REVISEM
Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática

https://doi.org/10.34179/revisem.v5i2.13035

CÁLCULO DE ÁREAS DE QUADRILÁTEROS IRREGULARES: ANÁLISE DAS CONTRIBUIÇÕES DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

CALCULATION OF IRREGULAR QUADRILATERAL AREAS: ANALYSIS OF THE CONTRIBUTIONS OF A DIDACTIC SEQUENCE

Danilo Augusto Ferreira de Jesuz
Instituto Federal do Paraná – IFPR
Universidade Estadual de Ponta Grossa – UEPG
danilo.jesuz@ifpr.edu.br

Ana Lúcia Pereira
Universidade Estadual de Ponta Grossa – UEPG
ana.lucia.pereira.173@gmail.com

Resumo

A necessidade emergente de ações pedagógicas que transcendam ao modelo tradicional, de teor exclusivamente expositivo é algo amplamente debatido na comunidade acadêmica na contemporaneidade. O objetivo desse artigo foi investigar as contribuições, aos processos de ensino e de aprendizagem, emergentes da aplicação de uma sequência didática sobre o estudo de quadriláteros irregulares. Partimos de uma proposta embasada metodologicamente na articulação entre a História da Matemática e as Tecnologias Digitais. Para análise qualitativa dos dados utilizamos as anotações, tarefas, produções no GeoGebra e relatório avaliativo dos estudantes, além do diário de bordo do professor-pesquisador. Como resultados destacamos o desenvolvimento de reflexões críticas e autonomia; a aproximação dos estudantes com a Matemática, ao percebê-la como processo constitutivo da humanidade; o caráter teórico-prático da proposta possibilitou aos estudantes estabelecer relações entre a Matemática e o seu cotidiano. Concluímos que são necessários o esforço e a criatividade docente para desenvolver situações de aprendizagens, de modo a contribuir o processo educacional, que aporte uma redefinição dos trabalhos docente e discente, trabalho este, que supera o paradigma educacional tradicional do "professor ensina e aluno aprende" para uma concepção em que docente e discentes constroem, em processo humano, coletivo e colaborativo, o que aprendem.
Palavras-chave: Ensino de Geometria. História da Matemática. Tecnologias Digitais. Sequência Didática. GeoGebra.

Abstract

The emerging need for pedagogical actions that transcend the traditional model, with an exclusively expository content, is something widely debated in the contemporary academic community. The objective of this article was to investigate the contributions, to teaching and learning processes, emerging from the application of a didactic sequence on the study of irregular quadrilaterals. We

start from a proposal methodologically based on the articulation between the History of Mathematics and Digital Technologies. For qualitative analysis of the data we use the annotations, tasks, productions in GeoGebra and the students' evaluative report, in addition to the teacher-researcher's logbook. As results we highlight the development of critical reflections and autonomy; the approach of the students to Mathematics, perceiving it as a constitutive process of humanity; the theoretical-practical character of the proposal enabled the students to establish relationships between Mathematics and their daily lives. We conclude that it is necessary the effort and creativity of the teacher to develop learning situations, in order to contribute to the educational process, which contributes to a redefinition of the teaching and student work, work that goes beyond the traditional educational paradigm of the "teacher teaches and student learns" to a conception in which teacher and students build, in a human, collective and collaborative process, what they learn.
Keywords: Teaching Geometry. History of Mathematics. Digital Technologies. Didactic Sequence. GeoGebra.

INTRODUÇÃO

Consideramos a Geometria um conteúdo importante, tanto no que tange ao desenvolvimento histórico da disciplina quanto a relevância conceitual para a formação do estudante, sobretudo, considerando a aplicabilidade social e cotidiana de seus conceitos. Em outra vertente, entendemos que a Geometria é, por natureza, uma área dinâmica e densa em possibilidades de contextualizações e aplicações, a sua história é rica em elementos que podem ser explorados e geridos em situações de aprendizagem.

Inserida nesse contexto, a presente investigação busca evidenciar as contribuições de uma sequência didática aplicada a estudantes da Educação Básica. A sequência didática aqui apresentada é um recorte adaptado da nossa dissertação de mestrado (JESUZ, 2015) e foi elaborada à pretensa de fugir ao ensino pragmático da Geometria, que por vezes, se resume a atividades monótonas e descontextualizadas. Nesse viés, a sequência didática pressupõe aos docentes e discentes o desenvolvimento de um trabalho de cunho construtivo-colaborativo e tem por aporte metodológico a História da Matemática pedagogicamente vetorizada, de Miguel e Miorim (2004), articulada a utilização de recursos Tecnologias Digitais, por meio do *software* GeoGebra.

Na primeira parte do artigo trazemos os aspectos teóricos que embasam nossa proposta e, em seguida os aspectos metodológicos da investigação. Posteriormente, apresentamos as quatro etapas da sequência didática e, consoante a esta, a discussão decorrente da aplicação da proposta, em um movimento de dar vozes aos diferentes atores da pesquisa e elucidar alguns importantes resultados decorrentes do processo. Findamos o artigo trazendo as nossas considerações e reflexões acerca das contribuições da sequência didática, em perspectiva acadêmico científica e também do ponto de vista pedagógico, tendo em vista nossa posição, a de professor-pesquisador.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NOS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Ao refletir sobre as contribuições da História da Matemática (HM) no processo educacional, Miguel e Miorim (2004, p. 154) pressupõem uma "concepção orgânica da participação da história na produção do saber docente" que se sustenta em uma concepção peculiar de problematização da educação matemática escolar. Miguel e Miorim (2004, p. 156) defendem que "histórias podem e devem constituir fontes de referência para problematização pedagógica escolar [...] desde que sejam devidamente constituídas com fins explicitamente pedagógicos.

Neste construto teórico, a problematização tem quatro papéis a cumprir: papel interdisciplinar; didático-metodológico; psicológico motivacional e papel político-crítico (MIGUEL; MIORIM, 2004).

Ao assumir o papel interdisciplinar, a problematização corrobora com um "projeto educativo mais amplo que visa a formação crítica do cidadão" (MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 155).

