REVISEM
Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/ 10.34179/revisem.v5i1.11893

TEORIAS DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA E INFORMÁTICA NA CRIAÇÃO DE ESTRATÉGIAS PARA A PRÁTICA DO PROFESSOR COM A UTILIZAÇÃO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS

THE DIDACTIC AND COMPUTING TRANSPOSITION THEORIES TO CREATE STRATEGIES FOR TEACHING PRACTICE USING DIGITAL TECHNOLOGIES

Celina A. A. P. Abar
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP
abarcaap@pucsp.br

Resumo

A exploração de conteúdos da Matemática com a utilização de tecnologias digitais deveria ser considerada, há algum tempo, como uma possibilidade para o ensino e para a aprendizagem. Aspectos teóricos, metodológicos, tecnológicos e outros relacionados às dificuldades na aprendizagem de alguns conteúdos e explorados por meio das tecnologias digitais são orientadores para o desenvolvimento de uma estratégia pedagógica. Este trabalho apresenta duas propostas extraídas de pesquisas já consolidadas e que foram construídas com base em algumas teorias, em especial na Transposição Didática de Yves Chevallard e na Transposição Informática de Nicolas Balacheff. Estas teorias dão suporte para a Educação Matemática e podem servir de orientação, não só para a prática do professor, mas também para o aprimoramento de sua formação. O texto apresentado poderá ser uma alternativa pedagógica para aplicações, aprimoramento do conhecimento e do significado de conteúdos de Matemática, em contextos da prática do professor.
Palavras-chave: Transposição Didática, Transposição Informática, Educação Matemática, Tecnologias Digitais

Abstract

The exploration of mathematical content using digital technologies should be considered, for some time, as a possibility for both teaching and learning. Theoretical, methodological, technological and other aspects related to learning difficulties of some contents and explored through digital technologies can guide the development of a pedagogical strategy. This paper presents two proposals from consolidated research based on some theories, specially Yves Chevallard's Didactic Transposition and Nicolas Balacheff's Computer Transposition. These theories support Mathematical Education and can serve as a guidance, not only for the teaching practice, but also for the improvement of teachers' training. The text presented can be a pedagogical alternative for the application, improvement of knowledge and meaning of mathematical contents in the teaching practice context.
Keywords: Didactic Transposition, Computing Transposition, Mathematical Education, Digital Technologies

INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta duas propostas extraídas de pesquisas já consolidadas e que foram construídas com base em algumas teorias, em especial na Transposição Didática de Yves Chevallard e na Transposição Informática de Nicolas Balacheff. Tem como objetivo apresentar possíveis alternativas pedagógicas para o aprimoramento do conhecimento e do significado de conteúdos de Matemática, em contextos da prática do professor.

O desenvolvimento tecnológico propicia alternativas para a educação agregando aos seus recursos tradicionais ambientes digitais que permitem o aprendizado contínuo, afetam o processo educacional nas mais diversas dimensões e demandam uma cultura atual de formação permanente. As tecnologias não só permitem às pessoas transformar suas ações no dia a dia, como também possibilitam novos recursos ao ensino e à aprendizagem. Neste contexto, o professor, como profissional reflexivo, tem de optar por estratégias que vão de encontro com sua formação inicial, o que acarreta um aumento de estresse e de responsabilidade profissional.

Palis (2010) na introdução de seu artigo argumenta que:

> Há tempos, vem-se falando da integração de ferramentas tecnológicas ao ensino e à aprendizagem de alunos nos diversos níveis de ensino e de professores em formação inicial e continuada. O que será que o professor precisa saber para ensinar de forma eficiente em contextos tecnológicos? Que ferramentas teóricas têm sido construídas para estudar essa questão? (PALIS, 2010, p.432)

A autora continua em seu texto apresentando ideias de alguns autores e “para pensar sobre a integração de tecnologias digitais em ambientes de ensino, focalizando o conhecimento que os professores precisam ter para ensinar nesses novos contextos educacionais”. (PALIS, 2010, p.433)

A formulação de estratégias inovadoras exige do professor um permanente desenvolvimento profissional, permite ao docente estar atento a novas abordagens educacionais, cuja informação chega rapidamente, mas carece de tempo de estudo e de reflexão antes de poder transpô-las para a sua prática.

A informação sobre novas experiências de aprendizagem também chega rapidamente aos jovens, muitas vezes pelo compartilhamento nas redes sociais e se estendem a um mundo cada vez mais global, provocando o questionamento natural dos professores sobre o desenvolvimento de experiências semelhantes em outras escolas.

As estratégias a serem adotadas partem da necessidade dos alunos, que são cada vez mais diversos e heterogêneos, em relação aos seus interesses e necessidades de aprendizagem. Essa diversidade é um fator positivo, considerando a função democrática da escola, mas, contudo, coloca muitos desafios ao professor e não é fácil de ser administrada.

Para atender aos desafios acima é compreensível que o espaço de atuação do professor de matemática tenha um componente prático, com suporte em teorias, tanto da educação como da educação matemática, e ocorra em um ambiente propício para que suas propostas didáticas sejam exequíveis e apresentem resultados positivos com impacto nas avaliações dos alunos.

Para tanto é preciso instrumentalizar, de fato, a prática do docente derrubando a ideia explicitada por SÖETARD (2004, p. 51) “de que as ciências da educação continuam sendo construções teóricas que não conseguem encontrar a passagem para o real e instrumentar realmente a prática”.

