passadas questões financeiras se encontram no centro das preocupações humanas. Segundo Maor (2003), algum matemático anônimo, um mercador ou mesmo um prestamista, no início do século XVII, deve ter notado uma ligação entre o modo como o dinheiro se acumulava através dos juros e o comportamento de certa expressão matemática com o transcorrer de períodos indefinidamente grandes de tempo. O conceito de juros, ou valor pago sobre um empréstimo, é comumente um ponto central em consideração sobre finanças. De acordo com Batista Junior (2014), a maior parte da literatura matemática mais antiga lida com questões sobre juros. Um exemplo encontra-se em um tablete de argila da Mesopotâmia datado de 1700 antes da era comum, que propõe um problema que poderia ser enunciado em termos contemporâneos da seguinte forma: *quanto tempo levará para um valor em dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de juros composto de 20% ao ano?* A partir da proposição desse problema, a aula transcorreu da forma que passamos a relatar.

No caso geral, ao investir um capital C em uma conta que paga $i\%$ (transforma-se o valor em porcentagem em decimal) de taxa de juro composto anualmente. Isso significa que o montante (M) será igual a $C(1+i)$ ao final do primeiro ano, a $C(1+i)^2$ ao final do segundo, e a $C(1+i)^t$ depois de t anos, o que leva à fórmula:

$$M = C(1+i)^t \qquad (1)$$

Essa fórmula é a base para a maioria dos cálculos financeiros. Supondo agora que a composição do juro é feita n vezes ao ano. Para cada "período de conversão" usa-se a taxa anual dividida por n, que é $\frac{i}{n}$. Como em t anos existem nt períodos de conversão, um montante M, após t anos renderá:

$$M = C(1+\frac{i}{n})^{nt} \qquad (2)$$

Para explorar melhor essa questão, considera-se a uma taxa anual de juros de 100%. Claro que nenhum investimento seria tão generoso, mas o que temos em mente é uma profunda consequência matemática. Para simplificar nossa discussão tomamos $C = R\$1,00$ e $t = 1$ ano. A equação (2) então se torna:

$$M = (1+\frac{1}{n})^n$$

Recriamos assim, um problema histórico relacionado a questões financeiras, propondo que os estudantes construíssem em uma planilha eletrônica uma tabela e encontrassem resultados para a expressão $M = (1+\frac{1}{n})^n$, aumentando sucessivamente os valores de n.

Na atividade 1 (extraída de Giraldo, Caetano, Mattos, 2012), descrita a seguir, apresentamos um problema histórico envolvendo uma situação da Matemática Financeira como uma das formas de motivar a definição da constante de Euler. A planilha eletrônica tem um papel fundamental na atividade, uma vez que o volume de cálculos necessários a tornaria inviável, caso esses fossem feitos com lápis e papel.

ATIVIDADE 1

Em uma planilha eletrônica, considere as colunas A, B e C. Nessas colunas realize as seguintes operações:

1. Na coluna A, digite nas células A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9 e A10, respectivamente, os valores 1, 2, 3, 4, 6, 12, 365, 8760, 525600 e 31536000.
2. Digite $= 1 + 1/A1$ na célula B1 e $= B1\text{^}A1$ na célula C1.
3. Arraste as células B1 e C1, ao longo das colunas B e C, até o final dos valores digitados na coluna A.

Agora, responda às seguintes questões.

(a) Na coluna C estamos calculando $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para n igual a cada um dos valores digitados na coluna A. O que você observa nestes cálculos?

(b) Como explicar que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ aproxima-se de um número real à medida que n aumenta?

PERGUNTAS COMPLEMENTARES

(c) Será que o fato deste saldo final aumentar significa que ele aumenta ilimitadamente? Isto é, podemos obter um saldo final tão grande quanto queiramos, tomando períodos de capitalização suficientemente pequenos?

(d) Observando o comportamento dos números e baseando-se na intuição, escreva uma expressão que represente os valores da tabela.

Fonte: Giraldo, Caetano e Mattos (2012, p. 50-51).

Feitos todos esses procedimentos, chegamos à tabela a seguir (figura 01), em que os valores contidos na coluna C são resultantes de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para n igual a cada um dos valores digitados na coluna A.

Figura 01: Print da tabela 01 para valores de n propostos na atividade 1

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	2	2				
2	2	1,5	2,25				
3	3	1,333333	2,37037				
4	4	1,25	2,441406				
5	6	1,166667	2,521626				
6	12	1,083333	2,613035				
7	365	1,00274	2,714567				
8	8760	1,000114	2,718127				
9	525600	1,000002	2,718279				
10	31536000	1	2,718282				

Fonte: Autores.

