

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS E GEOGEBRA: UMA ALTERNATIVA DE ENSINO POR MEIO DE REPRESENTAÇÕES DINÂMICAS

SIMILARITY OF TRIANGLES AND GEOGEBRA: AN ALTERNATIVE OF TEACHING THROUGH DYNAMIC REPRESENTATIONS

Clara Alice Ferreira Cabral
Universidade Federal do Pará – UFPA
cabral.1987@gmail.com

Talita Carvalho Silva de Almeida
Universidade Federal do Pará – UFPA
talita_almeida@yahoo.com.br

Resumo

Neste artigo trazemos reflexões acerca da possibilidade de ensinar o conteúdo semelhança de triângulos a partir de representações dinâmicas utilizando o *software* educacional GeoGebra. Tais ponderações originaram-se de pesquisa qualitativa de mestrado, que articulou o GeoGebra às considerações de Raymond Duval referente à Teoria de Registros de Representação Semiótica. Neste trabalho, apresentamos uma das sete atividades da sequência original, que teve como objetivo explorar as condições de semelhança entre dois triângulos a partir das concepções e atitudes dos sujeitos, tomando a TRRS como referencial teórico. Neste viés, o estudo foi aplicado em uma escola pública da rede municipal de Belém, com alunos do 9º ano do ensino fundamental. Como resultados, foram constatados que os sujeitos, ao produzirem o significado de suas construções no registro figural, são capazes de produzir conjecturas e criar hipóteses que facilitam de sobremaneira a construção dos conceitos e propriedades do conteúdo para, além disso, confirmamos que os recursos tecnológicos educacionais, quando utilizados adequadamente, são instrumentos valiosos para o ensino da matemática, e que os ambientes de representação dinâmica possibilitam aos alunos constatar mais facilmente propriedades do objeto matemático que com outros recursos, como lápis e papel.

Palavras-chave: Semelhança de triângulos, Registros de Representação Semiótica, Tecnologias Educacionais.

Abstract

In this article we bring reflections about the possibility of teaching the content similarity of triangles from dynamic representations using the educational software GeoGebra. Such considerations originated from qualitative master's research, which linked GeoGebra to Raymond Duval's considerations regarding the Theory of Semiotic Representation Records. In this work, we present one of the seven activities in the original sequence, which aimed to explore the conditions of similarity between two triangles from the subjects' conceptions and attitudes, taking

TRRS as a theoretical framework. In this vein, the study was applied in a public school in the municipal network of Belém, with students from the 9th grade of elementary school. As a result, it was found that the subjects when producing the meaning of their constructions in the figural register are able to produce conjectures and create hypotheses that greatly facilitate the construction of the concepts and properties of the content, in addition, we confirm that the educational technological resources, when used properly, they are valuable tools for teaching mathematics, and that dynamic representation environments allow students to more easily verify properties of the mathematical object than with other resources, such as pencil and paper.

Keywords: Triangle Resemblance, Semiotic Representation Records, Educational Technologies.

INTRODUÇÃO

Ao longo de décadas, a geometria foi ensinada em um contexto em que se valorizava o pensamento dedutivo, cujo objetivo era afirmar conceitos geométricos, pautado no desenvolvimento de fórmulas e algoritmos. Nesta perspectiva de ensino, a ênfase estava na prova escrita e no produto e não no processo de construção dos conceitos geométricos, o que negligenciava as principais funções do raciocínio em geometria.

Desenvolver o ensino da geometria de forma que se busque aprimorar o pensamento espacial e o raciocínio exploratório é fundamental para que o seu estudo não se limite apenas à automação, memorização e técnicas operatórias baseadas em processos de abstração. Essa realidade de ensino parece ainda estar presente no cenário educacional brasileiro, damos como exemplo o ensino de Semelhança de triângulos.

Pesquisas desenvolvidas por Haruna (2000); Maciel (2004) e Gimenez (2014) comprovaram que o ensino dessa propriedade de triângulos tem sido prejudicado quando abordado por meio de estratégias que seguem esse viés. Em seus estudos, as autoras apontam que o assunto é visto, em muitos casos, de forma negligenciada e quase sempre enfatizando cálculos algébricos em detrimento das propriedades e construções geométricas.

A semelhança de triângulos é extremamente importante para o desenvolvimento da compreensão geométrica, principalmente por este ser um assunto relevante para a compreensão de outros assuntos da matemática, como relações métricas no triângulo, trigonometria entre outros. Além disso, são recorrentes em estudos nas ciências naturais e sociais, como na física, por exemplo, onde conceito de semelhança está presente em diferentes situações como as que estudam a óptica geométrica.

Em relação ao seu ensino, os PCN (BRASIL, 1998) recomendam que seja conduzido de forma que os alunos possam ter a percepção de sua imensa aplicabilidade nas diversas áreas nas quais ele pode ser empregado, e que eles tenham noção dos processos de ampliação e redução de objetos, plantas, templos, animais, figuras etc.

Coerente com o cenário circunstancial de abordagem do tema ao qual já nos referimos, e com as recomendações de documentos oficiais para o ensino de geometria, avaliamos necessário considerar diferentes estratégias de ensino que não estejam baseadas na incessante valorização de fórmulas e propriedades postas como fatos sem comprovação que os estudantes devem tomar como dogmas. Nesta premissa, não podemos ignorar os avanços em termos de desenvolvimentos de *softwares* educativos voltados para o ensino de geometria, os chamados *softwares* de representação dinâmica.