Na prática do dia a dia, alguns professores questionam se há algum material que possa ajudá-los no desafio da criação de recursos e propostas didáticas, utilizando as tecnologias digitais. A resposta, em muitas situações, é a indicação de artigos e de pesquisas de mestrado e doutorado nas quais, teóricos da educação e da educação matemática, estão presentes e foram essenciais na definição de estratégias para que a pesquisa pudesse ser consolidada. Mas esse não é um caminho fácil, pois não indica com praticidade uma possível estratégia que seja exequível na escola.

No ensinar é essencial ser menos intuitivo, mais prático, mais reflexivo e fundamentado nas diferentes correntes teóricas epistemológicas, históricas nas quais acredita o professor e, além disso, como afirma PALIS (2010, p.437) “a tecnologia avança, mas o desenvolvimento de estratégias para uma efetiva integração de tecnologia não ocorre com a mesma velocidade”.

A dificuldade de acesso às tecnologias digitais não pode ser impedimento, para sua utilização, pois, atualmente, elas estão nas mãos de quase todas as pessoas por meio de notebooks, tablets e celulares. Os laboratórios, embora defasados, ainda existem em muitas escolas. A questão continua sendo a dificuldade na criação de estratégias adequadas, fundamentadas em teorias consistentes e que permitem a criação de recursos para serem utilizados na prática docente.

E daí vem a questão: como teorias que sustentam a Educação Matemática podem ser utilizadas na formação e na prática docente para apoiar a utilização das tecnologias digitais? Que estratégias e recursos podem ser criados com o suporte destas teorias?

Para atender as questões acima apresentamos um esboço da, já conhecida, Teoria da Transposição Didática e sua evolução para a Transposição Informática. Outras teorias podem ser exploradas na tentativa de atender às questões colocadas e serem apoio aos mais diversos conteúdos da matemática.

A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA E A TRANSPOSIÇÃO INFORMÁTICA

É importante a compreensão do complexo processo de transformação pelo qual passa a matemática até tornar-se um elemento a ser ensinado. É o que se denomina de Transposição Didática apresentada pelo pesquisador francês Yves Chevallard.

Chevallard (1991) definiu o termo transposição didática ao afirmar que:

> Um conteúdo do saber, que é destinado ao saber a ser ensinado, sofre um conjunto de alterações no sentido de adaptar com mais eficiência seu lugar entre os objetos da educação. Esse 'trabalho' que acontece com o saber a ser ensinado é chamado de transposição didática. (CHEVALLARD, 1991, p. 39 – tradução da autora)

A noção de transposição didática distingue diferentes saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. Segundo a teoria, existem três matemáticas distintas entre si: a matemática do professor, a do matemático e a do aluno. Dessa forma, a transposição didática é definida como mecanismos gerais que permitem a passagem de um objeto de saber científico a um objeto de ensino.

Para o professor, cabe a transformação dos saberes nestes três níveis de modo que não perca suas características essenciais, mesmo com a sua adaptação para a sala de aula (D'AMORE, 2007). Ao fazer a transposição didática, podem ocorrer alguns problemas como o distanciamento entre o saber ensinado e sua origem (o saber científico) e, como consequência, uma recontextualização que modifica seu sentido original (CHEVALLARD, 1991).

Da mesma forma como a transposição didática de Chevallard, Balacheff propõe uma teoria para repensar o uso do computador pelos docentes para que este não seja mais um elemento na educação e sim um diferencial que deve ser muito bem estudado e avaliado para seu correto uso.

Balacheff (1994) considera que:

> A criação de objetos de ensino é o resultado de um processo complexo de adaptação dos conhecimentos às limitações de ensino e aprendizado próprias dos sistemas didáticos. Este processo, a transposição didática (Chevallard: 1985), conduziu à criação de objetos originados por suas características e funcionamento próprios. O desenvolvimento da tecnologia da informação, sua introdução nas escolas e centros de formação, é acompanhado de novos fenômenos da mesma ordem daqueles da transposição didática. Às limitações da transposição didática acrescentam-se, ou melhor, combinam-se, as

> limitações da criação de um modelo e de implementação da informática: limitações da "modelagem computável", limitações de softwares e de materiais de apoio digital à realização. (BALACHEFF, 1994, p.4 – tradução da autora)

Na transposição informática, a mudança de representação provoca uma transformação de um modelo matemático de referência para um modelo representado no dispositivo informático a ser manipulado por um usuário. Essa passagem pode ser dirigida pelo professor a partir de resultados de pesquisas, que apresentem os obstáculos que possam surgir, ou na elaboração de materiais pedagógicos.

Da mesma forma que, na transposição didática, o saber a ser ensinado sofre modificações, os objetos de ensino são transformados em saberes implementados ao serem modelados computacionalmente na transposição informática. O saber aprendido (aquele que o aluno realmente alcança) decorre da interação do estudante (ou usuário) com o dispositivo.

O desenvolvimento das tecnologias da informação e comunicação, bem como sua introdução nas escolas e nos ambientes de formação, é acompanhando de fenômenos da mesma ordem que os da transposição didática.

Os ambientes de aprendizagem com as tecnologias digitais podem resultar de uma construção onde acontecem novas transformações dos objetos de ensino desde o saber científico até o saber ensinado denominado por Balacheff de transposição informática neste processo de trabalho. Assim, é importante refletir sobre o impacto das tecnologias sobre cada um destes saberes no contexto da Matemática.