Discutimos, a partir da atividade 1 (tabela 1), opções por capitalização: anual (linha 1); semestral (linha 2); quadrimestral (linha 3); e assim por diante, sempre tomando uma forma comum de fracionar períodos (meses, dias, horas, minutos e segundos), até chegarmos à capitalização segundo a segundo (um ano corresponde a 31536000 segundos), conforme mostra a linha 10. Após a construção da tabela 01, os estudantes fizeram uma observação do comportamento dos valores encontrados para a fórmula dada para valores de n sucessivamente grandes e foram desafiados a formularem uma expressão que representasse os valores contidos na coluna C. A princípio alguns acharam que o valor se aproximaria de 3 (por exemplo, 2,999...). Então, solicitei que eles inserissem na coluna A, valores ainda maiores do que os que já haviam, e fizessem novas observações (veja Figura 02).

Figura 02: Print da tabela 01 para valores de n superiores aos propostos na atividade 1

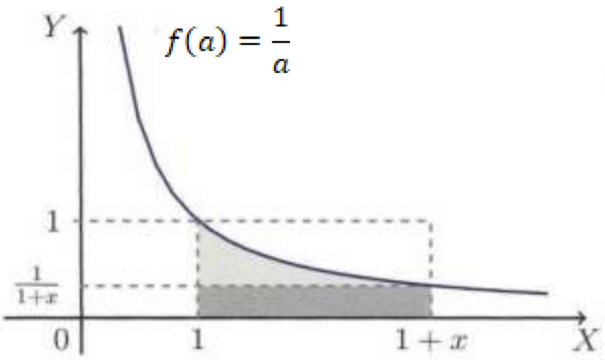
7	365	1,002739726027	2,71456748
8	8.760	1,000114155251	2,71812669
9	525.600	1,000001902588	2,71827924
10	31.536.000	1,000000031710	2,71828178
11	99.999.999.999	1,000000000010	2,71828205
12	199.999.999.999	1,000000000005	2,71828205

Fonte: Autores.

Após observarem que os algarismos das casas decimais nas primeiras ordens não se alteravam, os estudantes concluíram, com base na noção de limite que compreendiam intuitivamente, que aqueles valores convergiriam para um limite real, cuja representação decimal deveria ter a forma 2,71828..., e escreveram: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 2{,}71828\ldots$ Observamos que esse é um número irracional, representado pelo símbolo e, cuja representação decimal prossegue na forma $e = 2{,}718281828459\ldots$, tendo um papel importante na matemática avançada e no ensino superior, com inúmeras aplicações na modelagem de problemas em diversas áreas.

Embora tenhamos percebido de forma intuitiva que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, precisávamos provar a existência desse limite por meio de um argumento rigoroso. Para esse fim, tendo como base uma representação gráfica (Figura 03), usamos o Teorema Fundamental do Cálculo (aplicado ao fato de que a função logaritmo natural é primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x}$) e o Teorema do Confronto – fatos já conhecidos pelos estudantes em aulas anteriores de Cálculo.

Figura 03: Interpretação geométrica do logaritmo natural



Fonte: Lima (2013, p.202).

Na figura acima, temos um retângulo menor, cuja base mede x e cuja altura mede $\frac{1}{1+x}$, contida na região cuja área é dada por $\int_1^{1+x} f(a)da$ e esta, por sua vez, contida no retângulo maior, com a mesma base de medida x e altura igual a 1. Comparando as áreas dessas três figuras, podemos escrever, para todo $x > 0$:

$$\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x.$$

Dividindo por x:

$$\frac{1}{1+x} \le \frac{\ln(1+x)}{x} \le 1.$$

Tomando $x = \frac{1}{n}$:

$$\frac{n}{n+1} \le \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 1,$$

Portanto:

$$e^{\frac{n}{n+1}} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Aplicando limite com n tendendo a infinito em todas as expressões da desigualdade acima, temos que $\frac{n}{n+1}$ tende a 1, logo $e^{\frac{n}{n+1}}$ tende a e. Pelo Teorema do Confronto, segue que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Assim, provamos que o limite que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existe e que este é o mesmo número e anteriormente definido como base do logaritmo natural.

No livro didático de Cálculo Stewart (2016), encontram-se os comentários de que Euler provou em 1737 que e é um número irracional, e determinou seus primeiros 23 dígitos em 1748; e de que, em 2010, os matemáticos Shigeru Kondo e Alexander Yee calcularam o primeiro trilhão de casas decimais de e.

Sendo irracional, o número e tem uma expansão decimal infinita e não periódica. Na próxima etapa da experiência, *para fins didáticos*, utilizaremos planilhas eletrônicas para calcular um valor aproximado para a constante de Euler com precisão de 13 casas decimais, por meio da fórmula de Taylor.

