Les Grandeurs et Les Mesures: un Problème de la Profession D'enseignant Des Mathématiques

Quantities and Measures: a Professional Problem of Mathematics Teachers

Nathalie Anwandter Cuellar

Université du Québec en Outaouais. France
E-mail: nathalie.anwandter@uqo.ca
Sujet en: juin. - 2016; accepti en: mars. - 2017

Résumé

Dans cet article, nous nous intéressons aux indices d'un problème de la profession inhérent aux mathématiques à enseigner et aux mathématiques pour l'enseignement relatives aux grandeurs et mesures au collège en France. Il s'agit de montrer comment l'incorporation de l'étude des grandeurs et mesures en tant que domaine dans le nouveau programme demande la construction de nouvelles organisations mathématiques permettant de la faire, ainsi que l'articulation entre les anciens et nouveaux savoirs, ce que nous présentons comme une difficulté révélatrice d'un problème de la profession.

Mots-clés: Collège Français. Grandeurs et Mesures; théorie anthropologique du didactique; problème de la profession.

Abstract

In this article, we discuss professional problems inherent to the mathematics to be taught and to the mathematics for teaching quantities and measures in junior high school in France. We show how incorporating the study of quantities and measures, as a new domain of the program, requires the construction of new mathematical framework as well as the coordination between the old and the new knowledge. This transformation denotes a noteworthy difficulty revealing a professional problem.

Keywords*: junior high school, quantities and measures, Anthropological Theory of Didactic, Problem of the profession.*

1 Introduction

Cet article est en lien avec notre recherche doctorale relative à l'enseignement des grandeurs et mesures au collège (secondaire) en France[1] (Auteur, année). Elle prend appui pour une grande partie sur la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999; 2002). Ce travail se situe quelques années après la mise en place d'un nouveau programme au collège où les grandeurs et les mesures apparaissent comme l'un des principaux objets d'enseignement. En effet, les programmes scolaires du collège en France ont suivi différents changements relatifs à l'enseignement des grandeurs et mesures. En 1970, on observe une rupture entre le numérique et les grandeurs, ce qui semble avoir réduit leur place dans les différents domaines. Quelques années après, on retrouve le retour des grandeurs et mesures dans les programmes de 1995. Cette présence devient plus insistante quand ces documents institutionnels leur donnent le statut de domaine en 2005 (Ministère de l'Éducation nationale, 2008) et proposent une théorie mathématique pour leur étude (D.G.E.S.C.O., 2007).

Suite à ces changements, nous avons décidé d'étudier, à l'aide des niveaux de codétermination (Chevallard, 2002), les nouvelles conditions et contraintes qui s'imposent aux pratiques singulières pour formuler des problèmes de la profession d'enseignant de mathématiques. Ce point de vue est avancé par Chevallard dans son texte (2006):

Toute difficulté surgissant lorsqu'une personne tente d'exercer le métier de professeur doit être regardée comme exprimant d'une certaine manière un ou plusieurs problèmes de la profession – problèmes qui n'assaillent pas cette personne en particulier, mais bien la profession de professeur (de mathématiques, etc.). (Chevallard, 2006, p.3)

Dans cet article, nous abordons, premièrement, la définition de l'échelle de niveaux de codétermination didactique (Chevallard, 2002). Deuxièmement, nous présenterons la méthodologie de notre recherche. Troisièmement, nous essayons de clarifier ce qu'on comprend par grandeur et mesure dans les mathématiques à travers l'histoire et dans l'enseignement français. Finalement, des résultats concernant les conditions et contraintes liées à l'enseignement de ces dernières sont discutées à l'aide des exemples d'analyse des documents institutionnels ainsi que des pratiques d'enseignement qui nous servent à énoncer des indices d'un problème de la profession inhérent aux mathématiques à enseigner (celles que le programme prescrit) et aux mathématiques pour l'enseignement (celles que l'enseignant

1 La fourchette d'âge est, généralement, de 11-12 ans (début 6^e) à 14-15 ans (fin de 3^e). Ainsi, le niveau collège correspond, généralement, au niveau secondaire dans d'autres pays.

doit connaitre pour concevoir et réaliser ses enseignements) (Cirade, 2008) relatives aux grandeurs au collège en France.

2 L'échelle de Niveaux de Codétermination Didactique

Dans la théorie anthropologique (Chevallard, 1999), une praxéologie est un quadruplet T, τ, θ, Θ : T désigne un type de tâches (formé d'un ensemble de tâches spécifiques) ; τ désignant une technique que l'on peut mettre en œuvre pour traiter des tâches appartenant à T, θ une technologie, c'est-à-dire, un discours qui justifie la technique. Enfin, Θ désigne une théorie qui peut servir à justifier le discours technologique. Ce type de structure, appelée praxéologie ponctuelle, est rencontré rarement de manière isolée. Effectivement, une organisation mathématique ne se réalise pas dans un vide d'œuvres (Chevallard, 2002). Pour modéliser le questionnement de l'existence de praxéologies, Chevallard élargit le cadre en intégrant ce qu'il appelle les niveaux de codétermination didactique (Chevallard, 2002). À l'intérieur de la discipline des mathématiques, à chaque praxéologie mathématique ponctuelle lui correspond un sujet d'étude relatif au type de tâches dans l'enseignement. Ce type de tâches fait partie des tâches prescrites dans un thème d'étude, auquel lui correspond une praxéologie mathématique locale formée des organisations mathématiques ponctuelles ayant même technologie. Cette organisation mathématique est à la fois partie d'une organisation mathématique régionale, un secteur d'étude, qui est l'amalgamation des organisations locales ayant la même théorie. On trouve comme dernier niveau une organisation mathématique globale relative à un domaine d'étude. Les domaines se regroupent autour d'une discipline, dans ce cas, les mathématiques. Aux niveaux supérieurs, on rencontrera les échelons de la Pédagogie, de l'École, de la Société et de la Civilisation. Si on prend l'exemple sur les changements d'unités de volume:

Tableau 1 - Contenus de la classe de 5e dans le domaine « Grandeurs et mesures» en 2005.

Connaissances	Capacités	Commentaires
Volume. Prisme et cylindre de révolution	- Calculer le volume d'un parallélépipède rectangle. - Calculer le volume d'un prisme droit, d'un cylindre de révolution. - Effectuer pour des volumes des changements d'unités de mesure.	On travaillera les changements d'unités de volume dans des situations de la vie courante.

Source: Programmes du collège, Ministère de l'éducation nationale, 2008.

