revista
PARANAENSE
DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

INSTIGANDO JUSTIFICATIVAS E PROMOVENDO ESTRATÉGIAS DE PROVA SOBRE QUADRILÁTEROS COM O APLICATIVO FREEGEO

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2019.8.17.493-518

Dedico este artigo aos educadores brasileiros que, com muito suor e dedicação profissional, buscam, insistentemente, inovar e promover – de diferentes modos – o aprendizado de seus alunos, em um currículo com ou sem tecnologias digitais.

Marcelo A. Bairral[1]

Resumo: Dispositivos móveis com toques em tela (DMcTT) chegam à sala de aula no bolso ou nas mãos dos alunos. Eles podem ser usados a favor do aprendizado matemático. Neste artigo são apresentados dois exemplos de como a geometria pode ser dinamizada e enriquecida com o uso do aplicativo FreeGeo. O primeiro ilustra estudantes do Ensino Médio conceituando e justificando propriedades sobre quadriláteros, e o segundo ilustra estratégias argumentativas de licenciandos em Matemática na produção de provas sobre trapézio. A importância do *design* da tarefa, a dinâmica interativa e a movimentação do raciocínio em dois domínios (construtivo e relacional) são contribuições da pesquisa com vistas à produção de provas mais autorais.
Palavras-chave: Geometria dinâmica. Quadriláteros. Toques em tela. Justificativas.

INSTIGATING JUSTIFICATION AND PROMOTING PROOF STRATEGIES REGARDING QUADRILATERS WITH FREEGEO APP

Abstract: Mobile devices with touches on screen (MDwTT) arrive in the classroom in the student's pocket or hands. They can be used in favor of mathematical learning. This article presents two examples of how geometry can be explored and enriched by the use of the FreeGeo APP. The first one illustrates students of High School conceptualizing and justifying properties regarding quadrilaterals, and the second illustrates argumentative strategies of pre-service mathematics teachers in the production of proofs about trapezium. The importance of the task design, the interactive dynamic and the movement of reasoning in two realms (constructive and relational) are contributions of the research in order to produce more authorial proofs.
Keywords: Dynamic geometry. Quadrilaterals. Touchscreen. Justifications.

Introdução

Dispositivos[2] móveis com toques em tela (DMcTT) – *smartphones* e *tablets* – incorporam o cotidiano de alguns indivíduos e abrem um leque de interações e aprendizagens,

[1] Doutor em Educação Matemática. Professor, UFRRJ/PPGEduc; PPGEduCIMAT. www.gepeticem.ufrrj.br. E-mail: mbairral@ufrrj.br

[2] A partir do *Dicionário Houaiss* dispositivo aqui será considerado como um conjunto de componentes físicos ou simbólicos que integram ou estão conectados a um *smartphone*, e que constituem um ente capaz de compartilhar, transferir, armazenar ou processar dados.

inclusive para o campo da educação. O uso que fazemos de um DMcTT possui intenções e sentidos em determinado contexto. As manipulações diretamente na tela constituem o que denominamos “toques”. Também realizamos manipulações *a partir da* tela e *com* a tela, ou melhor, *com* o dispositivo. Essas formas de interação e de comunicação também podem compor e enriquecer o processo de elaboração de provas matemáticas.

A produção de provas na formação inicial de professores de matemática constitui um desafio. Esse obstáculo, na visão de Cirillo e Herbst (2010), pode ser justificado pelos aspectos históricos e culturais que permeiam o ensino de matemática, ou seja, os autores afirmam que em geral tendemos a ensinar do mesmo modo que nos foi ensinado. Infelizmente, conteúdos de geometria ainda estão ausentes nas aulas e, quando presentes, estão orientados por planejamentos que priorizam recursos convencionais (papel e lápis, predominantemente), figuras estáticas, memorização de nomes de formas ou de fórmulas, pouca prática argumentativa e potencializadora de novas descobertas e de formas diferentes de raciocinar. Particularmente, no tocante à produção de provas, a prática restringe-se à demonstração de teoremas, partindo da certeza de que os alunos já conhecem os conceitos e as propriedades ali envolvidos. Todavia, nossa vivência se mostrou diferente. Por exemplo, em um momento de sondagem sobre polígonos, obtivemos respostas do tipo:

> **Licenciando 1:** *É uma figura plana fechada com o número de lados superior a 3.*
> **Licenciando 2:** *Um objeto com faces separadas por arestas e arestas separadas por vértices, onde arestas não podem ter apenas um ponto de interseção com as arestas, vértices e faces.*
> **Licenciando 3:** *Polígono é uma região plana, que é limitada.*
> **Licenciando 4:** *Figura (desenho) fechada formada por segmentos de retas.*
> **Licenciando 5:** *Figura geométrica formada pela união de segmentos de retas.*
> **Licenciando 6:** *Figura com muitos lados e que seja fechada.*

Se nossa prática estivesse pautada apenas na lógica do certo ou do errado, poderíamos dizer que os futuros professores todos estariam reprovados quanto à definição de polígono. Considerando, ainda, que são respostas de licenciandos em fase final de graduação e que cursaram três disciplinas[3] relacionadas à geometria, suas definições poderiam aumentar o espanto de um formador. Não é o nosso caso! Essa não é a nossa postura de desenvolvimento profissional docente.

Educar é um ato presente, de transformar a realidade conhecida a partir do pontualmente observado, e não de proposição a partir de olhares globais e não singulares. Educar não é apenas projetar decisões para um futuro, que é desconhecido. Educar é estranhar-se, é incomodar-se, no/com o presente vivido, experienciado e corporificado! Na formação de professores esse tem sido nosso princípio, dentre outros. Cada uma das respostas anteriores nos permite uma enriquecedora viagem de aprendizagem pela geometria, seus objetos e propriedades.

Neste artigo[4] mostramos dois episódios analíticos de como a pesquisa de desenvolvimento (MATTA; SILVA; BOAVENTURA, 2014) que realizamos busca aprimorar o aprendizado sobre quadriláteros (conceitos, propriedades, justificativas e produção de provas) em práticas nas quais as tarefas foram elaboradas para uso no aplicativo *FreeGeo*[5] (em *tablet* e *smartphone*)[6]. Iniciamos situando estudos focados sobre os processos de prova em educação matemática e tecemos reflexões sobre domínios de prova, quando os DMcTT passam a compor a dimensão físico-expansiva do nosso corpo.

Provas matemáticas com o uso de ambientes de geometria dinâmica

O uso de *softwares* matemáticos no ensino de demonstrações geométricas pode constituir um caminho em busca de uma aprendizagem significativa para nossos alunos. É importante observar que nesta etapa de revisão literária não nos limitamos a trabalhos que visassem apenas ao uso de aparelhos que possuem a tecnologia *touchscreen*, pois encontramos poucos estudos nesta área com a temática demonstração ou processos de justificativas matemáticas.

Dalcín e Molfino (2012a), em sua pesquisa na licenciatura em matemática e com o

---

[3] Tópicos de Geometria Espacial, Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas, cada uma de 60 horas.

[4] Oriundo de projeto de pesquisa financiado pelo CNPq.

[5] Dispositivo gratuito e que funciona em sistemas Android e iOs. Disponível na Internet ou na Playstore.

[6] Agradeço a Bárbara Caroline C. C. da Silva e Elen Roza da C. Silva pela parceria nesta pesquisa.

software GeoGebra no Uruguai, propõem atividades que possibilitam a construção e a justificativa de propriedades de quadriláteros que emergem a partir da classificação desses polígonos, realizada pelos próprios alunos. Nessas atividades os estudantes transitam entre o uso do computador, o papel e o lápis. Os autores apontam que inicialmente os quadriláteros notáveis são, em geral, os que mais se destacam nas respostas dos alunos, como se fossem os únicos tipos de polígonos com quatro lados.