Balacheff (1994) também observa que objetos matemáticos representados em softwares:

> [...] possuem uma representação interna (sobre um modelo de números reais) e uma representação de interface. Esta última é constituída de uma pavimentação finita de pixels que força a qualidade perceptiva dos desenhos. Podemos esperar uma melhor resolução das telas, mas qualquer que seja o tamanho dos pixels, faltará resolver o problema de designação direta de um objeto: uma decisão deve ser tomada sobre o "ponto mostrado" entre um conjunto de pontos possíveis. Esta decisão pode, na melhor das hipóteses, assumir uma intenção do aprendiz. Os limites da interação fundada sobre a percepção são suscetíveis às consequências sobre as aprendizagens, elas podem ser, também, a fonte de uma problematização fecunda de conceitos matemáticos. (BALACHEFF, 1994, p.5)

Observa o autor que, no contexto da aprendizagem, a interface não está sob o controle teórico do usuário e pode se tornar uma referência relativamente àquela onde o conhecimento é construído. O autor se aprofunda nas questões técnicas da construção e programação de computadores e softwares.

Voltando ao processo da transposição didática, suas etapas podem ser pensadas com a inserção das tecnologias digitais como indicam Chevallard e Johsua (1982). Estas etapas, enunciadas por estes autores, podem dar suporte às estratégias na criação de recursos com apoio do dinamismo de tecnologias digitais e podem ter como objetivos: modernizar o saber escolar; atualizar o saber a ensinar; articular o saber "velho" com o saber "novo"; transformar um saber em exercícios e problemas, e tornar um conceito mais compreensível.

Seguindo as ideias de Chevallard e Johsua (1982) a modernização consiste em incluir nos programas de formação dos futuros profissionais, novas teorias, modelos e interpretações científicas e tecnológicas que surgem com o desenvolvimento científico ao longo do tempo.

A utilização de tecnologias digitais no âmbito do saber científico pode contribuir para a compreensão da evolução de um objeto matemático por meio das ideias e conceitos descobertos e que evoluíram à medida que eram pesquisados.

Alves Filho (2000) sugere algumas ações para suporte ao desenvolvimento de recursos para a prática docente que vão ao encontro das etapas da transposição didática:

> • Modernizar o saber escolar
> A modernização faz-se necessária, pois o desenvolvimento e o crescimento da produção científica são intensos. Novas teorias, modelos e interpretações científicas e tecnológicas forçam a inclusão desses novos conhecimentos nos programas de formação (graduação) de futuros profissionais.
> • Atualizar o saber a ensinar
> Saberes ou conhecimentos específicos, que de certa forma já se vulgarizaram ou banalizaram, podem ser descartados, abrindo espaço para introdução do novo, justificando a modernização dos currículos.
> • Articular saber "velho" com "saber" novo
> A introdução de objetos de saber "novos" ocorre melhor se articulados com os antigos. O novo se apresenta como que esclarecendo melhor o conteúdo antigo, e o antigo hipotecando validade ao novo.
> • Transformar um saber em exercícios e problemas
> O saber sábio, cuja formatação permite uma gama maior de exercícios, é aquele que, certamente, terá preferência frente a conteúdos menos "operacionalizáveis". Essa talvez seja a regra mais importante, pois está diretamente relacionada com o processo de avaliação e controle da aprendizagem.
> • Tornar um conceito mais compreensível
> Conceitos e definições construídos no processo de produção de novos saberes elaborados, muitas vezes, com grau de complexidade significativo, necessitam sofrer uma transformação para que seu aprendizado seja facilitado no contexto escolar. (ALVES FILHO, 2000, p.52)

Atualizar o saber a ensinar significa abrir espaço para a introdução de novos conhecimentos relevantes no presente, em detrimento daqueles que deixaram de ser. Articular o saber "velho" com o saber "novo" tem o significado de introduzir objetos de saber "novos", articulando-os com os "antigos"; o novo se apresenta esclarecendo melhor o conteúdo antigo, e o antigo hipotecando validade ao novo.

Transformar um saber a ser ensinado em atividades e problemas, para que um conceito seja mais compreensível, surge da necessidade de fazer com que saberes elaborados, muitas vezes com grau de complexidade significativo, sofram uma transformação para que seu aprendizado seja facilitado no contexto escolar.

Tornar um conceito mais compreensível vem ao encontro do apoio das tecnologias digitais que, com o dinamismo inerente a algumas delas, permite a transformação de um objeto matemático facilitando seu aprendizado.

Nesta linha de reflexão são apresentadas, a seguir, duas pesquisas de mestrado que foram desenvolvidas no contexto acima exposto. Uma delas (SILVA, 2017) atende a proposta de apresentar uma nova roupagem a atividades que envolvem geometria e álgebra e foram desenvolvidas por pesquisadores franceses há algum tempo em ambiente informático que não se tem acesso atualmente. A utilização do software GeoGebra permitiu articular saberes a ensinar e que não poderiam ser perdidos no decorrer do tempo.

Outra pesquisa vai ao encontro de articular o saber "velho" com o saber "novo" esclarecendo melhor o conteúdo antigo e o antigo hipotecando validade ao novo. Mod (2016) trabalhou atividades de construções geométricas, também com a utilização do GeoGebra, desenvolvidas por Regiomontanus em lápis e papel. Foi possível verificar a validade de diferentes demonstrações presentes nos tratados de Regiomontanus e alguns resultados inovadores surgiram. Neste caso, tais resultados não eram especificados no texto estudado e foram observados devido ao dinamismo permitido pelo GeoGebra.