Et après une analyse des organisations mathématiques, nous avons structuré ce contenu du programme de 2005 de la manière suivante :

Tableau 2 - Exemple de structuration en niveaux de codétermination.

Discipline	Niveau 1	Mathématiques
Domaine	Niveau 2	Grandeurs et mesures
Secteur	Niveau 3	Volume
Thème	Niveau 4	Changements d'unités
Sujet d'études	Niveau 5	Effectuer pour les volumes des changements d'unités

Source: Élaboré par l'auteur

Tel qui le mentionne Chevallard (2002), cette échelle est un outil efficace pour analyser ce qui est enseigné, ce qui ne peut pas être enseigné et ce qui pourrait être enseigné dans les classes:

> La reconnaissance de la hiérarchie de niveaux ainsi ébauchée, qui va des sujets d'études à la discipline en passant par thèmes, secteurs et domaines, a pour principal mérite de permettre un premier tri dans les paquets de contraintes présidant à l'étude scolaire, en évitant un déséquilibre trop flagrant entre ce qui, de ces contraintes, sera pris en compte et ce qui sera laissé pour compte. (Chevallard, 2002, p.2)

La méthodologie utilisée pour l'étude des pratiques vise à repérer, décrire et analyser la présence de grandeurs aux niveaux des mathématiques, des programmes scolaires et de l'enseignement pour ainsi permettre de reconnaître et de caractériser les conditions et contraintes relatives à l'enseignement des grandeurs en vue de formuler des problèmes de la profession.

a) Étude épistémologique et mathématique

Dans un premier temps, une analyse épistémologique des savoirs mathématiques relativement aux grandeurs nous a permis d'éclaircir des choix institutionnels et leurs effets sur l'enseignement. Cette étude nous a servi à dégager les grandes lignes d'évolution.

b) Étude institutionnelle

Une analyse des programmes, manuels scolaires et de documents institutionnels actuels dans le cadre de la transposition didactique (Chevallard, 1985) nous a permis de dégager des aspects importants du rapport institutionnel aux objets en jeu. Cette étude a eu pour principal objectif de mettre en évidence les choix de transposition faits par la noosphère lors de la création d'un domaine « Grandeurs et mesures » au collège en 2005 afin de décrire et d'analyser le rapport institutionnel actuel aux grandeurs. Dans ce sens, une étude de programmes de la période entre 1995 et 2005 permet d'envisager d'autres choix possibles pour un enseignement de grandeurs s'inscrivant dans un système de contraintes institutionnelles différent du système actuel. Ainsi, nous avons considéré deux périodes : 1995-2005 et 2005-…, et nous avons inclus l'analyse des documents ressources (1995-2005) ou des documents d'accompagnement (2005-…) proposés par le ministère de l'éducation nationale.

c) Étude des pratiques

Nous avons décidé d'étudier les pratiques d'enseignement au secondaire tout en tenant compte de la difficulté à comprendre la complexité et la diversité des pratiques effectives (Coulange, 2013). Dans cette perspective, l'orientation qualitative-interprétative nous a paru la plus appropriée. En effet, cette perspective est fondée sur le principe que les faits sociaux ou humains conduisent à donner du sens à des phénomènes d'une grande complexité (Karsenti et Savoie-Zajc, 2004). Parmi les différentes approches méthodologiques (Roy, 2003) qui s'accordent avec ce type de recherche, nous avons privilégié l'étude de cas (Merriam, 1998; Roy, 2003) en réalisant des observations directes dans les classes de trois enseignants du secondaire (deux classes de 6e pour l'enseignant 1, une classe de 6e et une classe de 5e pour l'enseignant 2 et une classe de 4e pour l'enseignant 3), des entretiens individuels avec ces professeurs et le recueil des progressions des enseignantes ainsi que des productions écrites de quelques élèves.

3 Méthodologie

La méthodologie utilisée pour l'étude des pratiques vise à repérer, décrire et analyser la présence de grandeurs aux niveaux des mathématiques, des programmes scolaires et de l'enseignement pour ainsi permettre de reconnaître et de caractériser les conditions et contraintes relatives à l'enseignement des grandeurs en vue de formuler des problèmes de la profession.

a) Étude épistémologique et mathématique

Dans un premier temps, une analyse épistémologique des savoirs mathématiques relativement aux grandeurs nous a permis d'éclaircir des choix institutionnels et leurs effets sur l'enseignement. Cette étude nous a servi à dégager les grandes lignes d'évolution.

b) Étude institutionnelle

Une analyse des programmes, manuels scolaires et de documents institutionnels actuels dans le cadre de la transposition didactique (Chevallard, 1985) nous a permis de dégager des aspects importants du rapport institutionnel aux objets en jeu. Cette étude a eu pour principal objectif de mettre en évidence les choix de transposition faits par la noosphère lors de la création d'un domaine « Grandeurs et mesures » au collège en 2005 afin de décrire et d'analyser le rapport institutionnel actuel aux grandeurs. Dans ce sens, une étude de programmes de la période entre 1995 et 2005 permet d'envisager d'autres choix possibles pour un enseignement de grandeurs s'inscrivant dans un système de contraintes institutionnelles différent du système actuel. Ainsi, nous avons considéré deux périodes : 1995-2005 et 2005-…, et nous avons inclus l'analyse des documents ressources (1995-2005) ou des documents d'accompagnement (2005-…) proposés par le ministère de l'éducation nationale.

c) Étude des pratiques

Nous avons décidé d'étudier les pratiques d'enseignement au secondaire tout en tenant compte de la difficulté à comprendre la complexité et la diversité des pratiques effectives (Coulange, 2013). Dans cette perspective, l'orientation qualitative-interprétative nous a paru la plus appropriée. En effet, cette perspective est fondée sur le principe que les faits sociaux ou humains conduisent à donner du sens à des phénomènes d'une grande complexité (Karsenti et Savoie-Zajc, 2004). Parmi les différentes approches méthodologiques (Roy, 2003) qui s'accordent avec ce type de recherche, nous avons privilégié l'étude de cas (Merriam, 1998; Roy, 2003) en réalisant des observations directes dans les classes de trois enseignants du secondaire (deux classes de 6^e pour l'enseignant 1, une classe de 6^e et une classe de 5^e pour l'enseignant 2 et une classe de 4^e pour l'enseignant 3), des entretiens individuels avec ces professeurs et le recueil des progressions des enseignantes ainsi que des productions écrites de quelques élèves.