Ao solicitarem que os estudantes definam alguns quadriláteros, emergem diversas respostas que implicam diferentes classes para um mesmo tipo de polígono. Além da dificuldade que os discentes apresentam para discernir se uma definição é equivalente ou não a outra, assim como para desenhar tais quadriláteros, o modelo de figuras com lados paralelos às margens da folha são os mais frequentes (DALCÍN; MOLFINO, 2012a). Os resultados por eles obtidos destacam a originalidade nas classificações e nas justificativas que no decorrer das implementações surgiram dos próprios estudantes, os quais propõem classificações e definições diferentes, inclusive, das apresentadas nos livros didáticos. A construção dinâmica realizada no GeoGebra facilitou a observação das propriedades e a busca por argumentos dedutivos.

Em um contexto diferente do relatado anteriormente, Dalcín e Molfino (2012b) apresentam o relato de um experimento realizado com docentes de matemática durante um curso de formação continuada no qual foram propostas atividades realizadas com o papel e o lápis, e com o GeoGebra, em que trabalhavam conceitos sobre polígonos regulares e a construção de mosaicos. Para os pesquisadores, essa experiência possibilitou aos professores – que em sua maioria demonstravam uma concepção da matemática como um produto acabado de resultados, axiomas, teoremas e algoritmos – vivenciar a matemática como um processo de construção, em que não se conhecem todas as respostas de antemão e é preciso formular conjecturas[7] e buscar argumentos que as sustentem. O destaque para a complementação pelas tecnologias utilizadas nesse contexto constitui um dos resultados apontados pelos autores, pois estes afirmam que o uso do *software* auxiliou no avanço de algo difícil de se realizar com o papel. Além disso, o professor se coloca no lugar do aluno

[7] Conjectura é uma suposição, uma ideia hipotética que permite algum tipo de exploração, verificação, validação (prova) ou refutação.

enquanto aprendiz, fazendo e criando matemática.

O estudo de Cirillo e Herbst (2010) aborda a forma como problemas alternativos de demonstração geométrica e a diversidade nos modelos de provas podem auxiliar no ensino de demonstrações. Mesmo não estando essa pesquisa diretamente ligada ao uso de ambientes de geometria dinâmicas (AGD), observamos que as propostas de tarefas apresentadas constituem um campo fértil de exploração para o uso de ambientes de geometria dinâmica. Os pesquisadores chamam a atenção para a ampliação do papel do aluno como um sujeito mais ativo nas demonstrações geométricas.

Villiers (2001) relaciona as diferentes funções que a demonstração matemática pode assumir com o uso de AGD, especificamente, o *Sketchpad*. As funções abordadas são: verificação, explicação, sistematização, descoberta, comunicação e desafio intelectual. Para Villiers (2001, p.31), “tradicionalmente a função da demonstração foi vista exclusivamente como dizendo respeito à verificação da correção das afirmações matemáticas”, e serve apenas para remover dúvidas pessoais ou de cépticos. O estudo aponta ainda o papel docente como um componente importante para desafiar o aluno a buscar, conjecturar, argumentar e explorar as diferentes funções que a demonstração matemática pode nos proporcionar.

Sinclair e Robutti (2013) apresentam um estudo teórico que relaciona o ensino e a aprendizagem com o ambiente de geometria dinâmica e o ensino e a aprendizagem de demonstrações matemáticas. Além de revisarem como esses temas estão sendo desenvolvidos ao longo das últimas décadas nas pesquisas, as autoras discutem a natureza epistemológica e cognitiva de algumas ferramentas dos AGD e suas relações com os processos de provas. As pesquisadoras apontam que precisamos de novos modelos ou percursos de aprendizagem que possam dar conta do impacto da AGD no desenvolvimento do pensamento do aluno. Mais uma vez o papel docente é destacado como um elemento crucial neste contexto, pois é responsável por enfatizar as relações entre os objetos, durante a tentativa de introduzir os alunos no mundo teórico da geometria. Para as autoras, é preciso investigar mais profundamente como o professor pode subsidiar e lidar com as implicações cognitivas e epistemológicas das ferramentas nesse tipo de ambiente.

Ng e Sinclair (2015) relatam duas atividades que visam trabalhar com a ideia de cisalhamento de polígonos no AGD com toques em tela com alunos do Ensino Médio. A partir do conceito de cisalhamento, as pesquisadoras almejam desviar a atenção dos alunos das fórmulas que eles já memorizaram (nos anos anteriores de escolaridade) para observar e explorar a comparação e o raciocínio sobre as formas geométricas propostas. Seus resultados apontam a mobilidade como um ponto positivo do uso do *iPad*, pois facilitou o compartilhamento da tela, além da circulação do aparelho pela sala entre os alunos. Produções de gestos, diagramas no papel e o próprio discurso dos alunos dão indícios da internalização dos artefatos semióticos construídos, explorados e manipulados na tela do dispositivo. A manipulação com mais de um toque na tela, nos casos estudados, foi pouco explorada. O lápis e o papel funcionaram como um suporte para a resolução dos problemas propostos no momento inicial, devido ao não conhecimento das ferramentas do *Sketchpad*, o que foi se modificando à medida que os alunos exploravam a atividade e se apropriavam do movimento de arrastar.

Desde o uso do Logo (a geometria da tartaruga), Healy e Hoyles (2001) observaram que, no decorrer da implementação das tarefas propostas, os alunos explanavam suas estratégias e ideias para as construções geométricas realizadas no AGD, pois objetivavam desenvolver uma proposição e até mesmo uma prova matemática. Com relação aos resultados discutidos por Healy e Hoyles (2001), destacam-se o enriquecimento do processo de formulação de conjecturas e problematizações. As estudiosas alertam para a dificuldade que os alunos têm em manusear as ferramentas limitadas que o *software* disponibiliza. Uma possível alternativa para este problema seria a possibilidade de comunicar ao sistema novas entradas por meio da programação.

Ainda mediante o uso do *Cabri Geomètrie*, com alunos do Ensino Médio e com o objetivo de introduzir o pensamento teórico-matemático, Mariotti (2000) se dedica a discutir sobre o processo de mediação semiótica relacionado ao surgimento do significado de prova. A autora ressalta a importância da ferramenta para arrastar, pois, uma vez que a construção mantenha suas propriedades no movimento de arrasto, o resultado é verdadeiro, e a proposição pode ser provada a partir de uma prova geométrica. Além disso, os procedimentos lógicos utilizados também precisam ser considerados e aceitos.

Para Mariotti (2000), os alunos possuem dificuldade em gerir a sistematização teórica do conhecimento indutivo, pois questionam por que propriedades bem conhecidas devem ser provadas, e longos argumentos são usados para apoiar a sua verdade, que é tão evidente para os estudantes. Esta dificuldade está atrelada ao ensino da geometria por meio de um conjunto de definições que descreve figuras geométricas e proposições, indicando propriedades que, muitas vezes, têm um alto grau de evidência (MARIOTTI, 2000). Portanto, segundo Mariotti, a abordagem dedutiva envolve dois aspectos entrelaçados: por um lado, a necessidade de justificação e, por outro, a ideia de um sistema teórico no qual essa justificação pode se tornar uma prova.

Mariotti (2000) nos diz que a relação com o conhecimento geométrico é modificada pela mediação oferecida pelas peculiaridades do *software*. Esta transformação está estritamente relacionada com a passagem de uma geometria intuitiva, como uma coleção de propriedades evidentes, para uma geometria dedutiva, como um sistema de relações entre afirmações, validado pela prova. Além disso, segundo Mariotti (2000), o processo de internalização transforma os comandos disponíveis no menu de Cabri – sinais externos – em ferramentas psicológicas internas que controlam, organizam e dirigem o pensamento geométrico dos alunos, produzindo, simultaneamente, conjecturas e provas.

No decorrer desta revisão sobre os processos de prova em educação matemática, podemos observar que a concepção fechada de que as provas em matemática estão orientadas somente para a validação de determinado resultado (previamente dado pelo professor) tem se modificado nas pesquisas e, com os AGD, a produção de provas tem se constituído um campo fértil para exploração e potencialização de diferentes estratégias argumentativas e de formas autorais de aprender a provar. Nossa pesquisa busca contribuir, trazendo resultados de implementações feitas com alunos do Ensino Fundamental e com futuros professores de Matemática, mediante o uso de dispositivos móveis com *touchscreen*.