A problematização é também um método e que tem por característica intrínseca a criticidade e o aspecto humanístico, ela tem um papel didático-metodológico, à medida que permite uma "ampliação e flexibilização de mundo [e ainda] possibilita novas formas de interpretação da experiência cultural" (MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 155).

Por sua vez, o papel psicológico motivacional propicia "um ambiente pedagógico que estimula o envolvimento do estudante" (MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 155).

Por fim, a problematização tende, segundo Miguel e Miorim (2004, p. 155), a "estimular uma reflexão e um debate em torno dos papéis que a cultura matemática e a educação matemática escolares desempenham nas relações de poder associadas às configurações, em cada momento histórico". Nesse aspecto ela cumpre papel político-crítico.

Em viés epistemetodológico, para os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, Miguel e Miorim (2004) propõem a História da Matemática como pedagogicamente vetorizada. Para que cumpra seu papel pedagógico no processo educacional, a História da Matemática deve deixar de ser concebida à priori, colmatada, predeterminada, para circunscrever-se em um processo de constituição, ou seja, histórias devem ser escritas sobre o ponto de vista do educador matemático. Daí a essência em ser história pedagogicamente vetorizada (MIGUEL; MIORIM, 2004).

Uma história pedagogicamente vetorizada não é uma história adocicada ou suavizada, nem uma história distorcida, tampouco uma adaptação ou transposição didática das verdadeiras Histórias da Matemática. A contraponto Histórias da Matemática pedagogicamente vetorizadas transcendem o aspecto de histórias das ideias matemáticas "esforçando-se por serem também, histórias das diferentes culturas matemáticas que se constituem em diferentes práticas sociais – e dentre elas, sobretudo, a prática escolar" (MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 159).

Nesse viés podemos concebê-la como uma história-problema, ou seja, "uma história que põe problemas, isto é, que parte de problemas que se manifestam em práticas pedagógicas e investigativas do presente" (MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 160). Tal perspectiva é antagônica as propostas metodológicas recapitulacionistas, que em maior ou menor grau, tendem a conceber que o estudante deve reproduzir os passos desenvolvidos pelos matemáticos. Ao contrário, a história-problema potencializa um processo que nos auxilia a agir e tomar decisões no presente (MIGUEL; MIORIM, 2004).

Motta (2006) em interessante analogia, permite-nos a reflexão acerca da contraposição dicotômica supracitada, ao nos indicar dois modos distintos de perceber a história no processo educacional: a História da Matemática como um espelho ou como pintura. A HM como um espelho pressupõe aspectos do princípio recapitulacionista à medida que se caracteriza por realizar a repetição de processos historicamente produzidos. Em contrapartida, a HM como pintura, possibilita um processo construtivo.

A história-problema tal como concebemos, permite a docente e discentes o papel de artistas, agir e tomar decisões no presente, pautados numa problematização. Uma pintura nunca será, mesmo que fosse o objetivo, uma reprodução do que já está constituído e, portanto, foge ao escopo recapitulacionista à medida que recupera a essência subjetiva daquele que participa do processo de criação e de construção ou, posto de outro modo, de (re)criação e de (re)construção.

A História da Matemática pode contribuir com o processo educacional, à medida que se torne fonte de inspiração para a construção de sequências didáticas, pois desse modo possibilita, segundo Motta (2006, p. 5) a "constituição dos contextos e circunstâncias de produção dos conceitos, das significações produzidas e negociadas na produção, circulação, recepção e transformação desse conhecimento". Nesse viés insere-se a proposta que trazemos, articulada às Tecnologias Digitais.

O SOFTWARE GEOGEBRA NOS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Borba, Silva e Gadanidis (2014, p. 50) apontam que as atividades matemáticas com tecnologias são potencializadas se concebidas em um cenário de investigação matemática, promovendo um "ambiente heurístico, de descobertas, de formulação de conjecturas de um problema e busca por diversificadas soluções".

A utilização de *softwares* como o GeoGebra, segundo os autores acima, deve favorecer a exploração de seus aspectos visuais, em atividades cujo *design* seja experimental. Corrobora nesse sentido Borssoi (2013, p. 41), ao afirmar que as tecnologias digitais "permitem criar ambientes em que os alunos possam aprender fazendo, ao mesmo tempo em que recebem *feedback*". Os *feedbacks* visuais e quase instantâneos podem aprimorar os conhecimentos dos estudantes, além de proporcionar a construção novos e diferentes saberes (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014).

Para além dos aspectos da experimentação e visualização, discutimos em Jesuz e Pereira (2018) a possibilidade de modelagem de situações que, à priori, são externas à matemática. Nesse âmbito as tecnologias digitais colaboram exercendo "o papel de evidenciar ao aluno a importância da Matemática nas diferentes áreas da sociedade e, em específico, percebê-la em suas situações cotidianas" (JESUZ; PEREIRA, 2018, p. 46).

Concretizemos que a articulação entre História da Matemática e Tecnologias Digitais, neste estudo, tem por objeto que a matemática se revele ao estudante como processo de construção humana, recuperando tal aspecto intrínseco à Matemática, em elementos historicamente constituídos. Nesse escopo, "a matemática aproxima-se do aluno e rompe com o paradigma de que é uma disciplina para alguns gênios [...] e convida os alunos à investigação, à descoberta, à construção colaborativa (JESUZ; PEREIRA, 2018, p. 47).

ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

O objetivo do presente texto é analisar as contribuições de uma sequência didática elaborada para o ensino de quadriláteros irregulares. Circunscritos nesse contexto, buscamos criar um cenário investigativo que nos oportunizasse ouvir as diferentes vozes[1] em uma investigação (BORBA; ALMEIDA; GRACIAS, 2018).

As vozes da literatura, ou voz teórica, é aquela que pode, paradoxalmente, revelar e ocultar o caminho da pesquisa. O marco teórico nos auxilia à medida que delimita o trabalho, mas, a contraponto, não pode atuar como um antolho, privando o pesquisador de ouvir outras vozes que compõem o processo. Nesta assertiva, temos o marco teórico, a priori, que embasa e direciona o trabalho, mas também contribui à medida que a partir dele se ecoam vozes, que, ressaltemos, não devem ser as únicas.