4 « Une Définition » Pour Les Grandeurs et Les Mesures

La « définition » de la grandeur dans l'enseignement est une tâche difficile à accomplir. Une première idée des grandeurs est de les considérer comme tout ce qui peut être augmenté ou diminué, comme la durée d'un match de tennis, la vitesse d'un cycliste, le nombre de marches d'un escalier, etc. Mais on appellera grandeurs mathématiques celles pour lesquelles on peut définir l'égalité et la somme, par exemple les aires, les volumes, les angles, la température, etc.

D'un point de vue mathématique plus rigoureux, le concept de grandeur reste flou dans l'enseignement, mais aussi dans les savoirs formels à travers l'histoire. Dans l'antiquité, l'école pythagoricienne ne faisait pas la différence entre le domaine géométrique et le domaine physique. L'idée de grandeur chez le pythagoricien et au Moyen âge avait une connotation conceptuelle associée à des valeurs numériques : « les nombres devaient expliquer le monde ». Ainsi les mathématiques et la physique dans la doctrine pythagoricienne sont complètement fondées sur les nombres, spécifiquement les nombres naturels. Les pythagoriciens considèrent que deux grandeurs sont toujours commensurables, c'est-à-dire, que l'on peut trouver une unité commune pour les mesurer, mais cette loi ne s'applique pas à la diagonale d'un carré et d'un de ses côtés. Dans la recherche de la solution à ce problème, un changement de la pensée va se produire, les rapports des grandeurs ne sont pas toujours donnés par des naturels, on assiste à la séparation de l'arithmétique et de la géométrie (Bronner, 1997).

Après quelques décennies, dans les Éléments d'Euclide (vers 300 avant J.-C), on trouve une géométrie fondée sur les grandeurs. Cet ouvrage donne un traitement aux grandeurs continues, en donnant une solution au problème de l'incommensurabilité, il s'appuie sur les nombres entiers. Mais Euclide ne définit pas la notion de grandeur, il décrit une théorie des grandeurs qui ne dépend pas du genre particulier des grandeurs considérées, cette théorie, attribuée à Eudoxe, traite aussi des rapports des grandeurs, il s'agit de fonder un calcul sur les rapports de grandeurs, mais calcul dans un sens différent de nos jours (Rouche, 1992).

Il y aura un important changement au XVI^{e} siècle au niveau du concept de nombre. On assistera à un processus ininterrompu de rupture entre les quantités continues et discrètes, qui culmine à la fin du XIX^{e} siècle avec la construction des nombres réels de Dedekind. Les travaux de Simon Stevin (1548-1620) ont contribué à la réalisation d'une telle transformation. En se plaçant dans un cadre purement numérique, il réussit à donner au concept de nombre un fondement théorique. Il essaie de détacher le concept de nombre du concept de grandeur : « Nombre est cela, par lequel s'explique la quantité de chacune chose » (Stevin cité par Bronner, 1997, p. 42). Mais, si avec Stevin le concept de nombre irrationnel n'a désormais plus besoin des grandeurs (lequel est considéré comme un véritable nombre), sa théorie d'arithmétisation des grandeurs ne pourra pas échapper à la mesure des grandeurs. Plus tard, René Descartes en collaboration avec Pierre Fermat (1601-1665), il a mis au point la méthode des coordonnées qui permet d'effectuer facilement des démonstrations de géométrie. Par le choix d'une unité de longueur, il identifie la demi-droite avec l'ensemble des nombres réels positifs, ce qui n'avait pas été fait par les Grecs. Descartes met ainsi en relation les grandeurs et les nombres.

Depuis la fin du XIX^{e} siècle, on assiste, dans l'histoire des mathématiques, à un renouvèlement de la pensée mathématique. On voit dans cette discipline le modèle de toute connaissance scientifique qui s'appuie sur l'étude des structures et sur le langage mathématique formel. L'arithmétisation des nombres réels, et par voie de conséquence la séparation complète des grandeurs et des nombres, se produiront avec les constructions mathématiques faites par Weierstrass (1872) avec la méthode des agrégats, Cantor (1872) avec les suites fondamentales et Dedekind (1872 et 1888) avec les coupures de nombres réels. Ainsi, avec ce courant formaliste, les grandeurs disparaissent des mathématiques, elles ont été envoyées au domaine de la physique et les constructions mathématiques des nombres réels vont s'appuyer sur l'ensemble des entiers naturels ou sur le corps de nombres rationnels. Ce changement de paradigme aura des répercussions importantes dans l'enseignement un siècle après. Les grandeurs seront ainsi écartées du programme des mathématiques français durant la réforme des mathématiques modernes de 1970.

Somme toute, il n'existe pas une définition stabilisée des grandeurs en mathématiques, mais plutôt plusieurs approches théoriques de cette notion. À ce sujet, Chambris signale dans sa thèse :

> […] comme les grandeurs n'ont pas été formalisées au moment de la formalisation des mathématiques, les définitions relatives aux grandeurs ne sont pas fixées. Il n'existe pas de définition mathématique standard (ou commune) pour « grandeur » comme il en existe une pour « espace vectoriel », les axiomes retenus pour définir une « grandeur », voire certaines des propriétés qui en découlent, peuvent donc varier d'une définition à l'autre. Peut-être ces idées sont-elles aussi symptomatiques de différentes épistémologies des mathématiques (Chambris, 2008, p. 126).

Ce fait pose le problème des choix d'une approche adéquate à l'enseignement. Aujourd'hui, dans l'enseignement français (Ministère de l'Éducation nationale, 2008), on trouve le retour des grandeurs et mesures en tant que domaine d'étude au même niveau que la géométrie, les fonctions et le numérique et un document ressource, « Grandeurs et mesures au collège » (D.G.E.S.C.O., 2007), présentant une théorie pour leur enseignement. Il est ainsi important de définir ce qu'on comprend par « grandeur » au collège en France. Même s'il existe plusieurs recherches en didactique des mathématiques traitant la notion de grandeur et de mesure, nous avons fait le choix de présenter pour cet article, la définition retenue par le document ressource « Grandeurs et mesures au collège » (D.G.E.S.C.O., 2007) destiné aux enseignants. Selon cette publication, parmi les grandeurs géométriques, on trouve les angles, les longueurs, les aires, les volumes, mais on peut aussi étudier d'autres grandeurs tels que la distance, la masse, la vitesse. Pour enseigner les grandeurs au secondaire, on doit distinguer entre quatre notions mathématiques *: l'espèce de grandeur*, *l'objet, la grandeur et la mesure*. Par exemple, pour *l'espèce de grandeur* longueur, les *objets* peuvent être les segments. On a la possibilité de comparer les segments à l'aide de procédures comme la superposition. Dans ce cas, on dit que deux segments congruents par superposition ont même *longueur* (sans les mesurer). Si on choisit une unité de mesure, le nombre obtenu à travers la mesure de la longueur du segment est dénommé la *mesure*. Ensuite, on définit sur l'ensemble d'objets une relation de préordre totale et des opérations comme l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Les axiomes sont choisis de manière à correspondre au mieux aux objets physiques et aux opérations qui les concernent.