ENSINO DE GEOMETRIA EM AMBIENTES DE REPRESENTAÇÃO DINÂMICA

Atualmente, diversas pesquisas evidenciam o potencial da utilização de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) para o ensino e a aprendizagem de matemática. Hoje, já contamos com uma abundância de *softwares* desenvolvidos ligados a temas de Matemática como geometria plana, geometria espacial, álgebra, cálculo, linguagem de programação e lógica matemática. A utilização de *softwares* específicos para geometria, que podem alterar as representações via arrastamento da figura construída, mantendo suas propriedades, recebe a denominação de “*Softwares* de Representação Dinâmica”.

A inserção de tecnologias digitais na prática docente é um fenômeno inevitável diante das atuais circunstâncias sociais, em que o professor precisa disputar a atenção do aluno com tecnologias digitais, como os *smartphones*, além da enorme variedade de redes sociais. De acordo com Borba e Penteado (2007), a informática tem ocupado espaço cada vez maior em nossa sociedade, sobretudo no cotidiano de nossos alunos. Vivemos numa sociedade em que prevalecem a informação, a velocidade, o movimento, a imagem, o tempo e o espaço com uma nova conceituação.

Os ambientes informatizados, na área da educação, contribuem para enriquecer as experiências e possibilitam a realização de um trabalho abrangente que promove a pesquisa e a investigação, aspectos intrínsecos à construção do conhecimento que resulta em experiência formativa, criativa e inovadora. Neste contexto, nós educadores devemos estar abertos a novas formas do saber humano, novas maneiras de gerar e compartilhar o conhecimento, isto se não quisermos ficar estagnados em métodos de ensino e teorias de trabalho obsoletas. Na atual conjuntura, a escola não deve manter-se neutra diante desta dimensão tecnológica.

Gravina (2001) considera que, ao nos depararmos frente a um problema geométrico, a primeira ação que fazemos é desenhar a situação, seja numa folha de papel ou na tela de um computador. De acordo com a pesquisadora, para o aluno, nem sempre é claro que o desenho é apenas um esboço físico de representação do objeto, e pode se constituir tanto em um recurso, quanto em um entrave no raciocínio geométrico. Ainda de acordo com a autora, os ambientes de geometria dinâmica ganharam espaço, justamente pela impossibilidade encontrada em manipular objetos geométricos, e pela constante tendência em negligenciar o aspecto conceitual impostos pelas restrições do desenho, constituindo-se um dos maiores obstáculos para o aprendizado de Geometria.

Gravina (2001, p. 89-90), ressalta que a Geometria Dinâmica:

(...) incentiva o espírito de investigação matemática: sua interface interativa, aberta a exploração e à experimentação, disponibiliza os experimentos de pensamento. Manipulando diretamente os objetos na tela do computador. (...) os alunos questionam o resultado de suas ações/operações conjecturam e testam a validade das conjecturas inicialmente através dos recursos de natureza empírica.

A principal característica desses *softwares* é a possibilidade de representações dos objetos matemáticos serem modificadas, mantendo-se suas propriedades inalteradas. Esses programas apresentam a característica de serem de manipulação direta, ou seja, o usuário age diretamente sobre a representação dos objetos que estão na tela. Uma das abordagens que o professor pode trabalhar com tal instrumento é a de exploração de conjecturas que poderão ser verificadas com auxílio das ferramentas disponíveis. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) esse suporte tecnológico ao permitir que representações construídas na tela do computador possam ser manipuladas, facilita a exploração e levantamento de conjecturas.

Para o professor, as contribuições de programas de Geometria Dinâmica são enormes, pois eles permitem que o trabalho docente seja potencializado, uma vez que fornece autonomia e liberdade para criação de aulas. Para Borba e Penteado (2007), uma atividade elaborada com o auxílio de tecnologias possibilita aos alunos a exploração do caráter visual, dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos.

Por outro lado, os autores ressaltam que embora os ambientes de geometria dinâmica apresentem inegáveis contribuições para o ensino de geometria, o avanço no aprendizado depende, em grande parte, da qualidade das tarefas propostas aos alunos e não apenas da disponibilidade de seus recursos tecnológicos e computacionais.

Nesse sentido, o professor deve avaliar qual estratégia é mais adequada e dessa forma, evitar usar o computador segundo uma abordagem em que se utiliza este recurso

meramente como “meio de transmissão de informação ao aluno, mantendo, na verdade, a prática pedagógica vigente. Seria simplesmente informatizar os meios tradicionais de ensino-aprendizagem”. (BORBA, PENTEADO, 2007, p. 39)

Os programas de Representação Dinâmica permitem a realização de experiências que, de outro modo, se tornariam morosas e mais difíceis de executar por parte dos alunos em ambiente lápis e papel, como é o caso de Semelhança de Triângulos. Nesse sentido, a utilização de tais programas pode favorecer a percepção de condições de semelhança quando apresentadas com o auxílio do computador, pois ao movimentarem as representações, os invariantes dos objetos vão sendo observados mais facilmente, o que possibilita perceber possíveis mudanças ou associa-las as definições estabelecidas para as condições de semelhança entre os triângulos.