A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA E INFORMÁTICA NA PESQUISA DE SILVA (2017)

A pesquisa de Silva (2017) teve como objetivo verificar se construções dinâmicas no GeoGebra, aplicadas em uma sequência de atividades facilitam a aprendizagem de função. O autor trabalhou com construções presentes no Imagiciel[1] (CREEM,1992), um ambiente computacional de pesquisadores franceses e as reconstruiu no GeoGebra articulando o saber "velho" com o saber "novo".

As situações presentes no Imagiciel abordam temas de funções numéricas, probabilidade e geometria plana e espacial, elaboradas entre o final da década de 1980 e início dos anos de 1990. Como atualmente o Imagiciel não é mais acessível à maioria dos

[1] Ambiente computacional desenvolvido por pesquisadores franceses na década de 1980 no ambiente DOS, voltado para o ensino de temas da Matemática, acompanhado por cadernos de atividades.

computadores, as atividades foram reconstruídas em um ambiente com mais recursos tecnológicos e mais acessível, no caso, o GeoGebra.

O autor justifica a escolha do GeoGebra (HOHENWARTER, 2007) por ser esse um software livre e acessível em diferentes computadores, além de possibilitar a disponibilização de construções na Internet.

Foi organizada uma sequência de atividades inspiradas na dialética ferramenta-objeto de Régine Douady (DOUADY, 1984) e aplicada a alunos do primeiro ano do Ensino Médio, com apoio de elementos da Engenharia Didática (ARTIGUE,1995).

A dialética ferramenta-objeto, idealizada por Douady (1984), fornece diretrizes para o desenvolvimento de atividades com os alunos, objetivando a construção de novos conhecimentos. Essa dialética constitui-se de processos cíclicos, nos quais os conhecimentos antigos dos alunos são utilizados como ferramentas que servirão como base para desenvolver novos conhecimentos. Esses novos conhecimentos são denominados por Douady de objeto, que uma vez consolidados, exercerão o papel de ferramenta em novas situações.

Pela análise das respostas, pela interação entre os alunos e com as construções elaboradas no GeoGebra, em forma de applet's, verificou-se que as atividades facilitaram a aprendizagem de função, em especial, a de função definida por sentenças em intervalos reais. Segundo Silva (2017):

> O conceito de função é um dos mais importantes dentro da Matemática e aplicável a outras áreas do conhecimento, podendo desenvolver o papel de ferramenta na resolução de problemas. Contudo, em nossa experiência, constatamos que as características estruturais do conceito de função parecem não ser totalmente assimiladas pelos alunos, o que vai ao encontro do que apontam algumas pesquisas. (SILVA, 2017, p.3)

A proposta apresentada pelo ambiente computacional Imagiciel traz situações que partem de um ponto geométrico e possibilitam a representação tabular e/ou gráfica de uma situação geométrica para se trabalhar o conceito de função. Na sequência de atividades construída, assim como na proposta do Imagiciel, o autor privilegiou a passagem do quadro geométrico para o tabular, do tabular para o geométrico e, por fim, para o algébrico, estratégia pouco utilizada nos livros didáticos, como aponta Martins (2006), possibilitando o trabalho simultâneo de diferentes representações de uma mesma função, o que não é possível sem a utilização de um ambiente computacional.

O autor apresentou em uma tabela (Tabela 1), as propostas de atividades que foram desenvolvidas, seguindo os pressupostos da teoria de Régine Douady (DOUADY, 1984).

Tabela 1 – Organização da sequência segundo a dialética *ferramenta-objeto.*

ATIVIDADE 1– TRIÂNGULO EM UM QUADRADO.	**Ferramentas**: par ordenado, plano cartesiano, cálculo da área de triângulos retângulos e trapézios, leitura de tabela numérica, leitura de gráfico, operações com polinômios, operações com frações e intervalos reais.	**objeto**: Função polinomial do segundo grau definida em um intervalo real.
ATIVIDADE 2 – CAMINHO EM UM TRIÂNGULO.	**Ferramentas**: par ordenado, leitura de tabela numérica e gráfico, semelhança de triângulos, operações com polinômios, módulo e função definida em um intervalo real.	**objeto**: Função polinomial do primeiro grau definida por sentenças em intervalos reais.
ATIVIDADE 3 – CAMINHO EM UM TRIÂNGULO 2.	**Ferramentas**: par ordenado, leitura de tabela numérica e gráfico, semelhança de triângulos, operações com polinômios, módulo e função definida em um intervalo real.	**objeto**: Função polinomial do primeiro grau definida por sentenças em intervalos reais.
ATIVIDADE 4 – QUADRADOS COLORIDOS.	**Ferramentas**: Função polinomial do primeiro e segundo grau definida por sentenças em intervalos reais.	**objeto**: Função definida por sentenças polinomiais do primeiro e do segundo grau em intervalos reais.
ATIVIDADE 5 – QUADRADOS COLORIDOS 2.	**Ferramentas**: Função polinomial do primeiro e segundo grau definida por sentenças em intervalos reais.	**objeto**: Função definida por sentenças polinomiais do primeiro e do segundo grau em intervalos reais.
ATIVIDADE 6 – QUADRADOS COLORIDOS 3.	**Ferramentas**: Função polinomial do segundo grau definida em intervalos reais.	**objeto**: Função definida por sentenças polinomiais do segundo grau em intervalos reais.