5 Les Grandeurs Vues à Travers Les Niveaux de Codétermination Didactique

Notre objectif était d'identifier les conditions et les contraintes qui pèsent sur le système didactique et notamment sur les choix des enseignants aux différents niveaux de l'échelle de codétermination didactique. Nous avons ainsi repéré dans le curriculum officiel des éléments qui nous permettent de décrire les niveaux société, pédagogie, discipline et domaine.

5.1 Le niveau société

Notre recherche (Auteur, 2012) montre que l'étude des grandeurs au collège en France est légitimée par l'obligation de la noosphère de répondre à des besoins socio-économiques et par l'évolution de pratiques sociales :

Les programmes actuels de l'école et du collège leur redonnent une place plus importante, alors que leur visibilité dans la vie sociale a beaucoup évolué : d'une part, la disparition de l'usage de certains instruments prive l'enseignement de référence à des pratiques sociales convoquant des grandeurs aussi fondamentales que les longueurs et les masses ; d'une autre part, deux faits aussi différents que l'obligation légale d'affichage des prix par kilogramme et l'emploi dans chaque secteur d'activité de grandeurs bien spécifiques mettent en évidence le besoin socio-économique de grandeurs composées plus complexes. (D.G.E.S.C.O., 2007, p.1)

En effet, à la suite de l'avancement des sciences et du désir de l'homme d'interroger le monde, aujourd'hui les modélisations des phénomènes de la réalité font appel à des grandeurs beaucoup plus complexes comme les vitesses, les grandeurs économiques, les grandeurs physiques, etc. La noosphère se voit dans la contrainte de donner aux élèves les outils pour comprendre ces représentations du monde. En conséquence, le désir d'enseigner les grandeurs répond à une première condition écologique de la transposition didactique (Chevallard, 1985), la compatibilité entre les mathématiques et l'environnement social.

5.2 Le niveau pédagogie

Un autre aspect qui contraint le programme à étudier les grandeurs est la nécessité de construire d'autres notions mathématiques d'une manière accessible aux élèves du point de vue cognitif. Les mathématiques au secondaire ne doivent pas être formelles, les connaissances sont tenues d'être proches de la réalité. Ainsi, la présence des grandeurs au secondaire se justifie par des raisons didactiques:

Aujourd'hui, la science mathématique s'est largement affranchie de la question des grandeurs (l'ensemble des nombres, par exemple, se construit, formellement, sans référence aucune aux grandeurs). Théoriquement, les mathématiques peuvent donc à la fois se transmettre et se développer sans référence à la notion de grandeur. Sans cette référence, la présentation des mathématiques serait toutefois beaucoup trop abstraite pour être à la portée des élèves du collège, et même bien au-delà. (C.N.D.P., 1999, p.20)

La fonction des grandeurs est de rendre plus faciles la compréhension et l'étude des mathématiques pour les élèves. Les raisons didactiques et épistémologiques d'un travail sur les grandeurs sont explicitées dans le même document :

S'il a été possible aux mathématiques de s'émanciper de la notion de grandeur, c'est sans doute qu'elles avaient accumulé quantité d'expériences et de résultats dont il ne semble pas que l'enseignement de base puisse faire l'économie. C'est dans des situations mettant en jeu des grandeurs que tous les élèves pourront réinvestir les connaissances acquises en mathématiques. Les mathématiques du citoyen sont celles qui interviennent comme outils pour les grandeurs, celles qui permettent de modéliser efficacement des situations faisant intervenir des grandeurs.

De cette manière, l'apparition des grandeurs dans les programmes semble retrouver sa justification dans des besoins didactiques et pédagogiques, car les grandeurs facilitent la construction cognitive des concepts mathématiques.

5.3 Le niveau discipline

Les grandeurs sont à l'origine de la construction des mathématiques, mais en raison de la recherche de la rigueur mathématique à partir de XIX^{e} siècle, les grandeurs perdent leur place privilégiée au sein de cette discipline. De plus, comme nous l'avons indiqué, il existe différentes théories mathématiques relativement à la notion de grandeur et à chaque espèce de grandeur (Chambris, 2008). Cela amène à s'interroger sur les savoirs de référence relatifs aux grandeurs dans l'enseignement actuel au secondaire. Le programme indique qu'on devrait étudier les mathématiques à partir des grandeurs, mais l'évolution des mathématiques savantes a renvoyé la définition et l'étude des grandeurs dans d'autres disciplines, alors, on se demande, tel que Chevallard et Bosch (2001) : « Qu'est-ce qu'au juste une grandeur ? ». Par rapport à cette nécessité, le programme propose une théorie pour les grandeurs dans le document ressource « Grandeurs et mesures au collège » (D.G.E.S.C.O., 2007), mais les enseignants ne sont pas contraints de l'utiliser, alors comment peuvent-ils s'approprier la notion de grandeur et les savoirs relatifs à chaque espèce de grandeur pour mettre en place un enseignement conforme au nouveau programme? Est-ce que la théorie et les nouveaux traitements indiqués pour les grandeurs sont les plus adéquats du point de vue de l'enseignement et de l'apprentissage?