Segunda etapa: Série de Taylor e o cálculo aproximado do valor de e

Na etapa anterior, partimos de uma análise intuitiva, chegamos a uma prova rigorosa de que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Agora, para calcularmos suas primeiras casas decimais com precisão partiremos da definição de derivada de função de uma variável até chegarmos à série de Taylor.

Definição: A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função denotada por $f'(x)$, tal que, seu valor em qualquer $x \in D(f)$ é dado por

$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, se este limite existir.

Sendo f uma função derivável definida num certo intervalo, sua derivada f' é também uma função, definida no mesmo intervalo. Podemos, portanto proceder com derivações sucessivas, assim se f' é derivável, sua derivada será f'', chamada de derivada segunda de f. Se f'' é derivável, sua derivada será f''', denominada de derivada terceira de f. Desta forma, a derivada de ordem n ou n-ésima derivada de f, representada por $f^{(n)}(x)$, é obtida derivando-se a derivada de ordem $n-1$ de f.

Considerando a função exponencial de base e, ou seja, $f(x) = e^x$, provamos que $f'(x) = f(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} e^x \,.\, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Como $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \ln e$ (limite fundamental), segue que:

$$f'(x) = e^x.lne$$

$$f'(x) = e^x$$

Sendo assim, concluímos que se $f(x) = e^x$, então $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = \cdots = e^x$.

A fórmula de Taylor fornece um método de aproximação de funções diferenciáveis por polinômios, com erros possíveis de serem estimados, largamente empregado em problemas de cálculo numérico. Segundo Morais e Sáfadi (2000, p. 110), a fórmula de Taylor “tem vasta importância na solução de equações algébricas e transcendentes, na interpolação e extrapolação, na integração e diferenciação e na solução de equações diferenciais”. A fórmula de Taylor é particularmente importante para encontrar aproximações para valores de *funções transcendentes*, isto é, aquelas cujas leis de formação não podem ser expressas por meio de um número finito de combinações entre operações algébricas aplicadas sobre a variável e constantes – como é o caso da função exponencial. Nesses casos, a fórmula de Taylor fornece aproximações por meio de expressões polinomiais, que, sendo assim, podem ser calculadas por operações algébricas.

O objetivo junto aos estudantes era determinar aproximações com precisão de casas decimais do valor de e, empregando a fórmula de Taylor para a função $f(x) = e^x$ em $a = 0$ para aproximar seu valor em $x = 1$ (observando que $f(1) = e$). Como o valor calculado é uma aproximação, existe um erro em relação ao valor real. Esse erro, que é inerente ao método numérico e surge quando se substitui um processo matemático infinito por um processo finito ou discreto, pode ser estimado e tende a zero quando o grau do polinômio aumento, e quando a variável x se aproxima do ponto a em torno do qual o polinômio de Taylor é determinado.

O polinômio de Taylor de grau n de f em torno de a é definido por:

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f'(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

O erro $R_n(x)$ associado à aproximação de $f(x)$ pelo polinômio de Taylor de grau n de f em torno de a é definido como a diferença entre o valor exato da função no ponto x e valor dado por essa aproximação nesse ponto. Portanto, esse erro é dado por:

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

Ao se usar fórmulas de Taylor para fazer aproximações, é importante se ter formas de controlar o erro associado, isto é, obter-se estimativas para esse erro. Uma maneira de fazer isso é chamada Fórmula de Taylor com resto de Lagrange (e.g. NERI, CABRAL, 2009):

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \text{ com } |\xi - a| \leq |x-a|$$

Como em geral o valor ξ que realiza a igualdade acima não é conhecido, a fórmula anterior fica limitada à estimativa do valor mais desfavorável, ou seja:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{n!}(x-a)^n,$$

em que M é o valor máximo absoluto de $\left|f^{(n)}(\xi)\right|, |\xi - a| \leq |x-a|$.

Tomando-se a função exponencial $f(x) = e^x$ e observando que $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, concluímos que o polinômio de Taylor de grau n de f em torno de $a = 0$ é definido por:

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

A exponencial faz parte de uma classe de funções, chamadas *funções analíticas*, para as quais a *série de Taylor*, dada pela extrapolação do polinômio de Taylor para todo n natural, converge para a própria função quando n tende a infinito (e.g. NERI, CABRAL, 2009). Isto, nesses casos, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Portanto:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Tomando $x = 1$, tem-se:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Considerando que o *software* utilizado tem a capacidade de inserir números com até 30 casas decimais, verificaremos qual deve ser o valor do n na fórmula de Taylor para aproximar o valor de e com treze casas decimais exatas. Para isso, devemos encontrar um erro absoluto:

$$|R_n| < 0{,}000000000000001.$$

Aplicando a desigualdade dada pela Fórmula de Taylor com resto de Lagrange:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{n!}(x-a)^n$$