Fonte: Silva, 2017, p. 40

A seguir é apresentada a atividade 4 da sequência das atividades, e como ela foi proposta aos sujeitos da pesquisa.

A atividade fez uso de um applet na internet (Quadrados coloridos) de uma das propostas presentes no ambiente computacional Imagiciel (Carrés colories), na qual se tem um quadrado ABCD colorido com duas cores, um ponto Z que percorre o segmento AD e o quadrado AWZQ, de forma que W está sobre o segmento AB (Figura 1).

Nessa atividade o autor propõe a reutilização dos conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores entre os quais, função polinomial do segundo grau definida em um intervalo real e função polinomial do primeiro grau definida por sentenças em intervalos reais que assumem o status de conhecimentos antigos, sobre os quais serão construídos os novos, como o conceito de função real definida por sentenças polinomiais do primeiro e do segundo grau. Segue a descrição da atividade proposta.

Atividade 4. Seja um quadrado ABCD colorido com duas cores, conforme a representação na Janela de Visualização do GeoGebra. Para todo ponto Z pertencente ao segmento AD, considere o quadrado AWZQ tal que W esteja sobre o segmento AB. Chame de x a medida do segmento AZ, dada em cm e s a medida da área da região escura colorida do quadrado AWZQ, dada em cm^2. Utilize o controle deslizante para movimentar o ponto Z e com o auxílio da tabela e da Janela de visualização 1 e 2, sendo f(x) a função que para cada x associa um s, faça o que se pede.

Orientações dadas aos sujeitos da pesquisa:

1) Abra o link: (https://www.geogebra.org/m/fMEsdZ63#material/szGnzrUV) ou utilizar um aplicativo para acessar pelo QRCODE abaixo.

e com o auxílio da Janela de Visualização 1 e 2, responda:

- Qual o domínio de f?
- Qual a imagem de f?
- Qual a lei de formação de f? Descreva como você chegou à cada resposta.

As figuras 1 e 2 a seguir exibem como se apresentam as construções no GeoGebra (Figura1) e no Imagiciel (Figura2)

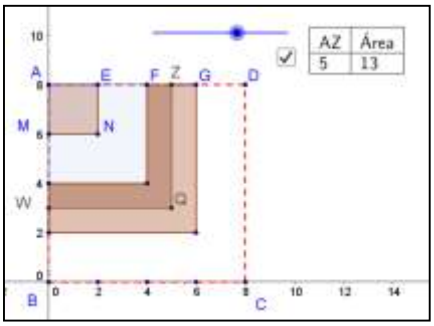


Figura 1 – Construção no GeoGebra – Quadrados Coloridos
Fonte: Silva, 2017, p. 59

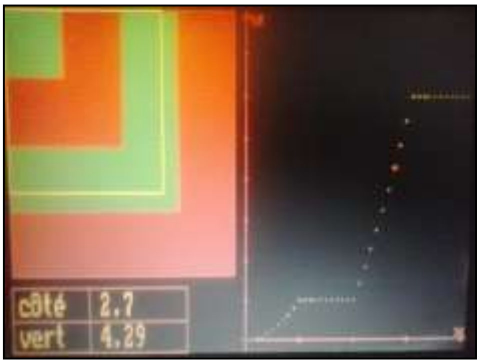


Figura 2 – Construção no *Imagiciel – Carrés Colories*
Fonte: Silva, 2017, p. 59

Com base nas reconstruções do Imagiciel, poderão ser investigadas novas situações, com as características das construções originais, isto é, que partem de situações geométricas e permitem novas abordagens de outros conteúdos da Matemática.

A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA E INFORMÁTICA NA PESQUISA DE MOD (2016)

A pesquisa de Mod (2016) teve como objetivo investigar o papel do GeoGebra como mediador em demonstrações de teoremas sobre triângulos de Regiomontanus (1436-1476), matemático cuja produção contribuiu especialmente no desenvolvimento da Trigonometria.

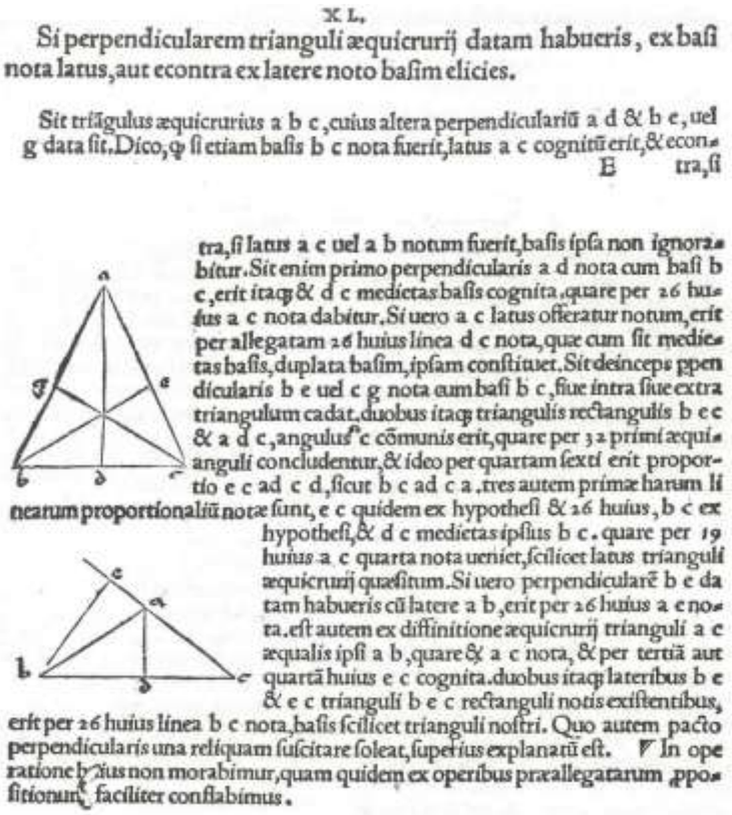
Johann Müller (1436-1476), mais conhecido por Regiomontanus, teve uma contribuição importante para a Astronomia e a Matemática, pois permitiu que a Trigonometria deixasse de ser apenas uma ferramenta da Astronomia e fosse compreendida como um ramo independente da Matemática (COOKE, 1997). Dentre seus trabalhos ressalta-se o *Epítome do Almagesto* e a obra *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque,* que sintetiza o que se conhecia de trigonometria na Europa. Dividida em cinco livros, a obra possui caráter introdutório para matemáticos e astrônomos da época (HUGHES, 1967).