5.4 Le niveau domaine

Les notions d'objet, de grandeur et de mesure

Le nouveau programme de 2005 définit les grandeurs comme un domaine, au même titre que la géométrie, le numérique et les fonctions. Or, avant cette année, elles se trouvent fragmentées en deux domaines le géométrique et le fonctionnel. Alors, les enseignants sont contraints de distinguer ces trois domaines et les notions associées. Par exemple, les documents institutionnels insistent sur le fait que l'apprentissage est favorisé par une différentiation de l'objet, la grandeur et la mesure. Effectivement, d'une part, le document d'accompagnement *Grandeurs et mesures* (D.G.E.S.C.O., 2007) signale qu'un « objet peut-être le support de plusieurs grandeurs d'espèces différentes ». D'autre part, il indique l'importance du passage par les grandeurs dans le chemin conduisant les objets aux mesures, car il est impossible « d'opérer directement sur les objets, et le recours aux grandeurs est nécessaire pour pouvoir définir les opérations qu'on ne peut pas faire sur les objets ». De plus, ce document présente une théorie de grandeurs en s'inspirant des travaux de Rouche (1992, 1994) et de Chevallard et Bosch (2002). Mais quelles sont les pratiques qui soutiennent un enseignement qui différencie ces trois notions? Quels sont les liens et les différences entre elles? Quelles sont les organisations mathématiques que les enseignants devraient mettre en place? Et comment le faire? En effet, les différences entre grandeurs, mesures et objets ne sont pas évidentes ni chez les élèves, ni chez les enseignants. En quoi diffèrent-ils réellement ? Brousseau et Brousseau affirment :

Chacun de ses objets appartient à des environnements (milieux) différents, ils suivent des règles différentes et seraient définissables par des situations différentes. Ils sont connus dans des institutions différentes qui les ont dénommés de manières diverses. Ils interviennent tous dans la conception et dans la pratique des mesures. (op. cit., p.83)

La place des unités dans l'enseignement

Un autre exemple est celui des unités. Pendant une longue période, elles étaient absentes des calculs, mais aujourd'hui les opérations mathématiques devraient être réalisées directement sur les unités. Par exemple, entre 1995 et 2005, c'est la proportionnalité qui supporte les changements d'unités. Ainsi, si on demande aux élèves de convertir 60 km/h à m/s, les élèves vont utiliser le coefficient de proportionnalité 5/18 (et vont donc multiplier 60 fois 5/18 en obtenant 50/3, ils pourront ajouter l'unité m/s à la fin de leurs calculs. À partir de 2005, les changements d'unités sont étudiés en lien avec chaque grandeur (longueurs, aires, volumes, etc.) dans le domaine « Grandeurs et mesures ». Le programme signale que c'est un traitement direct sur les grandeurs qui est nécessaire pour les conversions d'unités, par exemple, les calculs suivants sont précisés par le document ressource (2007) pour traiter notre tâche précédente :

Figure 1 - Traitements sur les unités proposées par le document ressource « Grandeurs et mesures ».

$$60\text{ km/h} = \frac{60\text{ km}}{1\text{ h}} = \frac{60\ 000\text{ m}}{3\ 600\text{ s}} = \frac{60000}{3600}\text{m/s} = \frac{100}{6}\text{m/s} \approx 16{,}67\text{ m/s}$$

Source : Document *Grandeurs et mesures au collège*, D.G.E.S.C.O., 2007.

L'un des obstacles le plus difficiles à franchir dans l'enseignement est celui des unités selon Chevallard et Bosch. Effectivement, actuellement, on trouve plusieurs techniques pour changer d'unités de mesure, mais la plupart éliminent les unités des calculs. D'après les auteurs, l'origine de ce problème viendrait du manque de technologies disponibles pour résoudre des situations concernant les unités chez les professeurs et en conséquence, chez les élèves (Chevallard & Bosch 2001).

Même si les documents officiels introduisent les unités, sont-elles intégrées dans les pratiques des enseignants ? Comme le signale Perrin-Glorian (2002), le retour des grandeurs et mesures en 1995 pose quelques problèmes aux enseignants, car la plupart ont fait leurs études à l'époque où les grandeurs étaient bannies de l'enseignement des mathématiques. Dans ces conditions, on peut avancer que la construction des organisations mathématiques par les enseignants serait en rupture avec le contrat institutionnel dégagé du programme de 2005.

Les analyses menées pendant notre thèse doctorale (Auteur, 2012) relativement aux programmes et aux pratiques a abordé les conséquences structurelles et fonctionnelles de la création d'un domaine « grandeurs et mesures » (Auteur, 2012; accepté) et de l'introduction de nouveaux traitements pour les ces dernières. Vu que l'existence d'un objet mathématique dans la noosphère ne garantit pas sa vie dans le système d'enseignement (Artaud, 2003), on peut avancer que la restructuration du programme et les nouveaux traitements pour les grandeurs ne seront pas nécessairement transplantés à la classe. Ceci est dû au fait qu'il ne suffit pas d'avoir des organisations mathématiques compatibles au corpus organisationnel de l'enseignement, il faut des organisations mathématiques qui répondent à des conditions didactiques déterminées pour qu'on puisse faire vivre les programmes dans les salles de classe. De plus, les savoirs mathématiques nécessaires pour un enseignement conforme aux directives institutionnelles se trouvent dans les documents ressources (ex. D.G.E.S.C.O., 2007), cependant ils n'ont pas un caractère obligatoire pour les enseignants.

6 Les Grandeurs Dans Les Classes

Comme nous l'avons vu, le nouveau programme (Ministère de l'éducation nationale, 2008) met l'accent sur la distinction entre grandeur, objet et mesure et sur l'importance de l'utilisation des unités. L'étude de l'aire en tant que grandeur revient à considérer l'aire d'une surface comme une propriété invariante pour certaines opérations, comme pour les isométries. Ainsi, nous avons étudié une relation d'équivalence « avoir même aire » sur un ensemble d'objets, les surfaces, comme propose Rouche (1992) dans sa théorie. Du point de vue numérique, on choisit une unité d'aire pour mesurer les aires des surfaces et ainsi calculer des aires à l'aide des formules (Moreira-Baltar, 1999). Dans cette même perspective, Zhou (2012) propose d'étudier l'aire dans trois dimensions distinctes, (a) la compréhension de la nature de l'attribut (b) le développement des conceptions et des propriétés relatives aux unités, et (c) la quantification des aires en utilisant des formules. Elle indique que l'enseignement des aires doit tenir compte de ces trois aspects.

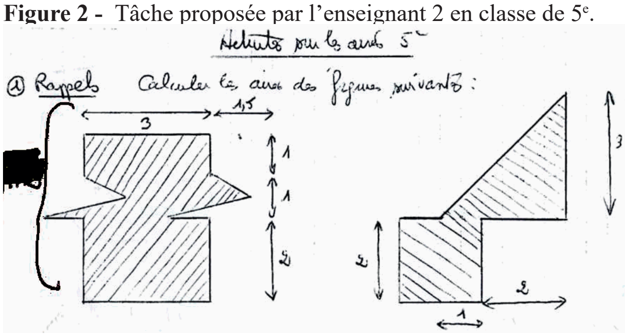
À l'aide des exemples, nous aborderons les difficultés associées à l'enseignement de la notion d'aire dans la perspective des grandeurs et mesures[2].