Trazemos as vozes que emergem do cenário investigativo organizado, ou seja, os dados de pesquisa oriundos das anotações e tarefas realizadas pelos estudantes nas diferentes etapas; as construções e simulações no *software* GeoGebra; os dados coletados na etapa que denominamos por trabalho de campo e também do relatório elaborado a intento de avaliar o trabalho, permitindo-se ouvir a voz dos estudantes, ou seja dos agentes[2] de pesquisa.

As vozes do professor-pesquisador emergem das anotações feitas no diário de bordo nas diferentes etapas de trabalho e constituem elemento importante na pesquisa, sobremaneira quando se trata de uma investigação de cunho qualitativo pois, sublinhemos, o professor-pesquisador neste contexto, é também um agente de pesquisa.

Destarte, as vozes dos autores vêm no sentido de fazer-se ouvir, o conjunto das diferentes vozes constituintes que ecoam na presente investigação. As vozes do referencial teórico que, juntamente com as demais, se complementa buscando trazer uma reflexão que se insere em contexto teórico-prático e busca analisar contribuições, não apenas no âmbito da produção acadêmico-científica, como também com a reflexão da prática lá no "chão da escola". Isso porque concordamos com Freire (1996, p. 22) ao afirmar que "a reflexão

[1] Apropriamo-nos da metáfora das vozes na pesquisa, apresentada por Borba, Almeida e Gracias (2018) em sua obra *Pesquisa em ensino e sala de aula*.

[2] Optamos por denominar agentes e não sujeitos de pesquisa por entendermos que a presente pesquisa não é sobre os estudantes ou para os estudantes, mas é pesquisa com os estudantes. Os estudantes não estão, portanto, na posição apenas de sujeitos a esta investigação, mas ao contrário agem ao construí-la juntamente com o professor-pesquisador. Daí revelam-se agentes.

crítica sobre a prática se torna uma exigência da relação Teoria/Prática sem a qual a teoria pode ir virando blábláblá e a prática, ativismo".

Findamos a presente seção, porém, não esgotamos a discussão acerca dos pressupostos metodológicos da presente investigação, uma vez que, a apresentação da sequência didática que procede, contempla elementos metodológicos importantes desta investigação.

CARACTERIZAÇÃO E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática foi aplicada a 106 estudantes, distribuídos em três turmas de um Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio, de um Campus do Instituto Federal no Paraná. O quadro 1 sugere a organização[3].

Quadro 1 – Sujeitos de Pesquisa

Turma	Ano	Número de Participantes
T_1 – 2º ano do Ensino Técnico integrado ao Médio	2018	41
T_2 – 3º ano do Ensino Técnico Integrado ao Médio	2018	34
T_3 – 3º ano do Ensino Técnico Integrado ao Médio	2017	41

Fonte: Banco de dados dos Autores

A sequência didática foi organizada em 4 etapas: I) a discussão interdisciplinar; II) a problematização pautada na História da Matemática; III) a exploração da situação problema no software GeoGebra e IV) o trabalho de campo e execução dos cálculos. Na sequência apresentamos o desenvolvimento de cada uma das quatro etapas, à medida que trazemos análises e discussões decorrentes dos trabalhos do professor-pesquisador e dos estudantes.

Etapas I e II - A discussão interdisciplinar e a problematização pautada na História da Matemática

As etapas I e II são complementares e, portanto, analisamo-las em conjunto. Na primeira delas, convidamos o professor de História para um momento interdisciplinar. A discussão teve como tema as civilizações da antiguidade, com enfoque nos povos egípcio e babilônio. Abordamos aspectos relacionados a cultura, religiosidade, organização

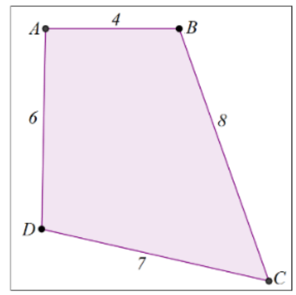
[3] A proposta foi aplicada em três momentos distintos, levando em conta o período em que estavam estudando Geometria Plana. Duas das turmas estavam no terceiro (de quatro anos). A outra turma estava no segundo ano, devido a uma reestruturação curricular do curso.
A intento de organizar a apresentação dos dados e preservar a identidade dos pesquisados, denominamos, por exemplo, G_4T_2, quando nos referimos a tarefas desenvolvidas por estudantes do grupo 4, da turma 2.

política, economia, dentre outros elementos discutidos à luz do desenvolvimento científico e, em particular, o desenvolvimento da Matemática. No âmbito da Matemática pautamo-nos em alguns dos papiros egípcios e nas tábulas dos babilônios para abordar os aspectos históricos inerentes ao desenvolvimento científico dessas civilizações.

Iniciamos a etapa II apresentando a problematização, de cunho histórico, conforme ilustra o Quadro 2.

Quadro 2 – Área de um quadrilátero pelo método dos babilônios

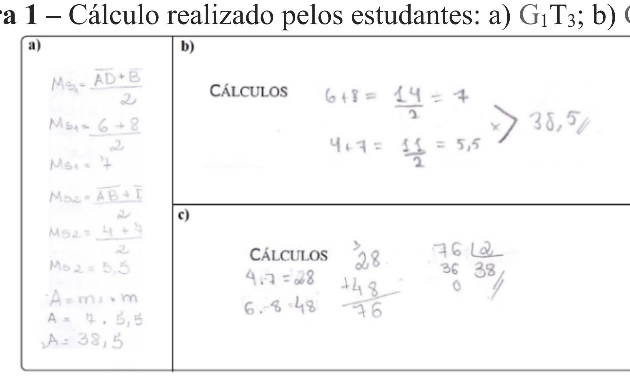
Nas civilizações antigas do Egito e da Mesopotâmia o conceito de áreas era muito utilizado, principalmente para calcular taxas de impostos sobre as terras. Com base na necessidade, os povos desse período desenvolveram técnicas para calcular a área de regiões planas. "A área de um quadrilátero era calculada pelos babilônios tomando o produto das médias aritméticas dos pares de lados opostos" (BOYER, 2012, p.49).