Por se tratar de uma obra importante no desenvolvimento da Matemática e por abordar temas estudados na Educação Básica, faz sentido explorar alguns teoremas propostos nesta obra por meio de ferramentas de ensino atualmente disponíveis, neste caso, ambientes dinâmicos de Geometria indo ao encontro de articular o saber "velho" com o saber "novo", esclarecendo melhor o conteúdo antigo e, o antigo, hipotecando validade ao novo.

No Livro I de sua obra *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque* encontram-se teoremas cujas demonstrações envolvem construções de triângulos satisfeitas algumas condições dadas, contemplando conteúdos acessíveis para a Educação Básica. Algumas construções, representando estes teoremas pesquisados por Mod (2016), estão disponíveis em https://www.geogebra.org/m/fMEsdZ63#chapter/134461

Na perspectiva das funções da demonstração, (VILLIERS, 2001), Mod e Abar (2016), em uma pesquisa recorrente, analisaram o Teorema 40 pela mediação dos movimentos dinâmicos do GeoGebra como instrumento de investigação. Segue a especificação do Teorema 40.

Teorema 40. Se a medida de uma das alturas de um triângulo isósceles e a medida de um de seus lados forem conhecidas, então as medidas dos demais lados podem ser determinadas (Hughes, 1967, p. 83, tradução dos autores)[2].



XL.

Si perpendicularem trianguli æquicrurij datam habueris, ex basi nota latus, aut econtra ex latere noto basim elicies.

Sit triãgulus æquicrurius a b c, cuius altera perpendicularium a d & b e, uel g data sit. Dico, quod si etiam basis b c nota fuerit, latus a c cognitum erit, & econ-

E tra, si

tra, si latus a c uel a b notum fuerit, basis ipsa non ignora-bitur. Sit enim primo perpendicularis a d nota cum basi b c, erit itaque & d c medietas basis cognita, quare per 26 hu-ius a c nota dabitur. Si uero a c latus offeratur notum, erit per allegatam 26 huius linea d c nota, quæ cum sit medie-tas basis, duplata basim, ipsam constituet. Sit deinceps perpen-dicularis b e uel c g nota cum basi b c, siue intra siue extra triangulum cadat, duobus itaque triangulis rectangulis b e c & a d c, angulus c cõmunis erit, quare per 32 primi æqui-anguli concludentur, & ideo per quartam sexti erit propor-tio e c ad c d, sicut b c ad c a, tres autem primæ harum li-nearum proportionalium notæ sunt, e c quidem ex hypothesi & 26 huius, b c ex hypothesi, & d c medietas ipsius b c. quare per 19 huius a c quarta nota ueniet, scilicet latus trianguli æquicrurij quæsitum. Si uero perpendicularẽ b e da-tam habueris cũ latere a b, erit per 26 huius a e no-ta. est autem ex diffinitione æquicrurij trianguli a c æqualis ipsi a b, quare & a c nota, & per tertiã aut quartã huius e c cognita. duobus itaque lateribus b e & e c trianguli b e c rectanguli notis existentibus, erit per 26 huius linea b c nota, basis scilicet trianguli nostri. Quo autem pacto perpendicularis una reliquam suscitare soleat, superius explanatũ est. In ope-ratione huius non morabimur, quam quidem ex operibus præallegatarum propo-sitionum facilitèr conflabimus.

Figura 3 – Teorema 40
Fonte: Hughes, 1967, p. 82 e 84 – adaptado

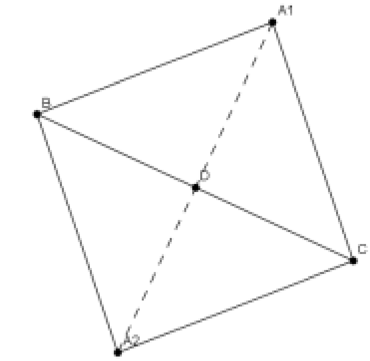
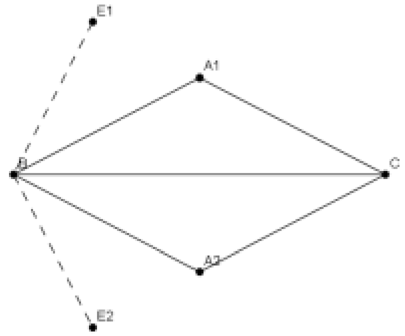
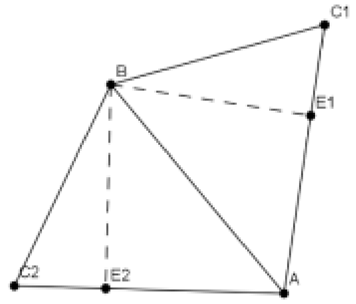
As construções foram realizadas utilizando ferramentas e objetos matemáticos não especificados na demonstração do Teorema, a saber: retas perpendiculares e paralelas