Considerando que o nosso objetivo central do estudo foi verificar se atividades com enfoque em representações dinâmicas podem contribuir para o desenvolvimento de conhecimentos em semelhança de triângulos, utilizamos como teoria principal para fundamentar a pesquisa a Teoria de Registros de Representação Semiótica – TRRS, elaborada por Duval¹(2009; 2011; 2012).

OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

As dificuldades inerentes aos conteúdos matemáticos podem ter origem, principalmente, na forma como são representados. Em matemática, como bem lembra Duval (2009), toda a comunicação se estabelece com base em representações, seja uma escrita decimal ou fracionária, os símbolos, os gráficos, os traçados de figuras, dentre outros, e de acordo com o autor, essas representações não podem nunca ser confundidas com os objetos matemáticos, sob pena de que não “haverá compreensão em matemática se não existir essa distinção.” (DUVAL, 2009, p. 14).

Para compreender melhor Duval é preciso apresentar como o autor concebe o conceito de sistema semiótico. O autor afirma que um sistema semiótico é composto de signos que possuem convenções e regras próprias de formação. Já os signos estão no lugar de algo; é algo que designa, denota ou representa alguma coisa a alguém sob algum aspecto. Dentre os muitos sistemas de representação semiótica, aponta ainda que os

¹Raymond Duval é filósofo e psicólogo de formação. Desenvolveu estudos em Psicologia Cognitiva no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (Irem) de Estrasburgo, na França, no período de 1970 a 1999. Atualmente é professor emérito na Université du Littoral Cote d’Opale, França.

sistemas semióticos de representação devem cumprir três atividades cognitivas inerentes a toda representação:

- Formar uma marca ou um conjunto delas que se identifiquem como uma representação de alguma coisa;
- Transformar representações apenas utilizando as regras próprias do sistema, de modo a obter outras que possam ter vantagens, em comparação com àquelas iniciais;
- Conversão de representações entre os diversos sistemas de representação, de forma que as outras representações permitam explicar outras significações relativas àquilo que é representado.

Contudo, nem todos os sistemas semióticos permitem essas três atividades cognitivas fundamentais, por exemplo, o código Morse ou código da rota. Mas a linguagem natural, as línguas simbólicas, os gráficos, as figuras geométricas, etc. permitem tais atividades. Sendo assim o autor define representação semiótica como:

[...] produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. (DUVAL, 2009, p. 21)

De acordo com o autor, não é possível estudar fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer a noção de representação, uma vez que nenhum conhecimento pode ser mobilizado sem uma atividade de representação. Ainda de acordo com Duval (2009) um objeto matemático (os números, as retas, os triângulos etc.) não pode ser confundido com sua representação, sob pena de que não “haverá compreensão em matemática se não existir essa distinção.” (DUVAL, 2009, p. 14).

O que se observa de modo geral, é exatamente essa confusão da representação com o próprio objeto matemático. Toda confusão entre esses termos pode provocar, com o decorrer do tempo, uma perda da compreensão das propriedades matemáticas. Um mesmo objeto matemático pode ser representado de formas diferentes. A Figura 1 traz um esquema de objeto matemático e quatro possíveis registros.



Figura 1 - Possíveis registros de representação de um objeto matemático

Fonte: As autoras (2019)

Conforme já mencionamos, nem todos os sistemas semióticos permitem todas as atividades cognitivas fundamentais, os que permitem são denominados por Duval de Registros de representação Semiótica. De acordo com Duval (2009), tais atividades estão relacionadas a tratamento e a conversão. Dois procedimentos comumente confundidos, embora não há razão explícita para que isso ocorra, pois ambos são “radicalmente diferentes.” (DUVAL, 2008, p. 15).

Um tratamento de uma representação semiótica é uma mudança de representação que se efetua no interior do mesmo sistema semiótico, e mobiliza apenas um registro. Já a conversão de uma representação semiótica transforma essa representação em outra representação vinculada a um sistema semiótico distinto do sistema de partida, mobilizando, portanto, mais de um registro.

E quando falamos em geometria, Duval (2009), faz apelo a três registros de representação: o das figuras, o das escritas algébricas e o da língua natural. De acordo com o autor, tratando-se da Geometria, “os objetos que aparecem podem, deste modo, ser diferentes dos tipos de objetos que a situação exige ver” (DUVAL, 2008, p. 13). Ou seja, ao visualizarmos somente um desenho de um objeto matemático, por exemplo, um polígono, não é simples perceber que este objeto tem particulares características como ângulos, lados, diagonais entre outros.

O autor destaca quatro tipos de apreensões no registro figural, a saber: Perceptiva: diz respeito à interpretação das formas que permite identificar ou reconhecer os objetos matemáticos. Discursiva: corresponde à outras propriedades matemáticas da figura além das que estão assinaladas por uma denominação, ou uma legenda; Sequencial: refere-se a ordem de construção de uma figura geométrica com ajuda de algum instrumento (*software*; régua e compasso etc.) e Operatória: refere-se às modificações e/ou transformações que sofre a figura inicial e pela reorganização perceptiva que essas modificações apontam para obter novos elementos que podem levar à solução de uma situação – problema.