Para o caso da função exponencial com $a = 0$ e $x = 1$, observamos que M é o máximo de $f^{(n+1)}(\xi) = e^{\xi}$ para $0 \leq \xi \leq 1$. Portanto, $M = e \leq 3$. Logo:

$$R_n(x) = \frac{3}{(n+1)!}$$

Portanto, devemos encontrar n tal que:

$$R_n(x) \leq \frac{3}{(n+1)!} < 0{,}000000000000001.$$

Dessa forma, os estudantes teriam que identificar o valor para n. Após investigações usado a planilha eletrônica (figura 04) para $R_n(x) = \frac{3}{(n+1)!}$, concluíram que o valor seria $n = 16$ satisfaria essa desigualdade.

Figura 04: Print da tabela 02 construída para identificar o valor do n desejado

	A	B
15	14	0,000000000011470745597729700000
16	15	0,000000000000764716373181982000
17	16	0,000000000000047794773323873900
18	17	0,000000000000002811457254345520

Fonte: Autores.

Observando na célula B18, há uma sequência de 14 zeros após a vírgula, isso nos indica que a soma das parcelas até $n = 16$ nos dará o valor procurado. Após essas discussões os estudantes passaram a desenvolver a atividade 02, descrita a seguir.

ATIVIDADE 2

Calcule o valor de e com precisão de 13 casas decimais. Em uma planilha eletrônica, considere as colunas A e B. Nessas colunas realize as seguintes operações:

1. Na coluna A, digite nas células A1, A2, respectivamente os valores 0 e 1. Selecione ambas células e arraste até a célula A18.
2. Digite $= 1/Fatorial(A1)$ na célula B1 e arraste até a célula B18.
3. Estando a coluna B selecionada, clique com o botão direito do mouse, clique na opção 'Formatar célula', siga com a opção 'Número', escolha a categoria 'Número', após 'casas decimais' e configure para 30 (máximo), e clique em 'ok'.

Obs.: *Observando na célula B18, há uma sequência de 14 zeros após a vírgula, isso nos indica que a soma das parcelas até $n = 16$ nos dará o valor procurado.*

4. Selecionamos as células de B1 até B17 (onde $n = 16$) e procedemos com a soma ($\sum$ AutoSoma). Na célula B18 figura o resultado que é uma aproximação do valor do número de Euler, dado por $e \cong 2{,}7182818284504$ com precisão de 13 casas decimais
   (a) Quais são os principais conceitos matemáticos enfocados?
   (b) Quais são, na sua opinião, os objetivos dessa atividade?

Fonte: Autores.

A atividade 2 envolveu a fórmula de Taylor que é representada por uma série de termos infinitos, para uma operação com termos finitos. Nesse sentido, as células B1, B2, B3, B4,..., B17 foram preenchidas respectivamente por $1, 1, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots, \frac{1}{16!}$, cuja soma apresentou uma aproximação para o número e com erro absoluto menor que $\frac{1}{17!}$. Após feitos todos os procedimentos indicados na atividade 02, concluímos a tabela 03, mostrada na figura 05. Na célula B18 aparece o resultado que é uma aproximação do valor do número de Euler, dado por $e \cong 2{,}7182818284590$ com precisão de 13 casas decimais.

Figura 05: Print da tabela 03 para o valor de aproximado de e

	A	B	C	D
11	10	0,00000027557319223985900000000		
12	11	0,00000002505210838544170000000		
13	12	0,00000000208767569878681000000		
14	13	0,00000000016059043836821600000		
15	14	0,00000000001147074559772970000		
16	15	0,00000000000076471637318198200		
17	16	0,00000000000004779477332387390		
18	17	2,71828182845904000000000000000		

Fonte: autores

Os estudantes foram questionados quanto aos principais conceitos matemáticos enfocados na construção da tabela. Eles citaram os conceitos de limites, derivadas e aplicações da Série de Taylor. As atividades foram realizadas em grupos de dois ou três integrantes e tiveram por objetivo chamar a atenção dos estudantes para com a utilização da história e da tecnologia pode auxiliar a torna-los construtores e (re)descobridores do próprio conhecimento. Na figura 06, apresentamos os grupos desenvolvendo a experiência "*A constante de Euler: um tratamento histórico e tecnológico*".