[2] Theorem 40. If the perpendicular of an isosceles triangle is given, then either the side can be found when the base is known or the base can be found when the side is known (HUGHES, 1967, p. 83).

para construção das alturas (régua) e circunferências para construção dos triângulos isósceles (compasso), caracterizando a função de explicação segundo Villiers (2001).

A demonstração de Regiomontanus contempla três casos onde são conhecidas algumas medidas conforme apresentadas no Quadro 1

Quadro 1 – Demonstração do Teorema 40

Caso 1: Suponha que as medidas de AD e BC sejam conhecidas. Então, a medida de DC será metade da medida de BC. Logo, a medida de AC pode ser determinada e AB será congruente à AC No GeoGebra: Construir um segmento BC com a medida conhecida; determinar seu ponto médio D (por onde passará a altura relativa ao vértice A); determinar o ponto A na reta perpendicular à BC passando por D de modo que AD tenha a medida da altura conhecida; obter o triângulo ΔABC.	
Caso 2: Suponha, agora, que as medidas de BE (ou CG) e BC são conhecidas. Então, o ângulo <C é comum aos dois triângulos retângulos ΔBEC e ΔADC e, consequentemente, os triângulos possuem os mesmos ângulos. Assim, a razão de EC para CD será como a razão de BC para CA onde as medidas de EC e BC são conhecidas por hipótese e a medida de DC é metade de BC. Consequentemente, a medida de AC pode ser determinada. No GeoGebra: Construir um segmento BC com a medida conhecida; construir a circunferência de centro B e raio igual a medida da altura; obter uma das tangentes à circunferência passando por C e marcar o ponto de tangência E; obter a mediatriz de BC e marcar o ponto A de intersecção da mediatriz com uma das retas tangentes; obter o triângulo ΔABC.	
Caso 3: Suponha, agora, que as medidas dos segmentos BE e AB são conhecidas. Logo, as medidas dos segmentos AC e AE podem ser determinadas. Tem-se ainda que a medida de EC pode ser determinada. Como as medidas dos lados BE e EC do ΔBEC retângulo são conhecidas, a medida de BC também será determinada. Além disso uma perpendicular pode revelar a outra. No GeoGebra: Construir um segmento AB com a medida conhecida; construir a circunferência de centro	

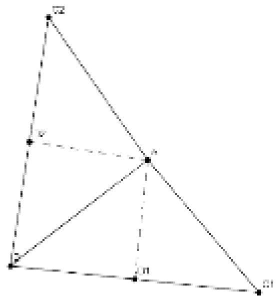
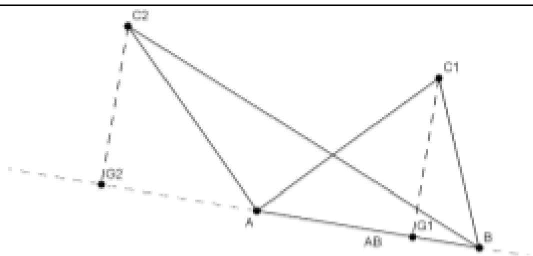
A e raio AB; construir a circunferência de centro B e raio igual a medida da altura obtendo uma das tangentes a ela passando por A e marcar o ponto de tangência E; marcar o ponto C de intersecção da tangente com a primeira circunferência construída; obter o triângulo ΔABC.	

Fonte: Elaborado por Mod e Abar (2016) no GeoGebra

Nestes casos se observa a função de verificação (VILLIERS, 2001), pois com o uso do *software* GeoGebra foi possível verificar que, para cada um dos casos, existem dois triângulos congruentes que podem ser construídos nessas condições.

No entanto a função de descoberta (VILLIERS, 2001) se configura para este teorema, pois com o auxílio do *software*, foi possível observar que a verificação seria análoga a do *Caso 3* se as medidas de CG e AC fossem conhecidas. Todavia, dois novos casos se evidenciaram onde são conhecidas as medidas dos segmentos:

Quadro 2 – Demonstração do Teorema 40 (cont.)

Caso 4: AD e AB (ou analogamente AD e AC). Foi novamente constatado que dois triângulos congruentes podem ser construídos nessas condições	
Caso 5: AB e CG (ou analogamente AC e BE). Ficou evidente que as condições propiciam a construção de dois triângulos não congruentes. Esse fato evidencia a importância da investigação por meio do dinamismo e movimento permitido, nesse caso, pelo *software* GeoGebra.	

Fonte: Elaborado por Mod e Abar (2016) no GeoGebra

Villiers sugere que os alunos sejam iniciados nas várias funções da demonstração em uma sequência (Explicação – Descoberta – Verificação – Desafio Intelectual – Sistematização) não de uma maneira estritamente linear, mas em uma espécie de espiral em que funções já introduzidas são retomadas e ampliadas (VILLIERS, 2001). Seguindo esta sequência, é possível “(re)descobrir” o resultado proposto por Regiomontanus no Teorema 40 do Livro I da obra De Triangulis e, mais do que isso, verificar novas possibilidades não indicadas pelo autor na época, o que indica a importância em atender as indicações de Villiers (2001) quanto às funções da demonstração e atender a proposta de Alves Filho (2000) em articular o saber "velho" com o saber "novo" esclarecendo melhor o conteúdo antigo e o antigo hipotecando validade ao novo.