Neste sentido, a teoria de Duval permite sustentar teoricamente o nosso trabalho, quando reforça a importância da diversificação de registros de representação de um objeto matemático. Para o autor a Geometria depende da coordenação simultânea de tratamento de dois tipos de Registros de Representação Semiótica: o registro discursivo, em língua natural e o registro figural, e além disso, mobiliza tanto o olhar, quanto a linguagem e o gesto. (DUVAL, 2009)

Coerente com os pressupostos da TRRS, o referido estudo contemplou a organização de uma sequência atividades que foram propostas a alunos da educação básica, séries finais do ensino fundamental, de uma escola pública de Belém com foco no desenvolvimento do conceito e propriedades de Semelhança de triângulos em ambientes de Geometria Dinâmica. Apresentaremos os resultados da aplicação de uma das atividades da sequência na seção seguinte

A CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA E OS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para conduzir a pesquisa, a partir dos objetivos traçados inicialmente, optamos pela abordagem qualitativa, por entender que se apresenta de acordo com os propósitos e concepções metodológicas adequadas ao tipo de estudo e problemática que pretendemos investigar, que em linhas gerais, de acordo com Godoy (1995, p. 58) envolve a obtenção de dados descritivos e interativos pelo “contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo a perspectiva dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo.”

A pesquisa foi aplicada em uma escola pública municipal de Belém/PA, onde a pesquisadora leciona a disciplina matemática. A experiência ocorreu no laboratório de informática da escola, e na própria sala de aula, durante todo o mês de maio de 2019 e parte do mês de junho, durante 10 encontros com 1h30m cada. Os sujeitos foram divididos em quatro duplas, em função da limitação do número de computadores do laboratório. Em algumas das atividades da sequência os sujeitos utilizaram o GeoGebra na versão para smartphone em função de que em alguns dos encontros o laboratório esteve indisponível para a execução das atividades.

Com relação à utilização do programa, os alunos já estavam familiarizados por meio de tarefas outras que nada tiveram a ver com o assunto em questão, além da manipulação das ferramentas do *software* utilizada nesta oportunidade. Não obstante, já haviam utilizado o GeoGebra no estudo de outros conteúdos matemáticos. Apresentamos neste artigo uma das atividades da sequência realizada no desenvolvimento da pesquisa, utilizando o aplicativo na versão para smartphone. A seguir, apresentamos no Quadro nº 01 a atividade da Sequência analisada neste artigo.

Quadro 1 - Tarefa proposta aos sujeitos na sequência de aplicação da pesquisa

Construa um triângulo ABC, assinale um ponto D fora do triângulo e trace as semirretas AD, AB, AC. Em seguida utilize a ferramenta: 'Círculo Definido pelo Centro e um de seus Pontos', marque o primeiro ponto (centro do círculo) no vértice B e o outro ponto D, marque a interseção do círculo com a semirreta e assinale E. Realize a mesma construção para encontrar os pontos F e G. Após concluir a construção, preencha a tabela, levando em consideração os lados e ângulos correspondentes em cada triângulo, e responda as perguntas.

		Lado I	Lado II	Lado III	Ângulo I	Ângulo II	Ângulo III
$\Delta t1$	Valor:						
	Rótulo:						
$\Delta t2$	Valor:						
	Rótulo:						
$\Delta t3$	Valor:						
	Rótulo:						

1ª) Movimentando o Ponto D os triângulos $t2$ e $t3$ mantém a mesma forma, ou seja, a mesma aparência em relação ao triângulo $t1$ ou ele se deforma? Descreva o que você percebeu.

2ª) O que você observa com relação aos ângulos internos desses triângulos, e em relação aos lados?

3ª) Deslocando os pontos A; B; C ou D o que você observou no item anterior continua válido?

4ª) Analisando a figura que você construiu no GeoGebra o que você pode afirmar com relação aos triângulos construídos. Consegue perceber similaridades entre eles? Em caso afirmativo, identifique o motivo dessa possível similaridade.

Fonte: As autoras (2019)

Para a realização da tarefa não foi utilizada a opção homotetia presente no *software*. Pensamos ser mais proveitoso para o aluno utilizar uma sequência de recursos como ponto, reta, semirreta, ferramentas de compasso e polígono. A tarefa foi executada no quarto encontro, contudo, o laboratório de informática na ocasião estava sendo usado para reunião pedagógica. A atividade foi realizada em sala de aula usando o aplicativo GeoGebra no smartphone dos alunos. Apresentaremos na sequência o objetivo da tarefa, os conhecimentos mobilizáveis para sua execução a análise preliminar e a análise das considerações dos sujeitos.

Objetivos:

- Construir triângulos ampliados homoteticamente;
- Encontrar a razão de proporcionalidade;
- Identificar os lados homólogos nos triângulos ampliados;

- Observar quais elementos dos triângulos se alteram e quais permanecem inalterados quando estes são ampliados.
- Tratamento no registro figural dinâmico

Conhecimentos mobilizáveis

- Interpretação de texto através do enunciado;
- Propriedades geométricas;
- Conceitos matemáticos de segmentos; ângulos; lados correspondentes

ANÁLISE PRELIMINAR

A tarefa teve como objetivo examinar a medida dos ângulos e a medida dos lados utilizando a ampliação de um triângulo homoteticamente, ressaltamos que nenhuma consideração referente a homotetia foi dada antes da execução da atividade. Neste caso ela será consequência da construção.

Com relação às atividades cognitivas mobilizadas, os tratamentos e conversões de representações semióticas, destacamos a conversão de representações do registro discursivo (língua natural) para a representações no registro figural, e na representação figural o tratamento envolvendo as apreensões operatória por meio da modificação ótica e a apreensão sequencial, que permite a construção da figura é que possibilita a ocorrência das outras apreensões.