Toques em tela e domínios de raciocínio em produção de provas

Manipulações *touchscreen* são *performances* realizadas por um usuário na tela de um dispositivo. Essas manipulações – particularmente, os toques – podem revelar aspectos do pensamento matemático. Compreendemos manipulações *touchscreen* como uma forma de expressão do desenvolvimento do pensamento matemático, uma vez que essas manipulações são vistas como ações humanas, contextualmente situadas e conscientes (BAIRRAL; ASSIS; SILVA, 2015). Portanto, ratificamos que as tecnologias digitais recriam e modificam, por meio das interações, o modo como compartilhamos informações e como nos relacionamos com o mundo e com o outro. E também modificam a nossa subjetividade e os processos cognitivos que desenvolvemos em uma determinada aprendizagem.

Arzarello, Bairral e Dané (2014) apontam dois domínios em suas pesquisas com DMcTT: o construtivo, que envolve toques simples e específicos na tela (como duplos toques, por exemplo) e observações isoladas, geralmente, em momentos de construção de objetos matemáticos ou verificação de uma observação pontual; e o relacional, que abrange a combinação e a articulação de múltiplos toques mais rebuscados ou não, como por exemplo: o movimento de aproximar e arrastar simultaneamente, ou somente o aproximar. Neste último domínio, a consideração de aspectos globais na observação é uma característica marcante. Além disso, a conjectura é um tipo de ação do pensamento específico do domínio relacional.

No domínio construtivo, o olhar do sujeito se volta a aspectos pontuais do objeto geométrico explorado no aplicativo, isto é, são momentos em que as manipulações realizadas na tela possuem a função de medir, construir, editar e nomear elementos. Como o processo de criação de um objeto geométrico no DMcTT envolve a seleção de ferramentas específicas do APP, as manipulações de toques são mais frequentes. Contudo, os pesquisadores sublinham que o raciocínio neste domínio está orientado para o olhar específico de um elemento do objeto explorado (ARZARELLO; BAIRRAL; DANÉ, 2014).

Com relação ao domínio relacional (ARZARELLO; BAIRRAL; DANÉ, 2014), as manipulações na tela passam a ter a função de deformar (ou não) a figura por meio do arrasto, aproximar o objeto a figuras familiares e aumentar ou diminuir a figura. Especificamente sobre o raciocínio, os estudiosos destacam a emergência de conjecturas, hipóteses, observação de relações, questionamentos e refinamento etc., como elementos pertinentes ao domínio relacional.

Observação, exploração, verificação, formulação de hipótese(s) e refinamento conceitual ou de propriedades são estratégias de raciocínio importantes no processo de elaboração de provas. No domínio relacional, o refinamento de conjecturas torna-se mais presente, pois os movimentos de arrastos realizados na tela geralmente visam à aproximação do objeto para algo conhecido pelo estudante, e nesses momentos o olhar do graduando para a variação dinâmica da construção na tela contempla observação de relações e propriedades. No âmbito construtivo, aspectos pontuais de construção e de verificação costumam predominar no raciocínio dos sujeitos.

Os dois domínios são importantes e estão inter-relacionados. O que é construído passa a ser explorado, analisado, refinado ou refutado. Ambos envolvem pensamento. Geralmente é no domínio relacional que novas descobertas matemáticas emergem. Enquanto no contexto construtivo temos toques (simples, duplos etc.) na tela, eles podem não ser necessários no domínio relacional. Todavia, no relacional, arrastos e movimentos para aproximar figuras são recorrentes (SILVA; BAIRRAL, 2019).

Em DMcTT a aprendizagem também ocorre quando o sujeito produz significados a partir da observação e da análise de uma forma estática ou em movimento para objetos geométricos diversos (conceitos, formas, propriedades etc.). A conjunção nas diferentes formas de manifestação da linguagem (fala, gestos, toques em telas etc.) ou de registro (diagramas e outros registros escritos, telas com construções no dispositivo etc.) dá indícios da apropriação dos artefatos explorados, manipulados e construídos na tela do dispositivo (NG; SINCLAIR, 2015). A relação entre esses objetos e a comunicação ocorre sincronamente, e todos expressam pensamento.

No ensino de quadriláteros, conceituar, classificar, identificar e compreender propriedades devem ser vistos como processos inter-relacionados e sem valorização de alguns deles – geralmente, nomear e definir. Todos eles devem ser continuamente potencializados por outro processo importante: visualizar (uma construção estática ou em movimento na tela). Vejamos como estamos produzindo conhecimento nessa direção.

Ensinos e pesquisas com DMcTT: duas configurações

Ilustramos e analisamos dois exemplos provenientes de investigações (BAIRRAL; SILVA, 2018; BAIRRAL; SILVA, 2019; SILVA, 2017; SILVA; BAIRRAL, 2019) desenvolvidas em nosso grupo de pesquisa. Nelas trabalhamos com quadriláteros, por ser um conteúdo presente no currículo escolar, porém ainda explorado mediante recursos convencionais e com figuras estáticas, geralmente apresentadas no quadro-negro ou em papel. No Quadro 1 sintetizamos algumas das características dos estudos.

Quadro 1: Síntese dos dois exemplos apresentados.

	Exemplo 1 (BAIRRAL; SILVA, 2018)	**Exemplo 2** (SILVA, 2017)
Contexto/Sujeitos	Alunos do 2.º ano do Ensino Médio (16-20 anos) de uma Escola Pública Estadual.	Licenciandos em Matemática (20-22 anos) de uma Universidade Federal.
Coleta de dados	Diário do pesquisador, respostas escritas para as tarefas, as observações e as conversas ao longo das aulas, gravações de áudio e vídeo.	Diário do pesquisador, respostas escritas para as tarefas, as observações e as conversas ao longo das aulas, folha de ícones, gravações de áudio e vídeo, geração e captura de tela e resoluções no APP.
Tarefa(s) ilustrada (s)	Apêndices I, II e III	Atividade 2 (Quadro 2)
Foco da análise	Conceituação e propriedades emergentes sobre quadriláteros em geral.	Justificativas e produções de prova sobre trapézio.
Período / carga horária	Primeiro semestre de 2016, 12 horas-aula (6 encontros)	Segundo semestre letivo de 2015 (60h)

Fonte: o autor.

Foram utilizados os *smartphones* dos próprios alunos durante as atividades. Não foi preciso conexão à Internet, e o compartilhamento do FreeGeo ocorreu via Bluetooth, mediante o MyAppSharer. FreeGeo é um APP similar ao GeoGebra em termos de construção geométrica, porém é menos robusto e ocupa menos espaço (memória) no *smartphone*.

Partimos do princípio de que a geometria produzida em um DMcTT em tela como o FreeGeo é outra, pois temos novas formas de manifestação da linguagem (ícones variados, formas de medição, observação simultânea de propriedades e formas etc.), de descoberta e verificação de propriedades (BAIRRAL; BARREIRA, 2017). Adotamos o conceito de processos de elaboração de prova (CIRILLO; HERBST, 2010), como as diversas justificativas e representações que compõem a produção de argumentos[8] e demonstrações matemáticas, incluindo os recursos tecnológicos digitais, a produção escrita do aluno, sua fala, seus gestos e demais formas de expressar o pensamento.

[8] Argumento será entendido como questionamento, discordância ou dúvida que resulta em um processo de negociação que auxilia no esclarecimento da ideia emergente.

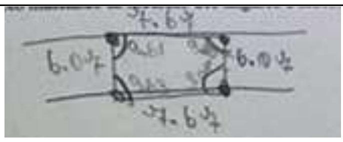
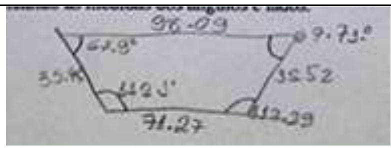
Exemplo 1: Alunos do Ensino Médio deixando emergir ideias sobre quadriláteros

Além da sondagem inicial e da avaliação final, as tarefas foram agrupadas em quatro conjuntos específicos de quadriláteros: 1 (quadrados e retângulos), 2 (losangos), 3 (outros paralelogramos), 4 (trapézios). Como estratégias para coleta de dados, foram utilizadas respostas para as fichas de atividades, registros escritos dos pesquisadores, observações e conversas ao longo das aulas.