Fonte: Jesuz (2015, p. 73, adaptado)

Conforme ilustra o Quadro 2, apresentamos aos estudantes o método babilônico para o cálculo de áreas de um quadrilátero qualquer e pedimos que utilizassem-no de modo a obter a área. À medida que os estudantes, em grupos, interpretavam e buscavam solução para as propostas, o professor auxiliava-os utilizando-se sempre de questionamentos. Ilustramos, Figura 1, os procedimentos de G_1T_3 e G_2T_2, sendo estes, representativos das estratégias adotadas na maioria dos grupos.

Figura 1 – Cálculo realizado pelos estudantes: a) G_1T_3; b) G_2T_2; c) G_7T_2



Fonte: Acervo da pesquisa

Uma interpretação diferenciada (equivocada, se assim o podemos dizer) do método babilônio surgiu nos grupos G_6T_2 e G_7T_2 conforme ilustra a Figura 1c. Um breve momento de discussão coletiva proporcionou aos estudantes compartilhar suas compreensões sobre o método para calcular a área, bem como, a correção dos “equívocos” relacionados à sua interpretação. Após o momento propomos aos estudantes o questionamento: *Você acredita que o método estabelecido pelos babilônios está correto?* Na sequência trazemos alguns exemplos de respostas dadas pelos estudantes:

> G_5T_1: Sim, pois era uma aproximação do valor da área total. Na época os mesmos acreditavam que era certo já que este método era muito utilizado.
> G_2T_1: Não acreditamos estar falso nem verdadeiro, pois eles como primeiros povos a utilizarem estes cálculos eles não tinham que obrigatoriamente estarem corretos. Hoje em dia, com a matemática desenvolvida acreditamos que as técnicas utilizadas são as corretas, ou as mais aproximadas.
> G_7T_2: Sim, pois para a época o conhecimento era mínimo e tinha sentido e lógica para eles esse cálculo.
> G_2T_3: Sim, pois como este quadrilátero possui medidas diferentes, a única forma viável de calcular a área seria fazendo a média aritmética dos pares de lados opostos.
> G_4T_1: Não, apesar de tentarem construir uma figura regular com as medidas ela não ocupa o mesmo espaço.
> G_1T_1: Não, porém apresenta valor suficientemente preciso levando em consideração as circunstâncias.

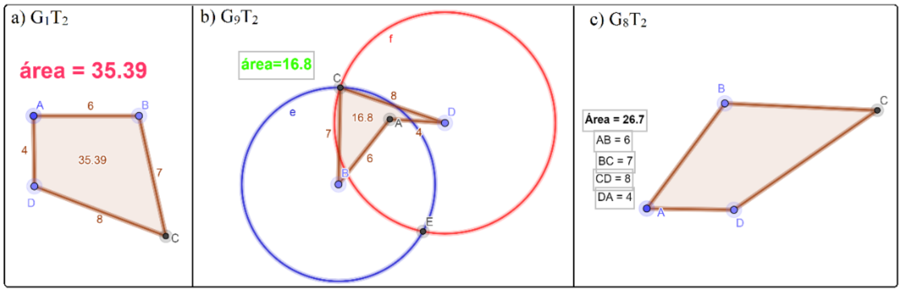
Analisamos que a resposta dos grupos estabeleceu relação com aspectos históricos discutidos na etapa I. Identificamos que a discussão interdisciplinar corroborou, possibilitando aos estudantes, a percepção de que a Matemática é um processo de construção social e coletiva e, como tal, está em constante desenvolvimento (MIGUEL; MIORIM, 2004).

Após o término da discussão em grupos houve uma discussão coletiva onde os estudantes puderam colocar suas opiniões, entretanto, não foi o objetivo a busca por consensos ou verdades. Digno de relato o fato de que diversos estudantes se expressaram curiosos em saber se o método babilônio era ou não correto, porém, tal discussão seria retomada na próxima etapa, de modo que os próprios estudantes pudessem decidir sobre o método. Ademais, o objetivo era que o estudante percebesse o que é irrelevante, senão incoerente, a discussão que taxa o método babilônico como “certo” ou “errado”. Aí reside a essência da Matemática como processo de construção da humanidade.

Etapa III - a exploração da situação problema no software GeoGebra

O objetivo da etapa III era proporcionar ao estudante a possibilidade de investigar o método babilônio, analisando sua viabilidade e validade. Para tanto construímos um quadrilátero (ou poderíamos dizer uma infinidade de quadriláteros) tendo como suporte, a característica dinâmica intrínseca ao *software* GeoGebra.

Figura 2 – Construção do quadrilátero no software GeoGebra



Fonte: Acervo da pesquisa

Na Figura 2 podemos observar o quadrilátero em processo de construção (G_9T_2) e após finalizado (G_1T_2 e G_8T_2). À medida que construíam os estudantes revisitaram diversos conceitos geométricos, além de apropriarem-se de outros conceitos geométricos que tal processo construtivo demandou. Nesse aspecto, destacamos que a etapa da construção proporcionou a apreensão de diferentes conceitos por parte dos estudantes, corroborando a ideia de Borba, Silva e Gadanidis (2014) ao afirmarem que os *softwares* de simulação ajudam na construção de novos e diferentes saberes.

Destarte, os estudantes puderam realizar simulações, uma vez que a proposta possibilita o aluno verificar uma infinidade quadriláteros de medidas de lados fixos e predeterminadas[4]. Propomos aos estudantes uma questão norteadora, em caráter aberta, a intento de suscitar o espírito investigativo:

> Professor-pesquisador: Comparando os resultados observados na simulação com o método babilônio para calcular a área de um quadrilátero que ponderações podemos fazer?
> G_6T_2: Não é correto utilizar o método babilônico porque conforme muda a forma do quadrilátero a área muda também.
> G_2T_3: Observamos que se modificarmos os vértices do quadrilátero o número da área modifica, podendo chegar no mínimo a 5 e no máximo a 38.
> G_1T_3: Não conseguimos utilizar o mesmo método de cálculo de área para todos os quadriláteros, principalmente os irregulares.
> G_1T_2: Que por seu método não considerar o formato dos quadriláteros os resultados não são confiáveis.
> G_4T_1: O processo é mais eficiente quando os quadriláteros têm sua forma próxima do quadrado.
> G_5T_1: Que o método que os babilônicos utilizavam é aproximado, porém não exato.