Dessa forma, o aluno poderia responder as perguntas analisando a figura construída no GeoGebra, utilizando seus recursos de arrastar/mover e constatar o que acontece com os lados e ângulos correspondentes em cada triângulo. Utilizando a apreensão perceptiva da figura, Duval (2009), foi permitido explorar propriedades por meio dos registros figurais numa progressão de manipulações práticas ou concretas até seus registros discursivos. Nesse caso era esperado que os alunos percebessem que ampliando ou reduzindo os triângulos as medidas dos ângulos permaneceriam sempre iguais e os lados seriam modificados.

Não esperávamos que já nesta tarefa a noção de semelhança de triângulos fosse totalmente estabelecida, até porque nada foi exigido no que diz respeito a medida de lados correspondentes, nosso principal intento para esta atividade foi que os participantes consolidassem a ideia que triângulos com medidas de lados diferentes podem ter ângulos congruentes, e que mesmo ampliando ou reduzindo seus tamanhos essa relação se mantém.



Figura 2 – Momentos de aplicação da sequência de atividades usando o aplicativo no Smartphone

Fonte: As autoras (2019)

ANÁLISE DAS CONSIDERAÇÕES DOS SUJEITOS

Para realizarem a construção da atividade os sujeitos deveriam seguir as orientações do comando e ficou nítido que eles não compreenderam a função da ferramenta “círculo definido por dois pontos”, ainda que ela tenha sido abordada nas atividades de familiarização. A professora interveio para esclarecer aos sujeitos sobre a função da ferramenta “Círculo definido por dois pontos”, discutiu-se a ideia de círculo, raio e diâmetro, os quais fazem o papel do compasso na construção geométrica.

Na conversão de representações do registro da língua natural para representações no registro figural, os sujeitos tiveram muitas dúvidas em entender os comandos de instruções para a construção geométrica dos triângulos ampliados, quando fizeram uso da apreensão sequencial. Segundo Duval (2012, p. 120), ela “é explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura.”

Entre as oportunidades de aprendizagem que foram criadas com essa tarefa, pode-se destacar a utilização de noções geométricas importantes para a construção de polígonos como reta, semirreta e segmento de reta, além de chamar atenção para os elementos raio e de diâmetro de uma circunferência, e para diferença entre reta, segmento de reta e semirreta. O recurso computacional enriqueceu a atividade, posto que proporcionou ao aluno uma visualização dinâmica da ampliação de triângulos que os conduziu a utilizar ferramentas de medida e realizar medições para, em seguida, responder as perguntas. Na figura nº 3 apresentamos uma das construções dos sujeitos

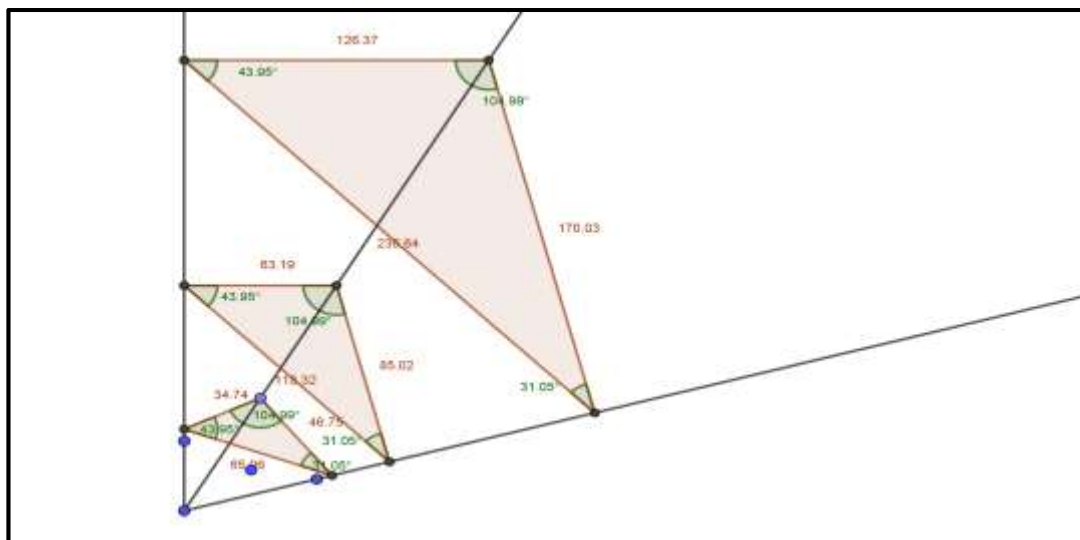


Figura 3 – Construção dupla C: atividade BIAII
Fonte: As autoras (2019)

Nem todas as duplas conseguiram três triângulos com ângulos congruentes, a dupla B conseguiu ampliar os triângulos, contudo, apenas o segundo e o terceiro com esta características. Ainda que tenham tido dificuldades, principalmente com a ferramenta *círculo definido por dois pontos*, todas as quatro duplas conseguiram finalizar a construção, fazendo, portanto, a conversão de uma representação no registro da língua natural, para uma representação no registro figural.

Após concluir às construções os sujeitos preencheram a tabela para organizar os valores das medidas dos ângulos internos e lados correspondentes.