A sondagem foi feita mediante o conjunto de possíveis respostas frequentes nos livros didáticos brasileiros, quando trabalhamos com quadriláteros. Por exemplo: "possui um único par de lados paralelos, apenas um par de ângulos retos; quadrado é um paralelogramo; todo quadrilátero tem quatro lados, quatro vértices e quatro ângulos". As alternativas forneciam aos alunos pistas sobre propriedades e conceitos geométricos. A atividade 1 também proporcionou um momento de ambientação com o FreeGeo, no qual os alunos puderam investigar livremente as ferramentas do *software*. Posteriormente, puderam iniciar a atividade de investigação de quadrados e retângulos por meio de uma construção livre no APP. Eles apresentaram dificuldade quanto ao significado de paralelas, ângulo reto, ângulo agudo e ângulo obtuso, porém suas dúvidas foram sendo esclarecidas. No segundo encontro propusemos uma atividade de identificação de quadrados, retângulos e losangos, e uma construção livre de losango.

Uma observação a ser destacada nos dois primeiros encontros foi a construção de quadriláteros sem o uso de alguma(s) propriedade(s) que garantisse(m) a preservação de sua forma. Por exemplo, ao construir um quadrado, se o sujeito só levar em consideração a congruência dos lados e a dos ângulos, a figura se deformará no manuseio. É necessário realizar algum procedimento que garanta o paralelismo de cada par de lados ou a sua perpendicularidade. Algumas respostas para um losango: *todos os seus lados são iguais, ângulos diferentes, diagonais iguais, seus lados são formados por dois pares de paralelas, suas diagonais têm seus ângulos iguais.* Essas respostas são aquelas comumente observadas nos livros didáticos brasileiros, quando caracterizamos este tipo de quadrilátero. A resposta seguinte chama atenção pela ação de mexer. Nela é visível o aspecto dinâmico de movimento do aplicativo e a descoberta do estudante, inserindo esta observação: *“Mexendo*[9] *nos lados do losango ele vira outras figuras como triângulo e quadrado”*. O Quadro 2 sintetiza respostas pautadas em propriedades aparentemente influenciadas pelas respostas indicadas nas atividades e exemplos associados ao manuseio do dispositivo, particularmente, pela sua possibilidade de movimento.

Quadro 2: Síntese de justificativas dos alunos.

	Exemplo de resposta pautada em propriedades explicitadas nas fichas de atividades	Exemplo de resposta orientada pelo manuseio do *software*
Sobre losango	*“Todos os seus lados são iguais.”*	*“Mexendo nos lados do losango ele vira outras figuras como triângulo e quadrado.”*
	“Que os ângulos opostos sempre têm o mesmo valor.”	*“Observei que as medidas se movimentam conforme mexe e também os valores são iguais nos lados opostos.”*
Sobre trapézio	*“As paralelas sempre permanecem em lados totalmente diferentes.”*	*“Por mais que eu mexa, as paralelas do trapézio nunca deixam de existir.” (Patrick)*
		Que os ângulos e os lados não são da mesma medida.
		

Fonte: Bairral e Silva (2018).

Os dois grupos de respostas se relacionam e não são excludentes. É interessante destacar o tipo de justificativa dada a partir do manuseio do APP. Isso mostra que os alunos estavam pensando com[10] esse dispositivo e não se detiveram somente nas respostas das fichas. Em cada encontro era feita uma conversa sobre o estudado no anterior. Uma curiosidade é que o conceito de paralela foi recorrente em todos os encontros, e os discentes sempre estiveram atentos à confirmação do paralelismo de certos lados. Ao longo dos encontros também conversamos sobre quais quadriláteros iam se encaixando em mais de uma classe (quadrados, retângulos, losangos, paralelogramos e trapézios), à medida que surgiam as características de cada um durante as atividades.

Na quarta linha ilustramos como dois estudantes observaram que os trapézios não

[9] Sublinhados dos pesquisadores para ressaltar a dimensão corporificada da reflexão discente.
[10] O *pensar com* implica a natureza conjuntiva da reflexão, que não isenta a tecnologia. Nessa conjunção movimentos, justificativas, conceitos e propriedades estão em processo constante de apropriação.

precisam de ângulos e lados de mesma medida e que as paralelas permanecem sendo sempre paralelas. Cabe trazer aqui a justificativa sobre a condição de existência de um trapézio a partir da ação de mexer: *"Por mais que eu mexa, as paralelas do trapézio nunca deixam de existir"*. Na quinta linha mostramos como os discentes vão transformando os polígonos no APP e fazendo seus registros no papel. Eles brincaram, dizendo não ter coordenação motora para ajustar os ângulos com os movimentos de seus dedos, até que todos tivessem medida de 90º, no caso do retângulo. É também interessante esse registro de medidas usando numeração decimal, favorecido pelo dispositivo, coisa que em um desenho no papel seria improvável.

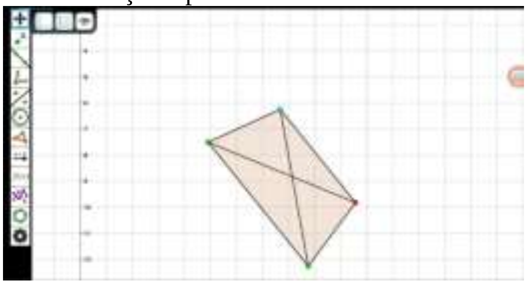
Nesse protocolo analítico mostramos a importância de potencializar nos alunos a explicitação do seu entendimento mediante justificativas variadas e ressaltamos que a cognição dos estudantes não ocorre isoladamente, ou seja, manifesta-se ora em suas falas e produções escritas, ora nos manuseios com o *smartphone*. O que temos é o desenvolvimento corporificado do pensamento dos estudantes, dialeticamente movimentado nesse amplo espectro linguístico-cognitivo (BAIRRAL, 2017).

A seguir mostraremos um exemplo focado no trapézio, cuja abordagem em aula costuma ficar restrita à formula para o cálculo de sua área e sem ênfase em processos de prova de algumas de suas propriedades.

Exemplo 2: Licenciandos em Matemática interagindo sobre trapézio

Esta atividade constitui um recorte de uma sequência didática realizada ao longo de um semestre letivo em uma disciplina da licenciatura (SILVA, 2017). O Quadro 3 detalha a atividade e ilustra uma primeira resposta escrita:

Quadro 3: Atividade no FreeGeo

<table>
<tr><th>Atividade detalhada</th></tr>
<tr><td>2 - (Abra o arquivo no App FreeGeo)
Que tipo de quadrilátero foi construído no aplicativo?
Qual a relação existente entre as diagonais do quadrilátero apresentado no aplicativo?
Elabore uma proposição para esta relação e prove-a.
</td></tr>
<tr><th>RESPOSTA</th></tr>
<tr><td>(Abra o arquivo no app FreeGeo)
a) Que tipo de quadrilátero foi construído no aplicativo? UM TRAPÉZIO ISÓSCELES.
b) Qual a relação existente entre as diagonais do quadrilátero apresentado no aplicativo? SÃO CONGRUENTES,
c) Elaborem uma proposição para esta relação e prove-a.
SEJA O QUADRILÁTERO ABCD UM TRAPÉZIO ISÓSCELES ENTÃO PODEMOS AFIRMAR QUE AS DIAGONAIS AC E BD SÃO CONGRUENTES.
-Prova.
COMO POR HIPÓTESE O TRAPÉZIO É ISÓSCELES, ENTÃO OS LADOS NÃO PARALELOS, CHAMAREMOS DE AB e CD SÃO CONGRUENTES. PODEMOS ENTÃO CONSTRUIR OS TRIÂNGULOS ABC e DCB, QUE SÃO SEMELHANTE POIS, OS ÂNGULOS $\hat{B}$ E $\hat{C}$ SÃO CONGRUENTES E O LADO BC É COMUM, PORTANTO IGUAL. COMO TEMOS AB = CD, ENTÃO, POR SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS TEMOS QUE AS DIAGONAIS AC E BD SÃO CONGRUENTES.
Atividade 2.</td></tr>
</table>