7 L'aire entre grandeur, mesure et objet

Ci-dessous un exercice présenté par l'enseignant 2 en classe de 5^{e} :

2 Le lecteur pourra trouver des analyses plus détaillées des pratiques d'enseignement dans l'article accepté du même auteur.

Figure 2 - Tâche proposée par l'enseignant 2 en classe de 5e.



Source : Document d'enseignement de l'enseignant 2

On observe que les unités de longueur ne sont pas données dans la tâche. L'enseignant calcule l'aire en écrivant au tableau :

> Enseignant 2: il y a des choses qu'on peut observer, que ce point qui est là, on peut le mettre ici, du coup ça déplace plus et là c'est complet. D'accord? Et pareil pour l'autre partie, celle-ci on peut la mettre ici, donc j'ai plus de points et là c'est complet. Je me retrouve avec un ...
> Élèves: rectangle
> Enseignant 2: qui mesure combien sur combien?
> Élève 1: 4 sur 3
> Élève 2: 3 sur 4, donc l'aire... comment on fait pour calculer l'aire du rectangle? // Longueur par largeur, shut la longueur c'est...
> Élève: 3
> Enseignant 2: 3? Alors la longueur c'est la plus grande, alors c'est...
> Élèves: 4
> Enseignant 2: 4, la largeur?
> Élève: 3
> Enseignant 2: 3, la réponse est 12, rien d'autre. Si par contre, il y avait l'unité, parce qu'effectivement cette figure, elle est au départ en centimètres. S'il y avait une unité, il faut mettre quoi derrière?
> Élèves: centimètres carrés
> Enseignant 2: centimètres carrés, vous êtes en dimension 2, donc centimètres carrés d'accord. Soit vous mettez rien parce qu'il n'a rien au départ, et c'est 12 sans rien. Soit s'il y a l'unité c'est l'unité qui doit avoir le carré, parce que ça, c'est 4 cm fois 3 cm donc le cm.

Dans les premières lignes, on remarque que l'enseignant applique une procédure de découpage-recollement à la surface pour obtenir un rectangle. Ensuite, il calcule l'aire du rectangle avec une formule. Une particularité de cette procédure est que les opérations portent sur les nombres et non sur les grandeurs mesurées (avec les unités). Nous avons observé qu'il est habituel que les enseignants réalisent les calculs à l'aide des nombres et ajoutent les unités à la fin. Ainsi pour résoudre cette tâche, le professeur écrit : « Aire=Lxl=4x3=12 ». Le contrat didactique concernant les unités est établi à la fin de l'extrait : si dans le problème les mesures des longueurs sont données sans les unités, la réponse doit s'écrire sans les unités, par contre si dans l'exercice les longueurs sont données avec les unités, les élèves doivent mettre les unités. De plus, le fait d'utiliser « cm² » est justifié par la dimension de travail, c'est-à-dire la dimension 2.

L'absence d'unités dans les calculs et sur les dessins fait en partie disparaitre la notion d'aire en tant que grandeur, car la mesure de l'aire est définie par le choix d'une unité. L'objet central d'étude est ainsi la formule, autrement dit le travail d'étude des aires s'inscrit dans un cadre numérique. Cependant, les recherches suggèrent que le traitement arithmétique prématuré de l'aire par des formules réduit la compréhension de ce concept en le réduisant à des calculs non porteurs du sens (Douady et Perrin-Glorian, 1989; Zacharos 2006). La technique de découpage-recollement fait davantage intervenir les grandeurs, mais le professeur ne questionne pas les élèves à ce sujet, il ne propose aucune discussion autour de l'invariance de l'aire par isométries ou par découpage-recollement, que, comme nous l'avons dit, ce sont des propriétés essentielles à la construction du concept d'aire indépendamment de la surface et de la mesure. En outre, le fait de justifier l'utilisation de « cm^2 » par la dimension de travail, pourrait amener les élèves à faire des amalgames entre l'aire et le périmètre, car pour une surface plane représentée en « dimension 2 », on peut aussi s'intéresser à son périmètre. La difficulté de la différentiation entre aire et périmètre a été largement documentée par la recherche (Douady & Perrin-Glorian, 1989, Huang, 2014, Moreira-Baltar, 1999, Zacharos, 2012), alors l'enseignement devrait aborder cet aspect. En effet, comme le signalent Zacharos & Chassapis (2012) :

> Thus, from a pedagogical point of view, it is more important to first develop the capacities to conceptually distinguish between attributes and choose which attribute is to be measured each time (Zacharos & Chassapis, 2012, p. 44)

D'un autre côté, la différentiation entre l'aire (grandeur) et la surface (surface) n'est pas très claire dans les enseignements de ce même professeur. Pendant une séance en classe de 6e, l'enseignant 2 définit l'aire de la manière suivante :

> Enseignant 2: la longueur est le contour de la figure, et l'aire, ça sera quoi?
> Élève: c'est la surface
> Enseignant 2: c'est la surface représentée par le cadre, la portion qui est représentée à l'intérieur de la figure. Alors, l'aire représente la portion du plan qu'elle occupe.
> Élève: c'est quoi une portion?
> Enseignant 2: portion? portion d'une tarte
> Élève: par rapport à quoi?
> Enseignant 2: portion d'une tarte, bah c'est une portion, t'as le plan, t'as la feuille et puis la figure représente une portion de la feuille.

Dans la définition, l'enseignant 2 utilise le mot « portion », lequel n'est pas compris par un élève. Il utilise alors un objet physique, la feuille, pour répondre à l'élève. Cela pourrait renforcer une conceptualisation de la notion d'aire très proche de la notion de l'objet et faire obstacle à la construction des théorèmes comme « deux surfaces de formes différentes peuvent avoir même aire » ou « l'aire reste inchangée dans le processus de décomposition et de recomposition » (Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1960), nécessaires à l'apprentissage des formules d'aire et des théorèmes géométriques (Perrin-Glorian, 2002; Zhou, 2012). Mais du point de vue de l'enseignant, quelle est la difficulté sous-jacente ? Est-il conscient des effets qu'un tel enseignement pourrait avoir sur l'apprentissage des élèves ?