		Lado I	Lado II	Lado III	Ângulo I	Ângulo II	Ângulo III
Δt1	Valor:	33.4	20.2	19.8	33°	133.3°	33.7°
	Rótulo:	HF	HG	FG	ângulo 1	ângulo 2	ângulo 3
Δt2	Valor:	66.9	40.4	39.7	33°	133.3°	33.7°
	Rótulo:	IJ	ID	JD	ângulo 1	ângulo 2	ângulo 3
Δt3	Valor:	133.7	20.2	19.3	33°	133.3°	33.7°
	Rótulo:	ML	Mk	Lk	ângulo 1	ângulo 2	ângulo 3

Figura 4 – Tabela preenchida após a construção: dupla D
Fonte: As autoras (2019)

Uma vez que os sujeitos concluíram a construção e preencheram a tarefa, imediatamente associaram-na com a atividade anterior. Posto que em ambas o recurso de ampliação e apreensão operatória do tipo ótica estão presentes. Essa constatação dos alunos, confirma o nosso objetivo inicial ao criar as tarefas, de que elas não estivessem isoladas entre si e formasse uma conexão entre elas. Após a construção dos triângulos

ampliados os sujeitos procederam o tratamento no registro figural e responderam aos questionamentos da atividade. Analisaremos algumas das repostas relacionadas a cada item.

No item 1 todas as duplas deveriam perceber ao movimentar o ponto D, o qual na verdade era o foco da homotetia, que os triângulos seguiam o mesmo comportamento do primeiro triângulo de lados menores. Consideramos esta uma constatação bastante perceptível, portanto esperávamos que todas as duplas pudessem alcançar este entendimento, no entanto, a dupla B conseguiu alcançar apenas parcialmente esse objetivo, uma vez que apenas dois de seus triângulos foram ampliados corretamente. As repostas das duplas A, C e D foram parecidas, trazemos na figura nº 5 a resposta da dupla C.

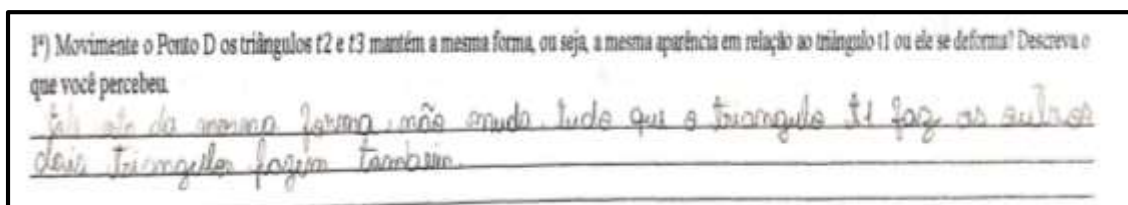


Figura 5 – Resposta da dupla C para a atividade BIAII

Fonte: As autoras (2019)

Os itens 2 e 3 tratavam da percepção de que ao utilizar o recurso mover do GeoGebra, as medidas dos ângulos dos triângulos aumentariam ou diminuiriam na mesma proporção. Destacamos as respostas das duplas A.

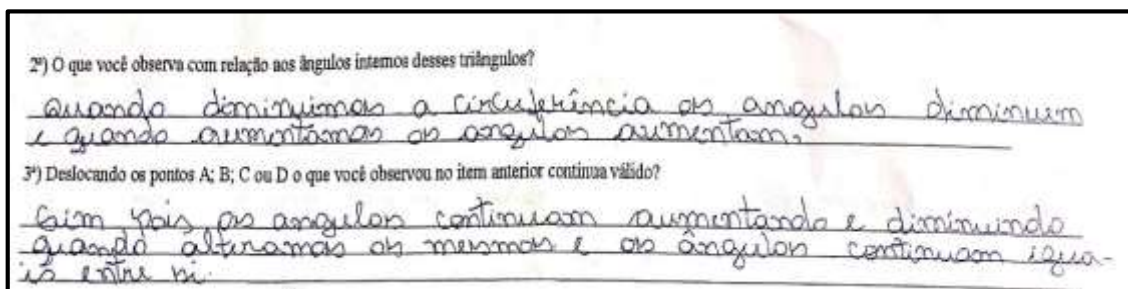


Figura 6 – Respostas da dupla A para os itens 2 e 3 da atividade BIAII

Fonte: Acervo da pesquisa (2019)

Já mencionamos que os sujeitos tiveram problemas em entender a função da circunferência para a construção dos triângulos, contudo, percebemos pela resposta da dupla A que eles conseguiram alcançar o entendimento de que as circunferências determinavam as medidas dos lados do triângulo, ainda que não tenham mencionado os elementos “raio” ou “diâmetro” em suas respostas.

Os pontos A, B, e C são pontos nas semirretas da construção, ao movimentá-los os sujeitos visualizariam a mudança nos lados dos triângulos, no que diz respeito a

ampliação ou redução. A dupla A chegou a esse entendimento, conforme constatamos na figura nº 6, e além disso, perceberam que os ângulos permaneciam congruentes nos três triângulos, ainda que não utilizassem esse termo.

Para finalizar a tarefa perguntamos se os sujeitos perceberiam similaridades entre os triângulos, esperávamos respostas associadas à ideia de que os triângulos mesmo com medidas de lados diferentes possuem similaridades entre si, e que as medidas dos ângulos são elementos que não se alteram nesse processo.