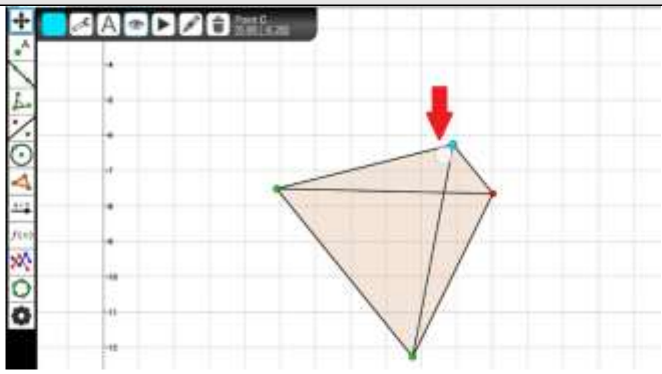
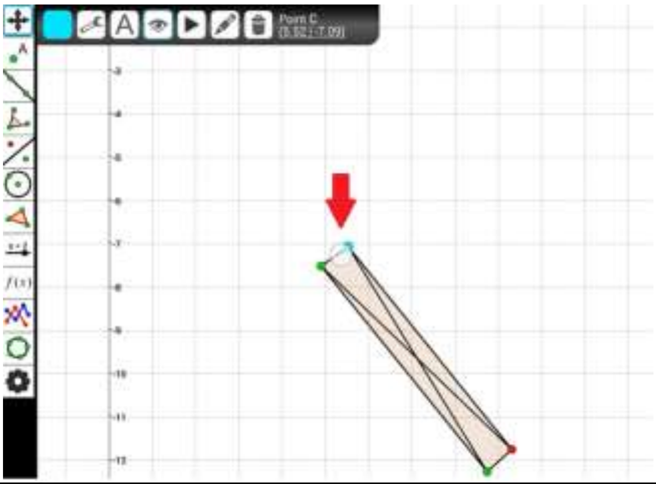
Fonte: Silva (2017, p. 73).

Para a elaboração desta atividade, consideramos a ideia de Cirillo e Herbst (2010), no sentido de propor aos graduandos caminhos inversos para se chegar à elaboração de uma prova matemática. Ou seja, tradicionalmente apresentaríamos a proposição e solicitaríamos que os discentes a provassem. Porém, inspirados nesses autores, iniciamos a atividade por meio da exploração de esquemas em papel e no DMcTT (Apêndice IV)[11]. Além disso, a temática da tarefa emergiu das dificuldades dos licenciandos. Como observamos que as

[11] Acesse o *site* gerado pela pesquisa de Silva (2017) para ver os materiais produzidos: http://barbarasc.wixsite.com/mat-tablets

definições[12] e as propriedades do trapézio pareciam confusas em atividades anteriores, investimos um pouco mais nesse assunto. Vejamos no Quadro 4 um fragmento de vídeo sobre essa atividade. Os índices A1, A2 e A3 são referências às falas dos alunos, e P indica a fala da pesquisadora. As setas em vermelho indicam o local do toque do sujeito na tela.

Quadro 4: Diálogo sobre a atividade do grupo (Parte 1)

Transcrição: 00:00:08 – 00:00:57	**Imagens da tela**
A1: *Ó a gente tá mexendo aqui e a gente percebeu que pode se transformar em outro tipo de quadrilátero.* (fala simultânea à manipulação) *Ó pode ser um retângulo...isso é um retângulo?* (tom muito baixo) **P:** *Mas que tipo de quadrilátero é esse?* **A1:** *Que tipo...* **P:** *É, você falou assim: "pode transformar em outro tipo".* **A2:** *É transformar em outro formato.* **A1:** *É! Ó aqui é um retângulo.* **A3:** *Não. É um trapézio.* **A1:** *Um trapézio ainda?* **A3**: *Ainda é um trapézio.* **A1:** *Sempre vai ser um trapézio?* **A3:** *Sim.* **A1:** *Parece um retângulo.* **A3:** *Não é. É um trapézio.* **A1:** *Por quê?* **A2:** *Porque essas daqui... não são fixas* (tom muito baixo). *Por causa do ângulo, não é de noventa graus, não é?* (parece apontar para algo no diagrama e questiona A3, mas não temos a gravação do grupo somente da tela do *tablet* e o áudio). **A3:** *É. Elas não são paralelas.* **A1:** *Entendi. Então, vai ser sempre um trapézio!*	 

Fonte: Silva (2017, p. 74)

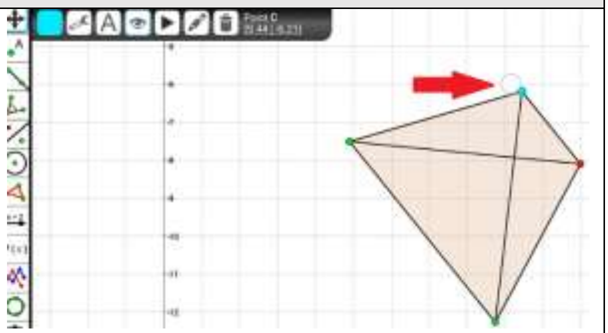
Nesta atividade o domínio relacional de manipulação foi o mais utilizado pelos graduandos (ARZARELLO; BAIRRAL; DANÉ, 2014), pois, como mencionamos anteriormente, o objeto a ser explorado já estava construído. A manipulação de arrasto na tela

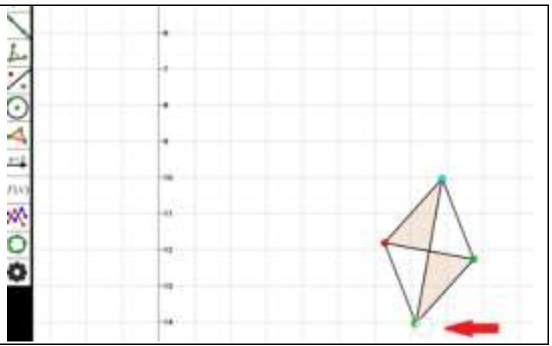
[12] Um trapézio pode ser definido como um quadrilátero com **apenas** um par de retas paralelas ou com, **pelo menos**, um par de paralelas (Apêndice IV). Essas duas definições não são muito conhecidas pelos licenciandos, e é importante que sejam bem discutidas na Licenciatura em Matemática. Posteriormente a essa discussão, cabe adotar uma delas. Na Educação Básica, como no primeiro exemplo deste artigo, não mencionamos essa diferenciação e adotamos a primeira abordagem.

foi utilizada com muita frequência; mesmo quando não havia momentos de diálogos entre os estudantes, um deles continuava a manipular a tela em silêncio. O domínio construtivo ganha destaque, nas manipulações dos alunos, nos momentos de verificação de hipóteses, quando os estudantes utilizam toques simples e pontuais à procura da ferramenta que possibilite a medição dos lados do polígono. Destacamos também o tempo de resposta simultâneo ao reconhecimento da entrada do toque diferente do ato de clicar com um *mouse*.

No fragmento de vídeo (Quadro 4), observamos que as inferências que podem ocorrer no domínio relacional de manipulação não necessariamente serão levantadas pelo aluno que manipula a tela, ou seja, em um contexto de trabalho em grupo os integrantes que não possuem o controle momentâneo também observam a tela e colocam suas conclusões com base na observação da manipulação do outro. Podemos observar isso nas falas: *"***A1:** *É! Ó aqui é um retângulo."* *"***A3:** *Não. É um trapézio."* *"***A2:** *Porque essas daqui... não são fixas* (tom muito baixo)". Ainda, em *"Por causa do ângulo, não é de noventa graus, não é?"*, supomos que quem estava manipulando era o aluno 1 (A1) (porque foi este aluno que iniciou a conversa com a pesquisadora), mas os outros dois integrantes do grupo (A2 e A3) estavam com a atenção voltada para as variantes do objeto quando arrastado por A1, tanto que explicaram e alertaram A1 para observar que sua suposição de ser retângulo estava equivocada. No Quadro 5 apresentamos mais um fragmento de vídeo referente à atividade 2.