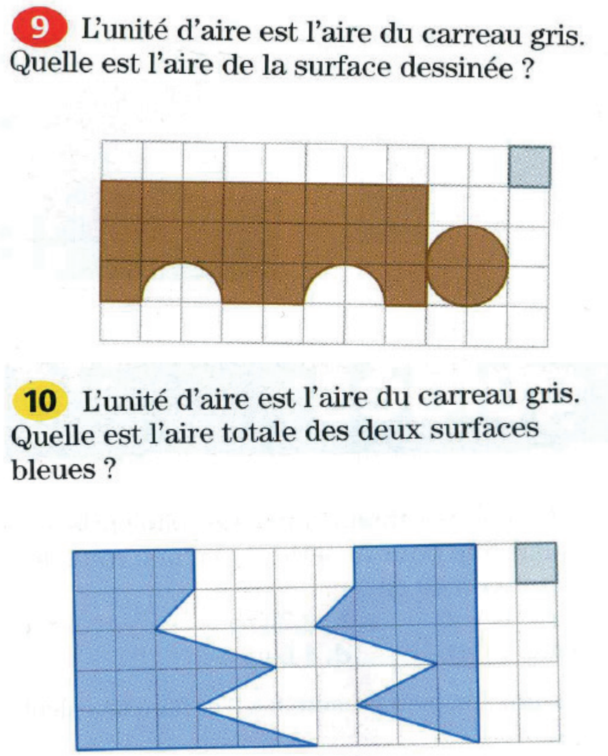
Ou s'agit-il d'une incompréhension du concept d'aire de la part de l'enseignant ?

8 La place des unités dans les calculs

Les analyses des cas de trois enseignants nous ont révélé que la place et le rôle des unités restent confus dans l'enseignement. Effectivement, on peut observer dans les pratiques que plusieurs réponses, qui font appel à des unités différentes, sont acceptées pour un même problème ou dans un même chapitre, telles que « carreaux », « unités », « cm », « cm^2 », « □ » sans que des commentaires soient donnés par les enseignants ou sans que les liens soient abordés.

Par exemple, dans la pratique de l'enseignant 2 et pour les exercices 9 et 10, l'unité de mesure est « l'aire du carreau gris » :

Figure 3 et 4 - Tâches proposées par l'enseignant 2.



Source : Picchiottino *et al*. (2005).

Une première élève passe au tableau et donne sa réponse pour l'exercice 9 comme « 24 □ » et une deuxième élève donne sa réponse pour l'exercice « 30 unités ». L'enseignant ne revient pas sur les unités de mesure utilisées, il met l'accent sur les nombres :

> Enseignant 2: oué, on tombe sur un rectangle qui fait 1,2,3,4,5 sur 1,2,3,4,5,6, oui, 5 fois 6. D'accord? Donc tout ça a été fait soit par découpage ou on comble les trous pour obtenir des figures simples, soit la deuxième partie vous collez un morceau et puis en morceau, en fait ça vous un rectangle. ça va? c'est bon?

Dans les progressions de l'enseignant 2 relatives aux aires, les unités apparaissent très peu, alors que les nouveaux programmes demandent de faire des calculs directs sur les unités. De plus, quand les unités apparaissent leur statut n'est pas bien défini. Premièrement, le symbole « □ », utilisé parfois comme unité, concerne deux conceptions d'aire, l'une en tant que surface et l'autre en tant que grandeur. Deuxièmement, le contrat didactique mis en place par l'enseignant 2 conduit à accepter aussi bien des réponses avec unités et des réponses sans unités. Troisièmement, quand les réponses sont données avec des unités, plusieurs objets concrets peuvent être utilisés pour représenter les unités pour un même problème. Dans cette même perspective, Pressiat indique :

> En classe de mathématiques, les objets supports des grandeurs (une règle de telle longueur, un vase de telle capacité, …) sont évoqués, mais ne sont pas amenés dans la classe pour y être exploités (sauf exception). Les grandeurs pourraient y être aisément présentes sous la forme de "nombres concrets" : 15 km est une longueur, 50 km/h est une vitesse, … Or les unités - et donc les grandeurs - y disparaissent, et ceci depuis longtemps (Pressiat, 2005, p. 207).

Cependant, l'absence des unités ou leur utilisation imprécise dans les organisations mises en place par les enseignants nourrit des confusions quant à l'enseignement. Or, des pratiques utilisant les unités ont été rejetées au moment de la mise en place du programme de 1970, il semblerait ainsi que « leur rapport institutionnel aux grandeurs est imprimé par cette organisation mathématique, qui numérise d'emblée les grandeurs » (Pressiat, 2005). Ainsi, comme le signale ce même auteur :

Un tel enseignement, qui existe dans des pays voisins, nécessite des moyens d'expression des grandeurs, des techniques de calcul portant sur les grandeurs elles-mêmes, et également, en ce qui concerne les professeurs en premier lieu, d'une légitimité et d'une intelligibilité de ces techniques qui leur ont rarement été données au cours de leurs études. (Pressiat, 2005, p.217)

9 Faire vivre le domaine de grandeurs dans l'enseignement, un problème de la profession

Ces exemples, portant sur le traitement de l'aire, en tant que grandeur et mesure, et la place des unités, montrent que les enseignants rencontrent des difficultés à instaurer des pratiques convenables au traitement de l'aire en tant que grandeur et à la construction de liens entre l'objet, la grandeur et la mesure. Dans tous les cas, il semblerait qu'un traitement arithmétique précoce de l'aire, qui ne met pas l'accent sur ces différences et l'utilisation inadéquate des unités, réduit et affaiblit l'enseignement des grandeurs au collège (Pressiat, 2005). Cependant, nous nous demandons sur les connaissances nécessaires pour mener à bien cette construction de l'aire, et de façon générale des grandeurs au collège. Les enseignants de notre recherche ne semblent pas avoir conscience de certaines de ces connaissances, car nous croyons que les grandeurs et les mesures comportent un savoir difficile à comprendre dû à leur histoire mathématique et institutionnelle (Auteur, accepté). Les résultats relatifs à ma thèse (Auteur, année) montrent que la constitution d'un domaine grandeurs et mesures au secondaire nécessite de la construction de nouvelles organisations mathématiques en coordination avec les anciennes organisations. Tel que le signifie Ben Nejma (2010, p.6) :

> […] les organisations mathématiques et didactiques du savoir à enseigner du passé peuvent surgir comme des alternatives consciemment envisagées par des professeurs, ou avoir des influences plus indirectes sur les pratiques enseignantes actuelles.

L'analyse de pratiques menée pendant ma recherche doctorale met en évidence que sur le processus qui conduit l'enseignant des mathématiques à enseigner aux mathématiques pour l'enseignement (Cirade, 2008), l'enseignant est confronté à la difficulté de caractériser et construire un domaine des grandeurs dans l'enseignement comme prescrit par le programme. Plus globalement, les difficultés de l'enseignant observé peuvent être généralisées à un problème de la profession, qui s'explique par le fait que le programme a ignoré les savoirs existants conduisant à la cohabitation des savoirs mathématiques d'âges et de logiques différentes dans l'enseignement.