[4] Disponibilizamos ao leitor a construção realizada juntamente com os estudantes. Para o acesso e simulação é necessário ter instalado o *software* GeoGebra e acessar o *link*: https://drive.google.com/file/d/1_tX9Npg4YQ_bV1jMVBQS1DxiLmVBctVm/view?usp=sharing

> G_4T_3: Mesmo com os povos babilônicos sendo antigos eles desenvolveram um bom método pois, a área, como eles calcularam, era um método viável para a época.
> G_2T_2: Podemos verificar que a metodologia que eles utilizavam era correta, pois o valor da área é aproximado em torno de 35.

Discutimos aspectos interessantes observadas nas respostas dos estudantes. Os grupos G_2T_2 e G_5T_1 observam que o método fornece uma aproximação para o cálculo da área e o grupo G_4T_3 pondera que o método é bom, considerando as condições objetivas dos babilônios.

Em abordagem mais crítica, os grupos G_6T_2, G_2T_3 e G_1T_3 concluem que o método não é viável, se considerarmos os diferentes formatos que os quadriláteros podem assumir. Nesse aspecto o grupo G_2T_3 argumenta que os quadriláteros observados software têm sua área variando entre 5 e 38 unidades de área[5] e, portanto, em diversos casos o método se mostra ineficiente.

Destacamos ainda a percepção dos estudantes de G_1T_3 e G_4T_1 quando no processo investigativo, encontram relações entre os formatos dos quadriláteros que mais se aproximam da área encontrada pelo método babilônio. Enfatizamos aqui a importância de um trabalho investigativo, pois, ao oportunizar a exploração aberta aos estudantes, decorreu como consequência, resultados originais e diferentes (daqueles que esperamos), e, portanto, ricos em oportunidades de aprendizagem que podem ser sistematizados em discussões coletivas. Ilustramos citando a conclusão que "o processo é mais eficiente quando os quadriláteros têm sua forma próxima do quadrado" (G_4T_1).

Realizamos uma plenária, dando vozes aos grupos que compartilharam as suas percepções e, com base em seus próprios argumentos, chegaram a um consenso (e não verdades) negociados coletivamente sobre o método babilônio. Com a mediação do professor-pesquisador, por meio de questionamentos, foi possível chegar a algumas sistematizações, a citar uma que embasa a próxima etapa do trabalho: *Não basta conhecer as medidas dos lados de um quadrilátero para calcular sua área.*

---

[5] Os valores de área a que os estudantes se referem são os valores aproximados quando modificaram o formato do quadrilátero, buscando encontrar a área mínima e a área máxima que poderiam obter com as medidas pré-fixadas.

Etapa IV – a atividade de campo e a execução dos cálculos

Na etapa IV, após a percepção de que o método babilônico leva apenas a uma aproximação (em muitos casos grosseira), propomos o trabalho de campo, para que os estudantes realizassem as suas próprias medições e os cálculos. Ao os questionarmos sobre como poderíamos obter a área de um quadrilátero qualquer e quais as medidas seriam necessárias, foi preponderante nos grupos a resposta, conforme o relato:

> G_1 T_3: Dividir o quadrilátero irregular em dois triângulos [e obter] a medida da diagonal do quadrilátero (lado que corta o quadrilátero de DB).

Perguntamos às equipes se acreditavam haver outra forma de calcular a área do quadrilátero. Propusemos a seguinte questão: *E se, por algum motivo operacional, não conseguirmos realizar a medição da diagonal do quadrilátero, podemos estabelecer outra estratégia?* Embora alguns grupos tenham sugerido, à exemplo de G_2T_3, realizar "a medida dos ângulos dos quadriláteros" nenhum grupo soube estabelecer um método para a obtenção da área.

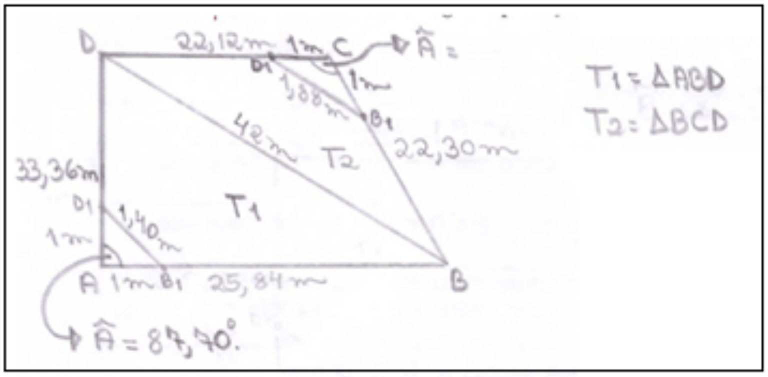
Sugerimos como encaminhamento que o cálculo fosse realizado de duas formas, sendo a primeira como os estudantes tinham proposto e a segunda, buscando obter informações sobre o ângulo para calcular a área, simulando a situação em que a medida da diagonal fosse inacessível. Para tanto, construímos um terreno fictício no Campus, afixando 4 estacas de madeira que foram interligadas por meio de barbante. A Figura 3 ilustra o trabalho realizado pelos estudantes.

Figura 3 – Execução da atividade de Campo

Fonte: Acervo da pesquisa

Como podemos observar na Figura 3, enquanto alguns estudantes faziam os trabalhos de medições outros já esboçaram os desenhos dos quadriláteros anotando as medidas obtidas, conforme mostra a Figura 4.