Quadro 5: Diálogo sobre a atividade do grupo 2 (Parte 2).

Transcrição: 00:01:44 - *00:03:09*	**Imagens da tela**
A1: *Elas são iguais!* (afirmativa após ler o enunciado do item b). **A3:** *Por quê? Prova aí!* **A1:** *Não sei provar, mas elas são iguais.* (muitas vozes ao fundo). **A3:** *Como que não sabe provar?* **A1:** *Elabore uma proposição, também.* **A3:** *Então, proposição 1: Diagonais de todos os trapézios são iguais... são congruentes... Diagonais de um trapézio* (muitos movimentos de arrasto na tela), *mas esse trapézio parece isósceles. Como é que eu coloco a medida? Esqueci...Aí ela vem e estraga o trapézio, ai pronto!* (a figura é deformada). **A2:** *Isso aqui é um trapézio?* **A3:** *Não mais, você estragou. Não é mais nenhum polígono. Cadê? Volta!* Neste momento eles começam a procurar pelas	

ferramentas, no menu do aplicativo, por uma solução que permita que eles meçam os segmento do polígono explorado. **A3:** *Eu quero a medida, se lembra como conseguir a medida?* **A1:** *É aqui, ah, não, aqui é coordenada do ponto.* **A3:** *Esse aqui dá a medida a mãozinha... Aqui dá. Oito ponto quarenta e oito, oito ponto cinco, oito ponto cinco, cinco sete quatro, cinco sete quatro (5.74). É isósceles!* (A3 parece assumir a manipulação na tela e encontra a ferramenta que estava procurando.).	

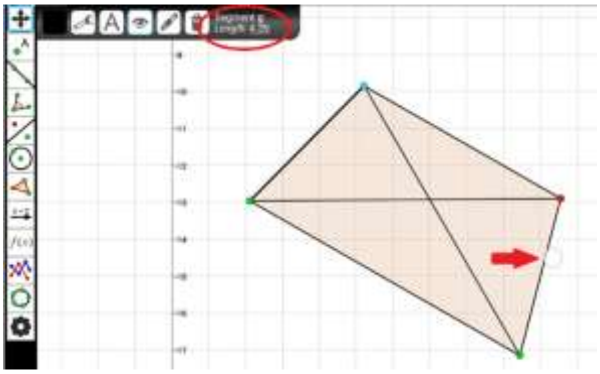
Fonte: Silva (2017, p. 75).

Observando o trecho de vídeo (Quadro 5), ratificamos que a dinâmica no APP neste tipo de atividade contribuiu para a exploração do polígono e a investigação de hipóteses, uma vez que os discentes tiveram que utilizar ferramentas para averiguar suas suposições. Podemos observar este fato na fala: *"***A3:** *Esse aqui dá a medida a mãozinha... Aqui dá. Oito ponto quarenta e oito, oito ponto cinco, oito ponto cinco, cinco sete quatro, cinco sete quatro (5.74). É isósceles!".* Este tipo de investigação não seria possível com papel e lápis, como proposto em Cirillo e Herbst (2010), uma vez que as informações precisariam ser dadas previamente, já que no papel não há a possibilidade de movimentar o desenho. Além disso, a figura no aplicativo permitiu que os discentes observassem uma classe (figura) de trapézios, e não somente uma única representação, um caso particular, um desenho (HEALY; HOYLES, 2001).

Chamamos atenção também para a deformação da figura. Segundo Mariotti (2000), a não deformação da figura garante geometricamente a demonstração da proposição; contudo, neste tipo de *software* destacamos que a deformação da figura nem sempre significa que a construção não foi realizada com base nas propriedades do conceito explorado. A construção geométrica feita para gerar o trapézio, por exemplo, também possui o caráter dinâmico, o que implica nas variações de objetos que teremos, ao realizarmos a manipulação de arrasto.

Outro aspecto importante a ser ressaltado é que os graduandos exploraram a função da descoberta e da explicação que a demonstração pode assumir, assim como Villiers (2001) aborda. O processo de investigação e organização dos enunciados lógicos é um momento importante de descoberta para os sujeitos (VILLIERS, 2001). Além disso, a demonstração que eles construíram no fim da atividade justifica a proposição que elaboraram. Portanto, notamos que a demonstração foi realizada primeiro a fim de justificar e verificar a hipótese que eles tinham como proposição. Vejamos a fala que confirma nossa hipótese: *"***A1:** *Vamos primeiro elaborar a proposição. Não, melhor a gente provar primeiro."* (Quadro 6).

Quadro 6: Diálogo sobre a atividade do grupo (Parte 3).

Transcrição: 00:04:14 – 00: 05:18	Imagens da tela
A1: *Elas são congruentes.* **A2:** *Elas se cortam ao meio?* **A1:** *Não. Ao meio, não. Só o quadrado que se corta no meio.* **A3:** *O quadrado e o losango também.* **A1**: *É verdade.* **A3:** *Mas tu mexeu de novo! Agora elas não são mais iguais.* (manipulações de arrastos na tela) **A1:** *São sim, cara. Do jeito que ela construiu elas são sempre iguais...Ih! Não.* **A3:** *Não são.* (Apesar de os estudantes pensarem que os segmentos não paralelos do polígono que arrastaram possuem medidas diferentes, o que ocorreu na verdade foi que, quando eles tocaram nos segmentos, eles arrastaram a figura tão sutilmente que não notaram que a medida não variou de um segmento para o outro, eles é que mexeram novamente na figura, ao tentar medir.) **A1:** *São congruentes.* **A3:** *É, são congruentes.* **A1:** Começa lendo o enunciado do item b e diz: *Puts grila! Vamos primeiro elaborar a proposição. Não melhor a gente provar primeiro.* **A2:** *É!* **A3:** *Ó, sei que essas duas são paralelas e essas (...).* (Neste momento do vídeo não há manipulações na tela.)	

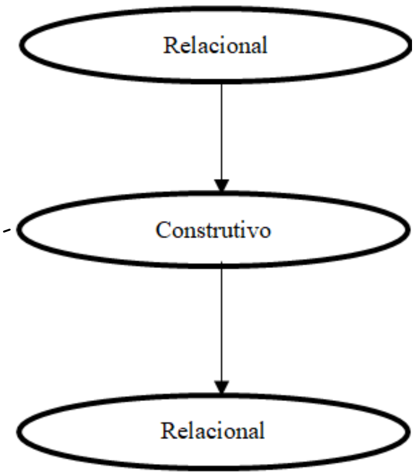
Fonte: Silva (2017, p.76).

Um ponto negativo que notamos no fragmento do Quadro 6 é a fragilidade do movimento na construção, devido à sensibilidade ao toque na tela do dispositivo, quando feitas manipulações muito sutis, a ponto de confundir as suposições dos estudantes. Como verificado nas falas: *"***A1:** *São sim, cara. Do jeito que ela construiu, elas são sempre iguais...Ih! Não. "***A3:** *Não são."*. Além disso, a característica do aplicativo,[13] de não selecionar por meio do toque direto no objeto que se deseja, é um aspecto de reclamação recorrente nas implementações.

[13] Recomendamos ao leitor que, no momento de leitura deste artigo, relativize essa afirmação, pois a *performance* do dispositivo poderá ter sido atualizada. Uma pequena atualização em um APP pode implicar em uma grande mudança no propósito de uma atividade.

Com relação à construção da argumentação no dispositivo, sintetizamos no Quadro 7 falas que ilustram o raciocínio dos alunos e o seu desenvolvimento cognitivo.

Quadro 7: Síntese da argumentação do grupo.