Em um processo de investigação matemática em sala de aula Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) salientam que o desafio intelectual, como no caso acima do Teorema 40, de representar geometricamente os diferentes casos possíveis a partir das hipóteses e identificar situações não previstas pode instigar o estudante a novos estudos.

O software GeoGebra é uma ferramenta importante para auxiliar na construção de argumentos a respeito do teorema citado, pois foi por meio da movimentação dos pontos que se constatou que alguns casos não estavam contemplados na demonstração.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a apresentação de duas pesquisas nesse texto, espera-se que este artigo possibilite a aproximação do professor da Educação Básica de outros textos que indiquem caminhos para sua utilização em sala de aula. Cabe ao professor continuar o processo da Transposição Didática e Informática tornando-os em um saber a ser ensinado.

Outras teorias que foram citadas, nas duas pesquisas apresentadas, serviram de aporte para diversos trabalhos de mestrado ou de doutorado. Em sites de instituições fidedignas, é possível consultar e adaptar estes estudos para o contexto da prática de cada professor.

Estudantes de todos os níveis, do fundamental ao superior, podem se beneficiar de ambientes de aprendizagem providos de recursos tecnológicos, e os professores podem enriquecer a aprendizagem de seus alunos ao planejar seu ensino levando em conta o impacto potencial das novas tecnologias digitais.

Como resultado parcial espera-se que esta proposta, de articulação entre a teoria e a prática, atenda a perspectiva dos docentes na melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem da matemática por meio das tecnologias digitais.

REFERÊNCIAS

ALVES FILHO J. P. Regras da Transposição Didática Aplicadas ao Laboratório Didático. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, v. 17, n. 2, ago. 2000.

ARTIGUE, M. (Ed.). **Ingeniería didáctica en Educación** Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. México, 1995, pp. 33-59.

BALACHEFF, N. Didactique et intelligence artificielle. Recherches en didactique des mathematiques (Revue), **La Pensée sauvage**, 1994, 14, pp.9-42

CHEVALLARD, Y. **La Transpostion Didactique - du savoir savant au savoir enseigné**. La Pensee Sauvage Éditions, Grenoble. 1991.

CHEVALLARD, Y.; JOHSUA, M-A. Un exemple d'analyse de la transposition didactique – La notion de distance. **Recherches en Didactique des mathematiques**, v. 3, n .2, p. 157-239,1982.

COOKE, R.**The history of mathematics: a brief course.** Burlington, VT: Wiley-Interscience, 1997.

CREEM- Centre de Recherche et d'Expérimentation pour l'Enseignement des Mathemátiques. **Activités Mathematiques avec Imagiciels. Fonctions Numériques**. France: Ministère de L'Education nationale et de la Culture, 1992.

D'AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. São Paulo: Editora da Livraria da Física, 2007.

DOUADY, R. Relación enseñanza aprendizaje. Dialéctica Instrumento-objeto, juego de marcos. **Cuadernos de Didáctica de las Matemáticas**, n. 3, 1984.

HOHENWARTER, M. Geogebra Quickstart: **Guía Rápida de Referência sobre Geogebra**. Portugal. 2007. Acesso em agosto de 2019 de http://www.essl.edu.pt/Dep/Mat/ano%2011/geometria/manual_geogebra.pdf

HUGHES, B. **Regiomontanus on Triangles.** Madison, Milwaukee and London: University of Winsconsin Press, 1967.

MARTINS, L. P. **Análise da Dialética Ferramenta-Objeto na construção do conceito de função**. 2006.

MOD, L. F. A. **O objeto matemático triângulo em teoremas de Regiomontanus: um estudo de suas demonstrações mediado pelo Geogebra**. 2016. 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

MOD, L. F.A.; ABAR, C.A.A.P. **O GeoGebra como instrumento de investigação de teoremas de Regiomontanus**. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo. 2016.

PALIS, G. de L. R. O conhecimento tecnológico, pedagógico e do conteúdo do professor de Matemática. **Educação Matemática Pesquisa.** São Paulo, v.12, n.3, pp. 432-451, 2010.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Ed. Autêntica, Coleção Tendências em Educação Matemática.2003.

SILVA, H. N. **Estudo de função: uma proposta de reconstrução de atividades do Imagiciel mediadas pelo GeoGebra**. 2017. 175 f. Dissertação (Mestrado em Educação

Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2017.

SÖETARD, M. Ciência(s) da educação ou sentido da educação? A saída pedagógica. In: HOUSSAYE, J. *et al*. **Manifesto a favor dos pedagogos**. Porto Alegre: Artmed, 2004.

VILLIERS, M. **Para uma compreensão dos diferentes papéis da demonstração em geometria dinâmica.** Trad. Rita Bastos. ProfMat, 10, Visue, Portugal. Actas... (CD-ROM) Visue, Associação de Professores de Matemática, 2001.

VILLIERS, M. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. **Educação e Matemática - APM**, Portugal, n. 62, p. 31-36, mar/abr 2001.

Submetido em 04 de setembro de 2019.
Aprovado em 09 de dezembro de 2019.