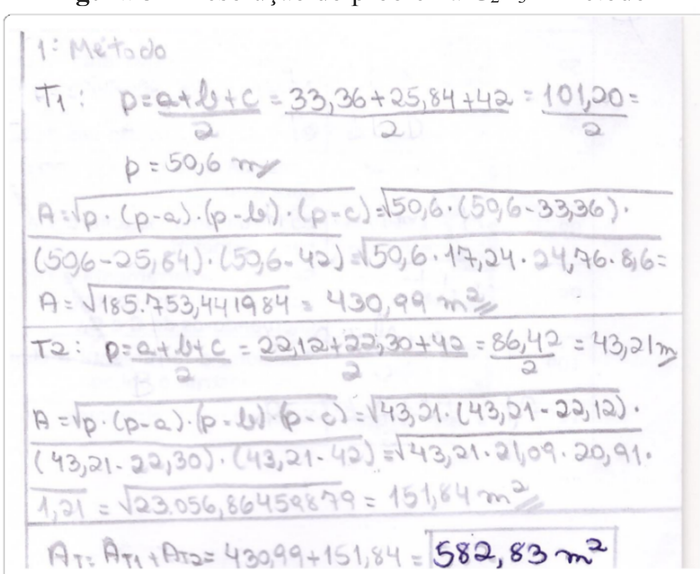
Figura 4 – Esboço do quadrilátero



Fonte: Acervo da pesquisa

Na Figura 4 podemos identificar o esboço inicial do grupo já com as adaptações para a realização dos cálculos, quer seja a divisão e a nomenclatura dos triângulos e também a construção dos triângulos D_1B_1C e D_1B_1A, estratégia organizada posteriormente para calcular a área pelo segundo método. As Figura 5 e 6 indicam os cálculos realizados pelo grupo G_2T_3.[6]

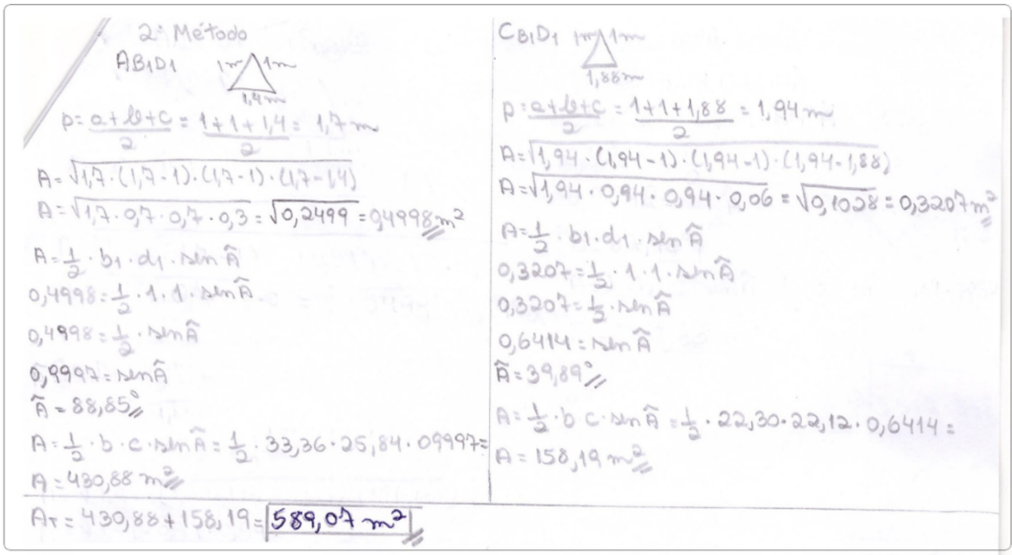
Figura 5 – Resolução do problema G_2T_3 – Método 1



Fonte: Acervo da pesquisa

[6] Apresentamos no texto o esboço e o cálculo realizado por apenas um dos grupos. O processo algébrico realizado pelos diferentes grupos, exceto pela forma de organização e escolhas para aproximações, foi similar, embora as turmas diferentes tenham trabalhado com diferentes dados.

Figura 6 – Resolução do problema G_2T_3 – Método 2



Fonte: Acervo da pesquisa

Destacamos, do ponto de vista técnico, a obtenção de uma aproximação satisfatória, comparando as figuras 5 e 6, que apresenta o cálculo por dois diferentes métodos, sobretudo se considerarmos os materiais e estratégias, em demasia rudimentares, utilizados no processo de medição.

Do ponto de vista pedagógico apontamos a dificuldade encontrada por alguns dos grupos na realização dos cálculos. Em contraponto, surpreendeu-nos o relato de diversos estudantes em relação a tal aspecto, principalmente por pressupor que o trabalho concreto facilitou o entendimento e a realização da tarefa, conforme observamos:

> G_8T_2: O que mais tive dificuldade foi de entender os cálculos por conta de ser muitos dados e números para resolver, mas foi muito divertido fazer, é diferente esta proposta.
> G_4T_1: A etapa mais complexa foi a realização dos cálculos algébricos, mas devido à dificuldade, a fixação dos conceitos foi bem mais eficiente.
> G_5T_1: Chamou atenção [...] a simplicidade do problema, pois o grupo achou que seria muito complexo.
> G_7T_2: Foi muito gratificante pois aprendemos métodos antigos de calcular e comparamos com métodos novos, é muito mais fácil entender e fazer cálculos vendo formas e valores reais [...].

Destacamos, analisando diversos relatos, dentro os quais ilustramos os trechos de G_5T_1 e G_7T_2, que a proposta cumpriu o objetivo de aproximar o aluno da Matemática, à medida que este a reconhece como processo histórico, construtivo-colaborativo e investigativo. Ao perceber que a matemática é fruto de trabalho da humanidade em suas buscas, acertos, erros e aperfeiçoamentos, o aluno se envolve e sente-se realizado com os resultados encontrados.

Após o relato e a análise específica da proposta, realizamos uma análise geral, pautados na questão norteadora dessa investigação, tomando por base o relatório avaliativo elaborado pelos estudantes e as anotações no diário de bordo do professor-pesquisador.

RESULTADOS

Um dos objetivos com a proposta, que em plano conjectural nos levou a articular a participação da história da Matemática pedagogicamente vetorizada (MIGUEL; MIORIM, 2004) ao uso das tecnologias digitais, foi aproximar o aluno da Matemática, a partir da percepção de que a Matemática está inserida em um processo de desenvolvimento humano e coletivo (JESUZ, PEREIRA, 2018). Destacamos tal fato a partir de alguns dos diversos relatos nessa acepção:

> G_7T_3: O grupo todo se envolveu no trabalho, discutindo os cálculos e o *software* na montagem do quadrilátero.
> G_1T_2: [...] os alunos e o professor participaram devidamente da atividade e tiveram uma interação coletiva boa.
> G_6T_2: o envolvimento do grupo foi satisfatório.
> G_5T_2: Proposta altamente educativa que proporcionou o melhor contato com a matéria de forma dinâmica, possibilitou a interação aluno e professor.