Figura 06 – Desenvolvimento da atividade

Fonte: Autores

Cabe destacar que nas duas primeira etapas, ocorreram algumas dificuldades: alguns estudantes não se sentiam à vontade para manipularem os computadores por não dominarem a planilha eletrônica e transferiam a responsabilidade de operar para os colegas de grupo; o tempo de execução das atividades foi discrepante entre alguns grupos, por uns dominarem melhor o programa do que outros. Nesse sentido, a situação foi propicia ao alinhamento da prática pedagógica ao trabalho em equipe/colaborativo (NÓVOA, 2009, 2017). Como ressalta Nóvoa (2009), a formação de professores deve valorizar o trabalho em equipe e a gestão dos vínculos com as pessoas é uma competência de crucial importância no desenvolvimento do trabalho com o outro. Nesse sentido, tais dificuldades oportunizaram aos colegas com maior domínio sobre a planilha eletrônica auxiliar os menos experientes na execução das atividades.

Terceira etapa: aplicações da constante de Euler

Stewart (2016) e Hoffmann (2015) afirmam que a constante de Euler ocorre em diversos campo das ciências, em situações em que a taxa de variação (crescimento ou decrescimento) de uma grandeza, num determinado período, é proporcional ao valor da própria grandeza nesse tempo. Escrevendo x' para a taxa de variação da grandeza x, função do tempo t, tais situações podem ser descritas pela equação diferencial

$$x' = kx$$

para alguma constante real k. A solução geral dessa equação diferencial é dada por:

$$x(t) = x_0 e^{kt}$$

em que x_0 é o valor inicial no instante $t = 0$.

Nesta etapa da experiência, analisamos e exemplificamos a aplicação do número e em problemas de juros compostos, de crescimento e decrescimento populacional, decaimento radioativo, concentração de medicamentos no organismo, dentre outras. Também destacamos a aplicação desse importante número para investigações dentro da própria matemática, destacando, os logaritmos naturais e as curvas formadas por cabos em suspensão. Por exemplo, sobre o problema do fio suspenso (representado na Figura 07), Maor (2003) destaca que:

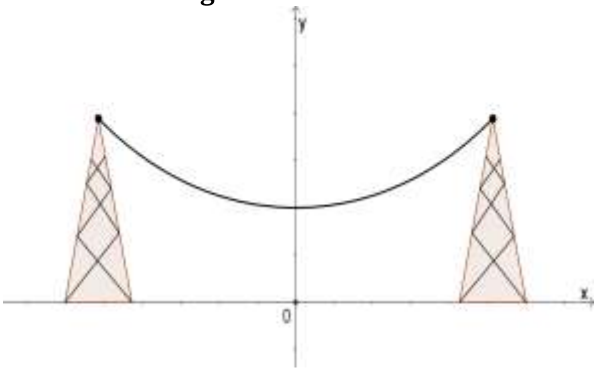
> Entre os notáveis problemas que ocuparam a comunidade matemática, nas décadas que seguiram à invenção do cálculo, estava o problema da *catenária* – a corrente suspensa (do latim *catena*, uma corrente). Este problema, [...] foi proposto inicialmente por um dos irmãos *Bernoullis*, [...] Jakob. [...] Jakob escreveu: 'E agora vamos propor este problema: encontrar a curva formada por fio pendente, livremente suspenso a partir de dois pontos fixos'. Jakob presumiu que o fio é flexível em todas as suas partes e que tem uma espessura constante (e portanto uma densidade linear uniforme) (MAOR, 2003, p. 183).

Maor (2003) ainda afirma que Galileu, em seus estudos, imaginara que a curva seria uma parábola. O holandês Christian Huygens (1629-1695) provou que a catenária não podia ser uma parábola, porém, naquele momento, não conseguiu encontrar uma expressão algébrica para a curva. Depois de um ano da proposição do problema, Huygens, Leibniz e Johann Bernoulli, chegaram à solução, abordando o problema de maneira diferente. A catenária manifestou-se por uma curva cuja equação é dada por:

$$y = \frac{(e^{ax} + e^{-ax})}{2a}$$

em que a é uma constante que depende dos parâmetros físicos do fio (sua densidade linear e a tensão).

Figura 07: Catenária



Fonte: adaptado de Flemming e Gonçalves (1992, p. 55).

Outras dificuldades verificadas durante o desenvolvimento das atividades com os estudantes estiveram relacionadas com a compreensão das aplicações práticas do tópico estudado. A lousa móvel proporcionou o dinamismo de percorrer o ambiente e aproximar as anotações dos estudantes que apresentavam dúvidas. Como verificação da aprendizagem, foi proposta uma lista de atividades envolvendo o conteúdo, em que o debate sobre os erros conduziu ao melhor entendimento. As dificuldades foram superadas com discussões coletivas de exemplos de situações problema em alguns campos das ciências.