Naturalmente as respostas não corresponderam as nossas hipóteses integralmente. Isso porque, de acordo com Ponte et al (2016), dificilmente podemos prever as concepções dos sujeitos em sua totalidade. Observamos as respostas das duplas C e D na figura nº 7.

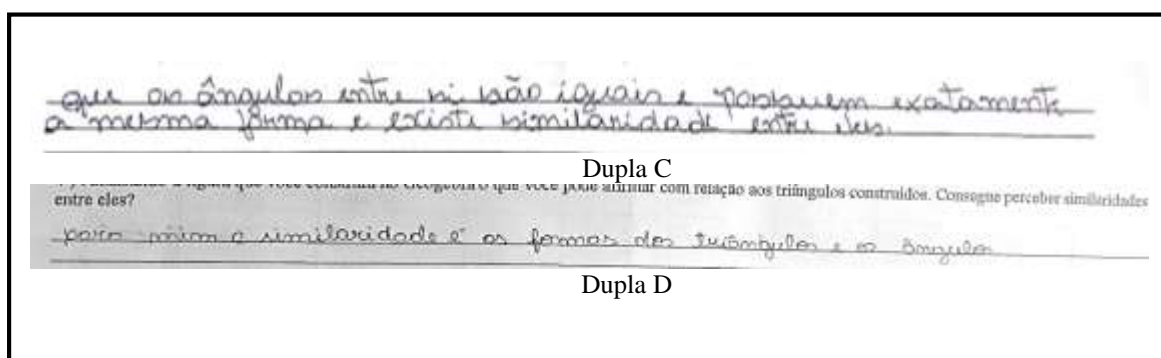


Figura 7 – Respostas das duplas C e D para o item 4 da atividade BIAII

Fonte: As autoras (2019)

As duplas C e D apresentaram como similaridades entre os triângulos a sua forma e os ângulos entre eles. Note que a dupla C utiliza os termos igual e similar na mesma frase, não atentando para o fato que os triângulos da sua construção não possuíam a mesma medida para lados, portanto não seriam de forma alguma, iguais.

Ainda com relação ao item 4, todas as quatro duplas que procederam a conversão do enunciado apresentado no registro da língua natural para uma representação no registro figural dinâmico apresentaram como similaridade entre os triângulos, a forma e o valor das medidas dos ângulos. Contudo, nenhuma dupla utilizou o termo “congruência” como elemento comum entre os três triângulos.

Na oportunidade do fechamento da atividade, ficou claro que esses alunos reconheceram que os ângulos ampliados homoteticamente apresentavam mesmo comportamento (em relação a ampliação e redução) quando movimentados os pontos

especificados na tarefa, essa constatação típica do tratamento figural é específica da apreensão óptica, é o que Duval (2012b) chama de “Ver em profundidade”.

ALGUMAS REFLEXÕES

Após a conclusão da atividade houve um momento para fazer o balanço das concepções e atitudes das duplas. Os sujeitos tiveram oportunidade de colocar em confronto suas estratégias, conjecturas e justificativas das respostas. Consideramos este momento parte imprescindível da investigação, uma vez que nos aponta quais elementos devemos reforçar, quais devemos retomar além de estimular os sujeitos a questionar e socializar suas respostas. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) a fase de discussão de uma investigação matemática é fundamental “para que os alunos possam desenvolver a capacidade de comunicar e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação.” (PONTE, BROCARDI e OLIVEIRA, 2016, p. 41)

Retomando o nosso objetivo na tarefa que foram principalmente estes: Identificar os lados homólogos nos triângulos ampliados; observar quais elementos dos triângulos se alteram e quais permanecem inalterados quando estes são ampliados e o tratamento no registro figural dinâmico, com relação a eles podemos destacar como resultados:

- Os sujeitos conseguiram identificar que os triângulos mesmo ampliados ou reduzidos, a medida em que eram movimentados, permaneciam com ângulos iguais entre si;
- Perceberam que as medidas dos lados dos triângulos se alteravam quando movimentados os vértices dos triângulos;
- Compreenderam após a discussão no fechamento da atividade a função da ferramenta “círculo definido por dois pontos” para a construção e qual o papel do raio das circunferências na ampliação e redução dos triângulos.

Na oportunidade de apresentação da propriedade de triângulos, semelhança de triângulos, a professora apresentou no GeoGebra, utilizando projetor multimídia, construções de triângulos semelhantes de duplas que tiveram êxito na tarefa, e construções de triângulos que não satisfaziam os critérios de semelhança. Esta etapa da aplicação da tarefa foi essencial, pois mais importante do que as construções estarem ou não adequadas, coube ao professor aproveitá-las em benefício da aprendizagem do que estava sendo estudado. Esse processo não só enriqueceu o estudo como também deu maior significado a aprendizagem.

Ao cogitar o erro como parte importante do processo de aprendizagem, estamos indicando possibilidades para os alunos descobrirem algo novo – em que o método da investigação é tão relevante quanto à aquisição do resultado. De acordo com CURY (2007, p. 23):

[...] a valorização do erro abre espaço para desenvolver habilidades que envolvam indagar, conhecer, deduzir, discutir e avaliar soluções. A conduta que o professor pode tomar, deve ser norteada a partir da identificação e análise dos erros dos alunos. (CURY, 2007, p. 23)

Diante do exposto, podemos destacar como principais pontos positivos da aplicação da atividade

- Oportunidade de investigação;
- Valorização das hipóteses dos alunos;
- Proposição de conjecturas;
- Utilização de tecnologias em ambientes educacionais;
- Valorização do erro;
- Possibilidade de verificação de propriedades geométricas utilizando recursos dinâmicos do *software* GeoGebra, que de outra forma seriam impossíveis, como, por exemplo, a movimentação dos triângulos sem alterar suas propriedades.
- Não utilizar uma única representação para um mesmo objeto matemático.