O envolvimento dos estudantes com a proposta indica que esta contribuiu no que tange a aproximar o estudante da disciplina. Neste aspecto, enfatizamos o relato de G_5T_2 ao afirmar que a tarefa desenvolvida "proporcionou o melhor contato com a matéria". Ainda nesse aspecto, apontamos:

> G8T2: [...] foi muito divertido fazer e diferente esta proposta
> G5 T1: Chamou atenção [...] a simplicidade do problema, pois o grupo achou que seria muito complexo.

Por vezes os estudantes deixam de "tentar" aprender Matemática tomando por base as suas experiências prévias de fracassos com a disciplina, sobretudo quando esta se apresenta ao estudante, demasiadamente, abstrata (JESUZ; PEREIRA, 2018). Em contrapartida, tanto o relato de G_8T_2 ao afirmar que foi divertido e diferente desenvolver a sequência quanto o recorte de G_5T_1 que destaca "a simplicidade do problema" ao enfatizar que "o grupo achou que seria muito complexo" nos mostra que a proposta pôde contribuir à medida que "rompe com o paradigma de que é uma disciplina para alguns gênios [...] e convida os alunos à investigação, à descoberta, à construção colaborativa (JESUZ; PEREIRA, 2018, p. 47).

Destacamos ainda o viés colaborativo e construtivo proporcionado pela proposta, que fica evidente nos relatos supracitados. Além da interatividade citada por G_1T_2 e G_5T_2, enfatizamos o recorte de G_7T_3 ao abordar sobre a discussão dos cálculos que apontam em direção ao trabalho colaborativo. Sintetizamos tal discussão com outro relato de G_5T_1 que demonstrou o trabalho interativo:

> G_5T_1: O grupo inteiro interagiu e estávamos interessados e conseguimos obter conhecimento durante todo o processo. A atividade deveria ser realizada mais vezes, pois foi uma aula prática que nos ajudou a entender onde [a Matemática] é aplicada e também houve um maior interesse e dedicação por parte dos integrantes do grupo com o trabalho.

O caráter prático da proposta apontado por G_5T_1 é outro aspecto relevante no que tange à aproximação entre estudante e Matemática. Neste âmbito, trazemos alguns relatos para afirmar sua importância:

> G_3T_3: É uma boa forma de aprendermos na prática os conceitos que aprendemos durante as aulas.
> G_4T_3: Com atividade prática o exercício fica visualmente possível a resolução; o grupo trabalhou igualmente, os professores ajudaram na resolução.

Destacamos a contribuição da problematização desenvolvida no processo, conforme apontam Miguel e Miorim (2004, p. 160) a história que põe problemas, ou seja, "que parte de problemas que se manifestam em práticas pedagógicas e investigativas do presente". Nesse viés, analisamos que o desenvolvimento da proposta possibilitou aos estudantes perceber a Matemática presente no seu cotidiano:

> G_1T_2: Conhecimentos matemáticos assimiláveis ao cotidiano.
> G_7T_3: [...] o trabalho ao todo trouxe bastante benefício no entendimento de onde pode ser aplicado no dia a dia.
> G_2T_1: A organização do trabalho em etapas facilitou o desenvolvimento das atividades em grupo. O momento da saída a campo para a medição do terreno contribuiu para a dinâmica da atividade possibilitando uma melhor visualização da aplicabilidade do conteúdo no nosso cotidiano.

Conforme observamos nos relatos de G_1T_2; G_7T_3 e G_2T_1, evidenciamos que o trabalho pautado na articulação entre as tecnologias digitais e a HM, tendo uma perspectiva investigativa e prática cumpriu "o papel de evidenciar ao aluno a importância da Matemática nas diferentes áreas da sociedade e, em específico, percebê-la em suas situações cotidianas" (JESUZ; PEREIRA, 2018, p. 46).

Outro aspecto que trouxe contribuições, a partir da perspectiva dos estudantes foi o viés prático da sequência didática que aportou a apreensão da Geometria de forma clara, conforme destacam:

> G_5T_2: Apresentou a geometria de uma forma mais clara, principalmente pela aula prática para medir a área.
> G_2T_3: A aula prática ajudou em uma compreensão mais exata sobre o assunto e nos conteúdos matemáticos abordados.

Para além do aspecto facilitador destacado por G_5T_2 e G_2T_3 indicamos que a diversidade de estratégias proposta nas diferentes etapas (atividade exploratória com base na história-problema; simulação no GeoGebra; atividade prática para a medição do terreno e realização dos processos algébricos) colaborou diretamente com o aprendizado dos estudantes, conforme apontam os relatos:

> G_7T_3: O que mais nos chamou a atenção foi ver que existem diferentes e bem antigos jeitos de se fazer esses cálculos.
> G_7T_2: Foi muito gratificante pois aprendemos métodos antigos de calcular e comparamos com métodos novos, é muito mais fácil entender e fazer cálculos vendo formas e valores reais [...].
> G_4T_3: [Através da] interdisciplinaridade entre Matemática e História, utilizando o *app* GeoGebra, conseguimos resolver o problema.
> G_3T_3: O que nos chamou a atenção são as diversas formas que podemos usar para chegar ao resultado, é uma boa forma de aprendermos na prática os conceitos que aprendemos durante as aulas.