Breve discussão sobre o desenvolvimento das atividades

Durante o desenvolvimento das atividades, os estudantes registraram os procedimentos adotados, as dificuldades encontradas, as conjecturas, observações, etc., para, ao final, fazerem um relatório estruturado sobre o trabalho desenvolvido. No excerto transcrito a seguir, apresenta-se parte do relatório de um dos estudantes participantes, em que ele pontua as contribuições das atividades desenvolvidas.

> *Eu vejo muito mais vantagens do que desvantagem em relação ao uso da História da Matemática em conexão com recursos tecnológicos. Enxergo a história como uma abordagem essencial para entender como surgiu as teorias, como os conceitos matemáticos foram criados. Também, é uma ótima forma de motivação, vê e admirar a genialidade dos matemáticos que viveram em uma época totalmente desprovida de tecnologia e conseguiram tantas façanhas.*
> *A história me deixa mais curioso e com mais vontade de aprender enquanto o método expositivo com os recursos convencionais não são tão atraentes. O método tradicional é mais cansativo e trabalhoso já que não tenho os benefícios das tecnologias ao meu favor.*
> *Portanto, com a História da Matemática, o estudo pode se tornar mais instigador e atraente, a matemática pode passar a ser vista como ela realmente é, uma ciência fascinante e não um bicho de sete cabeças.*
>
> (Relatório, estudante A)

Muitos estudantes ficaram entusiasmados com o resultado e, dentre vários comentários positivos, destaca-se: *“Agora sim, fez sentido o uso desse número* e *, que tanto já havia usado e nem sabia o real significado”.* Essa proposta apresentou um posicionamento explícito acerca de uma relação específica entre a história da matemática e o uso de tecnologias digitais. Houve clara preocupação em romper com a maneira usual de apresentação da constante de Euler. A proposta busca na história da matemática e no uso de tecnologias, os elementos orientadores para a construção do conhecimento. As ideias desta proposta se sustentam nas proposições de Roque e Giraldo (2014):

> Para nós, a história da matemática e a tecnologia não são disciplinas específicas, que abordam ferramentas de ensino ou conteúdos que não são matemáticos, apesar de poderem ser aplicados à matemática. Tanto em um caso quanto no outro trata-se de enfatizar e desenvolver aspectos sobre o próprio conteúdo que não são trabalhados normalmente com os licenciandos. No caso da história, não basta fornecer um contexto, de caráter muitas vezes anedótico, para "motivar" ou "despertar o interesse" dos estudantes. É preciso que se perceba que o conhecimento da gênese de um conceito, bem como das suas transformações, pode ajudar a entender a própria definição que temos hoje deste conceito, cujo caráter formal, apresentado de modo isolado, não é compreendido pelos estudantes e futuros professores. [...]. O conhecimento histórico por parte do professor permite recontextualizar as ideias matemáticas no ambiente problemático de sua gênese, reconhecendo e situando os aspectos epistemológicos que emergem no processo de ensino-aprendizagem. O uso de tecnologias computacionais pode se articular, na prática de sala de aula, a essa forma de ver a matemática. Como a literatura de pesquisa tem reconhecido, ambientes computacionais possibilitam o estabelecimento de novas formas de aprender, oferecendo acesso a sutilezas dos conceitos matemáticos que permaneceriam ocultas de outras formas, renovando os próprios objetivos de aprendizagem (ROQUE; GIRALDO, 2014, p. 33-34).

Alinhados com essas ideias, procuramos promover um ambiente propício para os estudos desenvolvidos, respaldando as atividades a partir da investigação de um problema financeiro histórico. Maor (2003) esclarece:

> Parece provável, no entanto, que suas origens recuem até o início do século XVII, por volta da época em que Napier inventou os logaritmos... Aquele período foi marcado por um enorme crescimento do comércio internacional e as transações financeiras de todos os tipos proliferaram. Em consequência, um bocado de atenção foi dada à lei dos juros compostos, e é possível que o número e tenha sido reconhecido pela primeira vez nesse contexto (MAOR, 2003, p. 38).

A história pode ser uma fonte de busca de compreensão e de significados para o ensino da matemática escolar na atualidade. Meserve (1980, p. 398 apud MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 45) afirma que "a história da matemática aparece como um elemento potencial para subsidiar a compreensão de certos tópicos matemáticos por parte do estudante, tópicos que lhe deveriam ser ensinados a partir de técnicas de resolução de problemas". Roque e Giraldo (2014) ainda reforçam:

> Ambos os elementos, históricos e tecnológicos, contribuem, para a recuperação do que designamos como "ambiente problemático" para o ensino dos conceitos matemáticos. Tornar a matemática mais concreta, para nós, é oferecer a experiência com a própria atividade matemática, restaurando os problemas que podem dar um sentido às ideias envolvidas neste fazer (ROQUE; GIRALDO, 2014, p. 34).