Recortes da transcrição	Manipulação (domínios)
A1: *Ó pode ser um retângulo...isso é um retângulo?* **A3:** *Não. É um trapézio.* **A1:** *Sempre vai ser um trapézio?* **A3:** *Sim.* **A1:** *Entendi. Então, vai ser sempre um trapézio!(...)* **A1:** *Elas são iguais!* **A3:** *Por quê? Prova aí!* **A1:** *Não sei provar, mas elas são iguais* **A3:** *Então, proposição 1: Diagonais de todos os trapézios são iguais...são congruentes...Diagonais de um trapézio(...)* **A3:** *Esse aqui dá a medida a mãozinha... Aqui dá. Oito ponto quarenta e oito, oito ponto cinco, oito ponto cinco, cinco sete quatro, cinco sete quatro (5.74). É isósceles!(...)* **A1:** *São congruentes.* **A3:** *É são congruentes(...)* **A1:** *Vamos primeiro elaborar a proposição. Não, melhor a gente provar primeiro.* **A2:** *É!* **A3:** *Ó, sei que essas duas são paralelas e essas (...).*	

Fonte: Silva (2017, p.77).

No Quadro 7 podemos observar a importância do diálogo do grupo juntamente com a exploração do *software* na construção do raciocínio coletivo e na elaboração da prova matemática. As palavras em negrito nos ilustram, de forma resumida, o caminho percorrido pelo grupo. Expressões como *"pode ser um"*, *"isso é ...?"* nos indicam as primeiras hipóteses, juntamente com a manipulação de arrasto. Em seguida, a sentença "*Sempre vai ser um...?"* nos mostra uma mudança, ou seja, o que antes era uma dúvida começa a ser esclarecido com o incremento de conhecimentos matemáticos relacionados ao tema. Os licenciandos chegam a uma conclusão, quando anunciam *"Entendi. Então, vai ser sempre"*. Formulam uma nova hipótese, pautada em conhecimentos já observados em outra situação, como nos indicam suas falas: "*Não sei provar, mas elas são iguais"*, *"Diagonais de todos os trapézios são iguais"*. Neste momento, pausam a formulação da proposição para verificar outra hipótese (se o trapézio era isósceles): "*Esse aqui dá a medida"*, *"É isósceles!"* (manipulação toque simples, domínio construtivo) e concluem seu raciocínio: *"É, são."* Retornam à elaboração da proposição, mas começam pela prova, como podemos notar em *"elaborar a proposição",* seguida de *"provar primeiro"*.

Nesta análise ratificamos que a movimentação reflexiva nos domínios construtivo e relacional de manipulação é um processo emergente e sistemático na exploração e na elaboração de conjecturas neste tipo de atividade. Além disso, a dinâmica dialógica com o DMcTT (ou a partir dele) foi um elemento potencializador do processo de argumentação e elaboração de provas mais autorais. As diferentes justificativas ilustradas nos quadros também ratificam como é importante, desde a Educação Básica, favorecer que os estudantes explicitem suas ideias matemáticas e busquem convencimentos para elas.

Conclusões

Este artigo é fruto de uma investigação que parte do princípio de que a geometria produzida em um dispositivo como o FreeGeo é outra, pois temos novas formas de manifestação da linguagem, de emergência e de verificação de propriedades (BAIRRAL; BARREIRA, 2017). Nesse processo cabe olharmos a mudança do discurso matemático como essencialmente corporificada e multimodal. DMcTT não são meios para se alcançar determinado fim. Eles constituem, juntamente com outros recursos semióticos, a dimensão expansiva do nosso corpo. Portanto, não pensamos a partir deles apenas, mas também com eles. Esse conjunto dinâmico de objetos e de relações entre objetos propicia a emergência de variados modos de construir, explorar, convencer e de raciocinar geometricamente. Todos devem ser valorizados na matemática escolar.

Selecionamos dois exemplos de propósitos matemáticos diferentes: o primeiro para mostrar ideias conceituais emergentes; e o segundo, para ilustrar justificativas e propriedades do trapézio, um quadrilátero ensinado com pouca análise em suas propriedades. Com o primeiro exemplo, mostramos como são importantes desde o Ensino Fundamental práticas que instiguem e potencializem processos de explicitação de ideias e de elaboração de justificativas. Com o segundo, arquitetamos um cenário para desenvolver os processos de ensino e de aprendizagem que contribuíssem para a valorização das diferentes funções da demonstração, a proposição de problemas que tratam de maneiras distintas um mesmo conceito, a valorização dos conhecimentos trazidos pelos sujeitos e a superação de suas dificuldades e medos (CIRILLO; HERBST, 2010; SINCLAIR; ROBUTTI, 2013; VILLIERS, 2001).

Em ambos os exemplos ilustramos e analisamos algumas justificativas de alunos para atividades sobre quadriláteros no *FreeGeo APP*. A partir das tarefas e das diferentes interações estabelecidas, os estudantes foram manipulando suas construções e observando regularidades de acordo com cada figura. Expressões como “mexer”, “mover”, “aumentar” constituem uma nova forma de produzir significado e devem compor o pensamento geométrico quando os DMcTT entram em cena. O manuseio no FreeGeo também contribuiu para a visualização, pois suas construções não são estáticas, o que facilita a exploração de formas variadas, sem perder as características geométricas da construção (DALCÍN; MOLFINO, 2012a).

A prática argumentativa deve ser constantemente estimulada, pois ela contribui para que o professor (ou formador) possa ir aprimorando o seu conhecimento profissional, no sentido de desenvolver estratégias comunicativas para potencializar a continuidade da reflexão e do diálogo que, como vimos, sobretudo no segundo exemplo, flui a partir de conceitos e propriedades não previsíveis, como tende a ocorrer em processos de prova tradicionalmente guiados pelo professor.

A demonstração, portanto, passa a ter a função de envolvimento e descoberta, de um descobrimento não necessariamente de algo novo, mas que provê o entendimento e o refinamento do raciocínio matemático para uma determinada proposição. O sujeito se implica nesse processo. Essa prática contribui didaticamente para um ensino de produção de provas matemáticas com a autenticidade e a autoria dos implicados, uma vez que não há preocupação em seguir um modelo ou uma sequência típica de demonstrações, geralmente sugerida apenas pelo docente.

Cirillo e Herbst (2001) propõem um diagrama com algumas informações, e os alunos devem formular a proposição e provar. Em nossa pesquisa também disponibilizamos esquemas (Apêndice IV); entretanto, com o uso do aplicativo dinâmico, os graduandos puderam manusear e explorar para descobrir as relações existentes entre os elementos que compõem o quadrilátero (veja a atividade no Quadro 3).

As atividades ilustradas e analisadas neste artigo também constituem exemplos que mostram a importância do tipo da tarefa, que possibilitou explorar a função da demonstração para além da comprovação da veracidade da propriedade. Com as situações propostas, os sujeitos exploram e investigam os quadriláteros por meio da manipulação *na* (*com* ou *a partir da*) tela e explicitam justificativas ou constroem uma sequência dedutiva para validar o resultado que perseguem.

Em suma, o desenho da atividade contribuiu para a emergência de ideias, para a constituição de provas e para a produção de argumentos autorais dos graduandos; enriqueceu a dinâmica dialógica entre todos; possibilitou a criação e a exploração de objetos geométricos diferentes dos modelos padrões e estáticos dos livros textos. Portanto, nossa investigação (SILVA, 2017) traz contribuições didáticas (com a implementação de uma dinâmica interativa e de análise compartilhada de respostas pelo próprio coletivo) e cognitivas (com a promoção – e a reflexão sobre elas – de novas formas de justificar e de gerar processos de provas), mediante recursos e estratégias variadas, para aprimorar o conhecimento de futuros professores de matemática.

Defendemos, portanto, que processos de prova em dispositivos com toques em telas transitam dialeticamente entre dois importantes domínios reflexivos: construtivo e relacional. Em um contexto grupal os domínios de manipulação influenciam o raciocínio de todos os envolvidos, e não somente daquele que manuseia o aplicativo. A interação assume também um papel de observação compartilhada, e o sujeito está pensando. A dinâmica dialógica, de manuseios diversos e de observação compartilhada entre os implicados, é potencializada pela manipulação (com ou sem toques na tela) de um DMcTT.