Naturalmente também houve dificuldades, como carência de maior tempo para explorar mais as conjecturas dos sujeitos; limitação de recursos tecnológicos; nem todos os alunos possuíam habilidade com o programa precisando constantemente da intervenção do professor nesse sentido. No entanto, tais contratempos não devem significar limitações para desenvolver atividades neste sentido, pois ações como as que aqui se apresentam trazem uma abordagem enriquecedora, com potencial de transformação e reorientação da própria prática docente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo em que apresentamos uma tarefa de um uma sequência de atividades relacionada ao ensino de semelhança de triângulos com enfoque em representações dinâmicas, estabelecemos como objetivo introduzir a noção da propriedade semelhança de triângulos, tentando nos afastar da tradicional premissa de abordagem dos casos de semelhança de forma direta, como a apresentação de exemplos já construídos nos livros didáticos sem oportunizar aos alunos qualquer chance de constatação da propriedade.

A aplicação da sequência da qual esta atividade faz parte, nos permitiu a reflexão de que conceitos e propriedades podem ser trabalhados em mais de um registro de representação do objeto Semelhança de Triângulos, haja vista que, de acordo com Duval (2012), uma única representação não garante a compreensão, ou seja, a aprendizagem em matemática de um objeto matemático. Desta forma, a diversificação de registros foi fundamental para o sucesso da experiência e o alcance dos objetivos estabelecidos.

No atual contexto não há como negar a influência das tecnologias digitais nos processos educacionais, e coerente com os preceitos da BNCC (BRASIL, 2018) para o ensino de geometria, que defendem estratégias para aprendizagem eficaz pelas mídias. O uso da tecnologia educativa, seja por meio de *software*, ou aplicativos dinâmicos permite explorar e formalizar diferentes conceitos geométricos.

Consoante aos ganhos que se obtém ao fazer uso de estratégias metodológicas que utilizem tecnologias, o uso do GeoGebra trouxe nesta tarefa a criação de experiências que fazem o conhecimento geométrico acontecer na evolução de um nível básico da intuição e das conjecturas. No entanto, ainda de acordo com Duval (2009), o computador não constitui um novo registro, pois as representações que vemos na tela são as mesmas que veríamos se produzidas com lápis e papel, com a diferença que o *software* dinâmico propicia condições para a construção que dificilmente os alunos teriam utilizando esses instrumentos, como por exemplo, o recurso de mover as figuras.

A diversificação de instrumentos, além do lápis e papel é extremamente importante, no entanto, não deve ser tomada como uma espécie de panaceia para todos os males da aprendizagem. O sucesso do uso de qualquer tecnologia em prol da aprendizagem depende muito da postura do professor e da forma como é utilizada, não como um fim, mas um meio para alcançar objetivos determinados, uma vez que apenas a utilização do recurso pelo recurso não é garantia de sucesso nas aprendizagens. Assim, o estudo contribui para uma reflexão acerca da utilização de meios informáticos em âmbito escolar para abordagens diferenciadas de objetos matemáticos.

Além disso é importante deixar claro que o professor deve propor a seus alunos além da realização de investigações, outros tipos de tarefas como exercícios, problemas e projetos. Dessa forma, articula as mais diferentes maneiras de execução das tarefas, de modo a formular um currículo instigador e equilibrado, que permita o desenvolvimento matemático dos alunos com diferentes níveis de desempenho.

REFERÊNCIAS

- BORBA, M.C; PENTEADO, M.G. **Informática e educação matemática** – 4ª.ed. Belo Horizonte –Autêntica, 2007. (Coleção tendências em educação matemática).
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>>. acesso em 23 de jul. 2019.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.
- CURY, H. N. **Análise de Erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Coleção tendências em educação matemática).
- DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Trad Mércies Thadeu Moretti.
- _____. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros Semióticos e aprendizagens Intelectuais**. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.
- _____. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: Entrar no modo de pensar: os registros de representações semióticas**. Org. Tânia M. M. Campos (trad. Marlene Alves Dias) 1ª ed. São Paulo: PROEM, 2011.
- GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. Tese (Doutorado) – Universidade federal do rio Grande do Sul, 2001.
- GIMENES, S. S. **Possíveis contribuições de atividades de investigação e exploração com o computador na produção de conhecimento acerca do assunto semelhança**. Dissertação (Mestrado) – Instituto Federal do Espírito Santo, 2014.
- GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de Administração**, São Paulo, V. 35, n. 2, p. 57-64, mar./abr. 1995
- HARUNA, N. C. A. **Teorema de Thales: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Educação matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2000
- MACIEL, A.C. **O conceito de semelhança: Uma proposta de ensino**. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004
- PONTE, J.P; BROCARD, J; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de aula** – 3ª ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2016. (Coleção tendências em educação matemática).

Submetido em 16 de setembro de 2019.
Aprovado em 22 de abril de 2020.