Podemos perceber nos momentos experienciados em sala, que elementos da História e das Tecnologias, realmente favoreceram a construção do conhecimento sobre a constante de Euler. Apesar dos estudantes terem contato com o número de Euler em componentes curriculares já cursadas, seus relatos indicam que a abordagem adotada na experiência propiciou a produção de novos sentidos.

No intuito de avaliar os procedimentos foi aplicado um questionário. Uma das questões indagava sobre vantagens e desvantagens da relação entre história e tecnologia no desenvolvimento das atividades. Alguns estudantes relataram uma melhor compreensão sobre a constante de Euler, pelo fato de se utilizar o contexto histórico do surgimento do número, despertando curiosidade e prazer em participar das etapas das atividades em sala de aula. Todos relataram apenas vantagens no uso do contexto histórico. Entretanto, em relação ao uso de recursos digitais, alguns alegaram desvantagens, em geral relacionados ao suposto atrofiamento do raciocínio matemático operacional, como verificamos nas transcrições a seguir:

> *As vantagens de usar a história da matemática juntamente com os recursos tecnológicos é compreender mais facilmente os conteúdos e saber a origem dos termos usados, podendo contextualizar com atividades práticas do dia-a-dia e as desvantagens é que muitas vezes o estudante realizam os cálculo no computador e as vezes não se esforça para aprender, pois sabe que a máquina oferece resultados exatos e mais precisos* (Estudante B).

> *O uso da História da Matemática e dos recursos tecnológicos facilitam na compreensão do conteúdo abordado e também na fixação do mesmo, tornam as aulas lúdicas e participativas; a abordagem expositiva sem o uso do computador, por sua vez, fazem com que os estudantes se familiarizem com fórmulas e demonstrações, logo só vejo vantagens com o uso dos dois métodos, toda via eles devem facilitar o aprendizado quando usados em conjunto* (Estudante C).

> *Quando se utiliza do método convencional, geralmente o assunto é apresentado sem um contexto próprio, o que acaba deixando-o sem significado, sendo então esquecido com maior velocidade já que não será utilizado.*
> *A partir do momento em que se utiliza da história matemática, juntamente com recursos tecnológicos, além de aprender o motivo de tal conhecimento ter sido criado, os recursos tecnológicos tornam o processo mais dinâmico e menos cansativo* (Estudante D).

Contudo, conforme podemos perceber nas opiniões dos principais sujeitos da educação – ou seja, os estudantes – o uso da história da matemática em conexão com tecnologias digitais pode propiciar benefícios quando feito de forma coerente, com prévio planejamento e objetivos bem traçados. Assim, o ensino de matemática pode se potencializar com aulas mais dinâmicas, reorientando-se a abordagem de procedimentos mecânicos para a produção de sentidos.

Sobretudo, fazer os licenciandos perceberem as potencialidades do uso da história da matemática em inter-relação com tecnologias digitais pode ser de grande relevância para suas futuras práticas. Com investigações conduzidas dessa forma, em lugar de simplesmente receber fatos e reproduzir procedimentos, o estudante essencialmente *faz* matemática, testando proposições e explorando conjecturas – de forma mais próxima às práticas dos próprios matemáticos profissionais. Assim, eles pensam matematicamente e aguçam a sua criatividade. Desta forma, atividades que articulam história e tecnologia podem ser promissoras para se fazer investigações matemáticas em sala de aula, além de favorecer a formação inicial do futuro professor de matemática.

Considerações finais

A análise deste trabalho remete à importância atribuída ao uso da história da matemática em conexão com tecnologias digitais como metodologia que favoreça a aprendizagem no estudo de tópicos da matemática, no caso, especificamente a constante de Euler.

A matemática, como sabemos, é uma disciplina muitas vezes indesejada por estudantes, que a caracterizam como abstrata demais para ser associada a atividades práticas, para possibilitar o uso de material concreto, ou ainda a consideram como um amontoado de fórmulas que serão decoradas e logo esquecidas. Sabemos também que o ensino baseado na repetição exaustiva tem contribuído para que afirmações desse tipo se perpetuem em nossas salas de aulas, como se fossem verdades inquestionáveis.

Verificando os resultados alcançados em nossa experiência "*A constante de Euler: um tratamento histórico e tecnológico*", acreditamos que, a maioria dos 15 estudantes participantes passou a perceber a matemática como resultado de investigações do próprio homem, compreendeu melhor as necessidades que impulsionaram a sistematização e a formalização da constante de Euler. Com o desenvolvimento das atividades investigativas via história da matemática em conexão com recursos digitais durante as aulas de Cálculo II, puderam notar que a referida disciplina se constitui num campo aberto de amplas possibilidades metodológicas de aprendizado.