Referências

ARZARELLO, F.; BAIRRAL, M.; DANÉ, C. Moving from dragging to touchscreen: geometrical learning with geometric dynamic software. **Teaching Mathematics and its Applications**, v. 33, n. 1, p. 39-51, 2014. doi:10.1093/teamat/hru002

BAIRRAL, M. A. As manipulações em tela compondo a dimensão corporificada da cognição matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 10, n. 2, p. 104-111, 2017.

BAIRRAL, M. A.; ASSIS, A. R.; SILVA, B. C. C. **Mãos em ação em dispositivos touchscreen na educação matemática**. Seropédica: Edur, 2015. (Série InovaComTic, v. 7).

BAIRRAL, M. A.; BARREIRA, J. C. F. Algumas particularidades de ambientes de geometria dinâmica na educação geométrica. **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, São Paulo, v. 6, n. 2, p. 46-64, 2017.

BAIRRAL, M. A.; SILVA, E. R. da C. Trabalhando quadriláteros em smartphones: alunos de uma escola pública descobrindo e produzindo propriedades. **Debates em Educação**, Maceió, v. 10, n. 22, p. 164-190, 2018. doi:10.28998/2175-6600.2018v10n22p164-190

CIRILLO, M.; HERBST, P. **Moving toward more authentic proof practices in geometry.** 2010. Disponível em: <http://deepblue.lib.umich.edu/handle/2027.42/78169>. Acesso em: 5 nov. 2013.

DALCÍN, M.; MOLFINO, V. Clasificación particional de cuadriláteros como fuente de demostraciones y construcciones en la formación inicial de profesores. **Instituto GeoGebra São Paulo**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. LXXXI - XCVII, 2012a. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/issue/view/557/showToc>. Acesso em: 4 set. 2015.

______. Conjeturas y demostraciones a partir del embaldosado con polígonos regulares. **Instituto GeoGebra São Paulo**, São Paulo, v. 1, n. 1, p. XCVIII - CXII, 2012b. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8934>. Acesso em: 4 set. 2015.

HEALY, L.; HOYLES, C. Softwares tools for geometrical problem solving: potentials and pitfalls. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v. 6, p. 235-256, 2001.

MARIOTTI, A. M. Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. **Educational Studies in Mathematics**, v. 44, p. 25-53, 2000.

MATTA, A. E. R.; SILVA, F. D. P. S.; BOAVENTURA, E. M. Design-based research ou pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI. **Educação e Contemporaneidade – Revista da FAEEBA**, Salvador, v. 23, n. 42, p. 23-36, 2014.

NG, O.; SINCLAIR, N. Area without numbers: Using touchscreen dynamic geometry to reason about shape. **Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education**, v.15, n. 1, p. 84-101, 2015.

SILVA, B. C. C. C. da. **Justificativas e argumentações no aprendizado de quadriláteros**: uma intervenção com papel, lápis e dispositivos móveis. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – PPGEduCIMAT. Seropédica: UFRRJ, 2017. Disponível em: http://www.gepeticem.ufrrj.br/portal/wp-content/uploads/2017/11/disserta%C3%A7%C3%A3o_B%C3%A1rbara-Caroline.pdf. Acesso em: 8 jun. 2018.

SILVA, B. C. C. da; BAIRRAL, M. Justificativas e argumentações no aprendizado de quadriláteros com o Freegeo. *In*: M. BAIRRAL; M. CARVALHO (ed.). **Dispositivos móveis no ensino de matemática:** tablets e smartphones. São Paulo: Livraria da Física, 2019. p. 159-178.

SINCLAIR, N.; ROBUTTI, O. Technology and the role of proof: The case of dynamic geometry. *In*: CLEMENTS, M. A. K. *et al*. (ed.). **Third International Handbook of Mathematics Education**. New York: Springer, 2013. p. 571-596.

VELOSO, E. **Geometria:** temas actuais: materiais para professores. Lisboa: IIE, 1998.

VILLIERS, M. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 62, p. 31-36, 2001.

Recebido em: 16 de junho de 2019
Aprovado em: 20 de setembro de 2019

Apêndice I: Ficha de sondagem inicial

Nome:____ Idade[14]:________

1) Quais os nomes dos quadriláteros que têm:

a) Um único par de lados paralelos?
b) Dois pares de lados paralelos?
c) Quatro ângulos retos?
d) Quatro lados de medidas iguais?
e) Um único par de lados opostos de medidas iguais?
f) Dois pares de lados de medidas iguais?
g) Apenas um par de ângulos retos?
h) Dois ângulos agudos e dois obtusos?
i) Um único ângulo agudo e um único ângulo obtuso?

2) Apenas uma das frases a seguir é falsa. Qual?

a) O quadrado é um paralelogramo.
b) O retângulo é um paralelogramo.
c) O trapézio é um paralelogramo.
d) O losango é um paralelogramo.
e) Todo quadrilátero tem quatro lados, quatro vértices e quatro ângulos.

Apêndice II: Ficha de atividade 1

Nome:____ Idade:________

1) Construa um quadrado no FreeGeo sem usar a ferramenta "polígono regular" e sem o auxílio da malha:

   a) Mova livremente e faça duas observações que considere interessantes.
   b) É possível transformar o seu quadrado em um retângulo? O que diferencia um quadrado de um retângulo?
   c) Construa um retângulo.

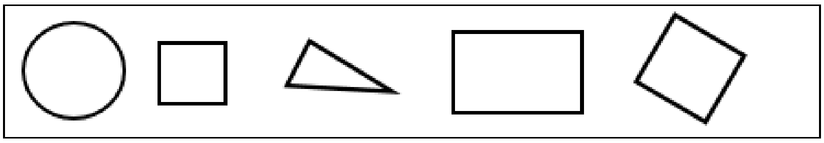
Apêndice III: Ficha de atividade 2

Nome:____ Idade:________

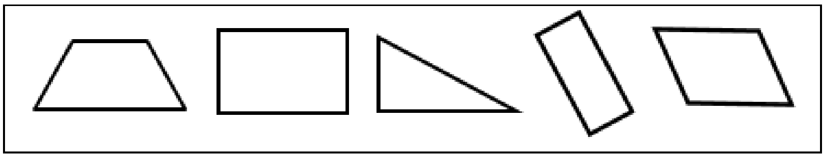
1) Observe as figuras abaixo:
   a) Identifique quadrados nas figuras a seguir:

[14] Embora a idade de cada aluno possa ser informada na primeira ficha, optamos por deixá-la como uma possível informação a ser obtida em cada encontro.

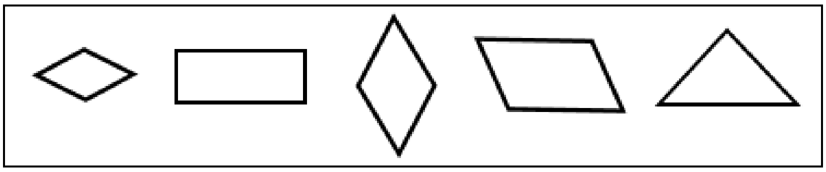
revista
PARANAENSE
DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA



b) Identifique retângulos nas figuras a seguir:



c) Identifique losango nas figuras a seguir:



2) Construa no FreeGeo um losango e faça três observações: sobre seus lados, seus ângulos e suas diagonais.

Apêndice IV: Analisando definições de quadriláteros e classificações

A seguir vocês veem duas organizações esquemáticas (VELOSO, 1998, p. 381) sobre quadriláteros, apresentadas por alunos do 9.º ano. A partir dos conhecimentos e das atividades trabalhadas em sala, identifiquem a definição de quadriláteros implícita em cada esquema. Utilizem o Applet no GeoGebra para construir um mapa conceitual e analisem este tipo de atividade, com tecnologia, relacionando-a com as respostas dos alunos, indicadas nos esquemas abaixo.