10 Conclusion

Cette contribution a abordé les raisons et les effets d'une modification curriculaire importante, dont on ne connait pas vraiment l'origine. En utilisant des outils de la théorie anthropologique de la didactique, nous avons analysé des éléments relatifs aux grandeurs au secondaire en France en soulignant le rôle prépondérant des grandeurs dans l'enseignement. Nos analyses nous ont amenés à identifier et questionner les connaissances que les enseignants en général devraient pouvoir mettre en œuvre pour instaurer le nouveau programme du collège dans leurs classes. Nous avons identifié des contraintes qui pèsent sur les choix du programme et des enseignants. Par exemple, au niveau de la discipline, la place des grandeurs est très particulière, car elles ont fondé les mathématiques pendant plusieurs siècles pour ensuite être exclues de la construction de cette discipline. Nous avons également précisé des éléments théoriques nécessaires exposés par le programme pour développer les nouvelles organisations mathématiques. L'une d'elles est la différenciation entre l'objet, la grandeur et la mesure. Ainsi, nous nous sommes posé la question de savoir quelles étaient les mathématiques essentielles pour mener à bien la construction du domaine des grandeurs au secondaire. Les enseignants de notre recherche ne semblent pas avoir conscience de certains de ces savoirs. Effectivement, les résultats obtenus montrent comme le programme a ignoré les savoirs existants, en particulier les connaissances que les enseignants mettent en place pour décrire, donner du sens et justifier leurs pratiques. Ainsi, les analyses menées ont montré que, en ce qui concerne l'enseignement des grandeurs, les enseignants se trouvent affrontés à des difficultés qui reviendraient à la profession d'enseignant de mathématiques, de tenter de mettre en place le nouveau programme sans que les mathématiques pour l'enseignement soient clairement définies.

Références

Artaud, M. (2003). Analyser des praxéologies mathématiques et didactiques «à calculatrice» et leur écologie. In : *Actes du colloque européen ITEM*, Reims, 20, 21, 22 juin 2003.

Ben Nejma, S. (2010). Quel impact d'une évolution du curriculum officiel sur les pratiques enseignantes ? Étude de cas dans le contexte tunisien, *Petit x*, n. 82, p. 5-30.

Bronner, A. (1997). Étude didactique des nombres réels. Idécimalité et racine carrée. Thèse de doctorat non publié, Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Brousseau G., Brousseau N. (1991). Le poids d'un récipient. Étude de problèmes du mesurage en CM, *Grand N*, n. 50, p. 65-87.

Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. (Thèse de doctorat non publiée, Université Paris).

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*,19(2), p.221-265.

Chevallard, Y., Bosch M. (2001). Les grandeurs mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, (55), p. 5-32.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. In: J.-L. Dorier. *Actes de la XIe École d'été de didactique des mathématiques*, *Corps, 21-30 Août 2001* (pp.41-46). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2006). F*ormer des professeurs, construire la profession de professeur.* http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Former_des_professeurs_construire_la_profession.pdf

Cirade, G. (2008). Les angles alternes-internes: un problème de la profession, *Petit x*, (76), p. 5-26.

C.N.D.P. (1997). *Programmes de 5e et 4e*. Disponible en http://o.belliard.free.fr/progra4.pdf

C.N.D.P. (1999). *Accompagnement du programme de 3e.*. Disponible en http://icosaweb.ac-reunion.fr/RsrcPeda/Quatre/Docs/prgms/prog4.pdf

Coulange, L. (2013). *L'ordinaire dans l'enseignement des mathématiques. Les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves.* Habilitation à Diriger des Recherches. Université Paris Diderot.

D.G.E.S.C.O. (2007). *Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e du collège. Grandeurs et mesures au collège.* Disponible en http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/16/9/doc_acc_clg_grandeurs_109169.pdf

Douady, R., & Perrin-Glorian, M.J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20(4), p.387-424.

Huang H.M. (2014). Third- to fourth-grade students' conceptions of multiplication and area measurement. *ZDM Mathematics Education*, n. 46, pp. 449-463.

Karsenti, T., & Savoie-Zajc, L. (2004). *La recherche en éducation: étapes et approches*. Sherbrooke: Éditions du CRP.

Merriam, S. (1998). *Qualitative research and case study applications in education. Revised and expanded from "Case study research in education".* San Francisco : Jossey-Bass.

Moreira-Baltar, P. (1997). A propos de l'apprentissage du concept d'aire, *Petit x*, 43, p.43-68.

Moreira-Baltar P. (1999) Une étude de situations et d'invariants: outil pour l'analyse de la construction du concept d'aire au collège, *Petit x*, 49, p.45-78.

Ministère de L'éducation Nationale. (2008). *Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques.* Disponible en http://media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf

Perrin-Glorian, M. J. (2002) Problèmes didactiques liés à l'enseignement des grandeurs. Le cas des aires. In : J.-L. Dorier. *Actes de la XIe Ecole d'été de didactique des mathématiques*, *Corps, 21-30 Août 2001*, (p.299-315). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Piaget, J. Inhelder B, & Szeminska A. (1973). *La géométrie spontanée de l'enfant*. Paris: PUF.

Picchiottino, J. D., Amigo P. & Jeuffroy M. (2005). *Mathématiques 6e,* Collection Multimath, Paris: Hatier.

Pressiat, A. (2005). Calculer avec les grandeurs. In *Actes de l'Université d'été de Saint-Flour : Le calcul sous toutes ses formes*. http://www.ac-clermont.fr/disciplines/fileadmin/user_upload/Mathematiques/pages/site_math_universite/CD-UE/Menu_pour_Internet.htm

Rouche N. (1992) *Le sens de la mesure: des grandeurs aux nombres rationnels*. Bruxelles : Didier-Hatier.

Roy, S.N. (2003). L'étude de cas. Dans B. G. *Recherche sociale de la problématique à la collecte de données* (pp.199-225). Québec: Presses de l'Université du Québec.

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices of area measurement and students' failure. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(3), p.224-239.

Zacharos, K. & Chassapis D. (2012). Teaching suggestions for the measurement of area in Elementary School. Measurement tools and measurement strategies. *Review of Sciences, Mathematics and ICT Education*, 6(2), p.41-62.

Zhou W. (2012). *Dimensions and levels of students' understanding of area measurement*. Thèse de doctorat non publiée. Vanderbilt University, États-Unis.