As dificuldades dos estudantes que surgiam, como manipulação do recurso digital (planilha eletrônica) e operações matemáticas dos algoritmos, eram logo solucionadas com ajuda dos próprios colegas ou do professor, em virtude de a investigação em sala de aula proporcionar maiores possibilidades de obtenção de respostas, sendo elas certas ou erradas. A exploração da história da matemática e o uso de planilhas eletrônicas permitiram aos estudantes sentirem-se mais próximos da produção de saberes em matemática e desafiados a experimentar e a encontrar no "erro" uma forma de acertar.

No desenvolvimento da experiência, foi possível perceber que a história da matemática como fio condutor para investigações em sala de aula pode despertar maior interesse dos estudantes no processo aprendizagem, pode instigar sua curiosidade na exploração das atividades; e que o uso de tecnologias digitais possibilita o estabelecimento de novas formas de aprender, renovando os próprios objetivos de aprendizagem. A articulação desses elementos – história e tecnologia – pode criar um ambiente de aprendizagem que torna a matemática mais concreta, resgatando problemas que dão sentido à ideias que sistematizaram e formalizaram a matemática contemporânea, propiciando experiências com a própria atividade matemática, conduzindo os discentes a aprendizados significativos.

Referências

BATISTA JÚNIOR, R. I. **Matemática financeira contextualizada em sistemas de amortização e impostos de renda**. 2014. 63 p. Dissertação - (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação a Distância. **Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico/Organização**: Carmem Lúcia Prata, Anna Christina A. de Azevedo Nascimento. – Brasília: MEC, SEED, 2007. Disponível em: <http://rived.mec.gov.br/artigos/livro.pdf >. Acesso em 28 de junho de 2019.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. Cálculo A: funções, limite, derivadas, integral. 5 ed. São Paulo: Pearson Makron, 1992.

GIRALDO, V. A.; CAETANO, P.; MATTOS, F.; **Recursos Computacionais no ensino de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

HOFFMANN, L.D. **Cálculo**: um curso moderno e suas aplicações. Tradução: Ronaldo Sérgio de Biasi. 11 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

LARA, I.C.M. A história da matemática como recurso pedagógico: percepções de estudantes da educação básica. **REnCiMa**, v.7, n.2, p. 1-12, 2016.

MAOR, E. **e:** A História de Um Número. 5º Ed. Rio de Janeiro: Record, 2003.

MORAIS, A. R; SAFADI, T. **Cálculo Numérico**. Lavras: UFLA/FAEPE, 2000.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na educação matemática**: Propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

NERI, C.; CABRAL. M. **Curso de Análise Real**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2009.

NÓVOA, A. Para uma formação de professores construída dentro da profissão. Revista Educación, n. 350, set- dez, 2009. Disponível em:

http://www.revistaeducacion.educacion.es/re350/re35009por.pdf. Acesso em 20/05/2019.

NÓVOA, A. Firmar a posição como professor, afirmar a profissão docente. **Cadernos de Pesquisa,** v.47 n.166 p.1106-1133 out./dez. 2017.

REZENDE, W. M. Funções reais: uma contribuição da História do Cálculo e das Novas Tecnologias para o Saber Pedagógico de Conteúdo. In: ROQUE, T.M; GIRALDO, V.A.(orgs.) **O saber do professor de Matemática:** Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2014, p. 79-106.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ROQUE, T.; GIRALDO, V. História e Tecnologia na construção de um ambiente problemático para o ensino de matemática. In: ROQUE, T.; GIRALDO, V.(orgs.) **O saber do professor de Matemática:** Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2014, p. 09-37.

SILVA, D. J. **A utilização da História da Matemática em Atividades Investigativas: estudo de áreas de regiões planas regulares e irregulares**. Dissertação (mestrado profissional em matemática). Profmat. Universidade Estadual do sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2016.

SILVA, D. J.; SILVA, M. D. F.; OLIVEIRA, S. A. Atividades Investigativas para conhecer a História da Matemática e estudar áreas de regiões planas regulares e irregulares. **Revista NUPEM.** Campo Mourão, v.8, n.15, jul./dez. p.49-64, 2016

STEWART, I. **O fantástico mundo dos números:** a matemática do zero ao infinito. 1º Ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2016.

TENÓRIO, A; CARVALHO, C.I.S.; TENÓRIO, T. Ensino de triângulos com o software geogebra. **REnCiMa**, v. 7, n. 1, p. 1-18, 2016.

VALENTE, J. A**.** Informática na Educação no Brasil: Análise e Contextualização Histórica. In: VALENTE, J. A (Org.)**. O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas, SP: UNICAMP/NIED, 1999.

Recebido em: 26 de agosto de 2018
Aprovado em: 12 de julho de 2019