Enfatizamos G_3T_3 ao apontar que chamou a atenção “as diversas formas que podemos usar para chegar ao resultado”. Tal fato é consoante a perspectiva de Borba, Silva e Gadanidis (2014, p. 50) quando apontam que as atividades Matemáticas concebidas em viés investigativo promovem um “ambiente heurístico, de descobertas, de formulação de conjecturas de um problema e busca por diversificadas resoluções”. Ainda nesse aspecto Borssoi (2013) aponta que as atividades de simulação no *software* favorecem o aprender fazendo dos estudantes. À medida que recebem os feedbacks aprimoram seus conhecimentos, além de propiciar novos e diferentes saberes (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014). Tal aspecto fica evidente nos relatos:

> G_7T_2: Trabalhar com o GeoGebra foi bem interessante pois facilita a visão sobre as formas, dá pra entender melhor como funciona os valores na forma.
> G_5T_3: O grupo direcionou sua atenção para a forma (quadriláteros) e suas medidas. Nesta dinâmica podemos aprender de um jeito diferente e novos cálculos matemáticos.

Ao apontar que "dá pra entender melhor como funciona os valores na forma" referem-se à possibilidade de manipulação no software, o aprender fazendo, que oportuniza os feedbacks quase instantâneos (BORSSOI, 2013; BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014). Tal dinâmica possibilitou, de acordo com G_5T_3, "um jeito diferente de aprender" e "novos cálculos Matemáticos, confirmando o que apontam Borba, Silva e Gadanidis (2014) sobre a assimilação dos conceitos e sobre a aprendizagem de novos e diferentes saberes.

Analisamos como elemento de contribuição da sequência didática, a redefinição de papéis em relação ao tradicional modelo educativo: o professor ensina e o aluno aprende. Embora os relatos dos estudantes mostrem este fato de forma indireta, é possível analisar que se apropriaram de sua importante função na proposta e identificaram a postura do docente como professor-mediador, sendo a função deste propor a problematização e auxiliar nas etapas.

> G_8T_2: Mas foi muito divertido fazer e diferente esta proposta e foi fácil fazer *com a ajuda do professor*
> G_4T_3: Com atividade prática o exercício fica visualmente possível a resolução; o grupo trabalhou igualmente, os *professores ajudaram* na resolução.
> G_1T_2: [...] *os alunos e o professor participaram* devidamente da atividade e tiveram uma interação coletiva boa.
> G_1T_2: [Aspectos positivos] *conseguir calcular* a área de um quadrilátero qualquer; trabalhar em grupo, realizar atividades diferenciadas.
> G_5T_3: O grupo direcionou sua atenção para a forma (quadriláteros) e suas medidas. *Nesta dinâmica podemos aprender* de um jeito diferente e novos cálculos matemáticos.
> G_4T_3: [Através da] interdisciplinaridade entre Matemática e História, utilizando o app GeoGebra, *conseguimos resolver* o problema.

Grifamos alguns trechos dos relatos dos estudantes, uma vez que estes reforçam o trabalho do professor como mediador (e não aquele que professa o conteúdo) além de indicar a redefinição de seus próprios papéis, ao indicar "pudemos aprender"; "conseguir calcular"; "conseguimos resolver". Tais aspectos reforçam o aspecto da história-problema como pintura, permite a docente e discentes o papel de artistas, agir e tomar decisões no presente. A partir da problematização, a sequência didática oportunizou "a constituição dos contextos e circunstâncias de produção dos conceitos, das significações produzidas e negociadas na produção, circulação, recepção e transformação desse conhecimento" (MOTTA, 2006, p. 5).

Ainda nesse viés, destacamos que dentre as atribuições docentes ao longo das etapas, em nenhum momento foi necessário fazer afirmações ou inferências, taxar as respostas/produções como corretas ou incorretas, mas ao contrário, a organização da sequência didática foi conduzindo-os a encontrar por si mesmos as respostas e ponderá-las. Nos poucos momentos em que houve a necessidade de sistematizações, as discussões coletivas com mediação professor, foram o caminho escolhido para manter foco no desenvolvimento autônomo e crítico.

Os elementos evidenciados nos dados da pesquisa sugerem a ocorrência de uma aproximação dos estudantes com a Matemática, de modo que se mostrou eficiente em atender nossos objetivos ou confirmar nossa conjectura inicial (interpretando sob nossa posição de professor-pesquisador). O fato de o estudante envolver-se com o processo e obter, por si mesmo, resultados satisfatórios gera uma autonomia e uma sensação de satisfação que proporciona o desejo de continuar realizando atividades nesse âmbito:

> G_5T_3: Estas atividades deveriam ser feitas mais vezes, pois assim chama mais a atenção dos alunos.
> G_6T_2: Deveríamos realizar mais vezes para visualizar a teoria.
> G_5T_2: Uma forma bem alternativa que o professor deveria optar mais vezes.

As dificuldades e problemas que os estudantes relataram no questionário em uma pergunta específica apontam dois aspectos: dificuldades técnicas com o *software* e, preponderantemente, o relato sobre a complexidade dos cálculos.

> G_2 T_3: Sentimos dificuldades somente na atividade realizada no GeoGebra em que o grupo teve que refazer a atividade três vezes.
> G_6T_2: Dificuldades encontradas para fazer os cálculos.
> G_2T_1: Uma grande falha foi a falta do s*oftware* em algumas máquinas, o que atrapalhou o desenvolvimento de alguns grupos.
> G_7T_2: [...] a dificuldade foi o cálculo grande.
> G_8T_2: e o que mais tivemos dificuldade foi de entender os cálculos por conta de ser muitos dados e números para resolver, mas foi muito divertido fazer e diferente esta proposta.

O problema com o GeoGebra foi pontual, ocorrido em máquinas que estavam sem a versão do *software* ou em versões diferentes das demais, ou ainda computadores com problemas técnicos. Sobre a dificuldade encontrada nos cálculos, também analisamos como natural, afinal alguns dos estudantes tem maior dificuldade em processos algébricos. O encaminhamento dessa etapa do cálculo se deu, predominantemente em sala de aula, mas os grupos que demonstraram maior dificuldade foram convidados a participar de um atendimento paralelo para desenvolver os cálculos. Embora dificuldades foram encontradas, findamos com o relato dos estudantes:

> G_4T_1: O Grupo trabalhou bem e não encontrando muitas dificuldades, sendo que a etapa mais complexa foi a realização dos cálculos algébricos, mas devido à dificuldade, a fixação dos conceitos foi bem mais eficiente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base nas evidências de investigação, concluímos que a sequência didática elaborada cumpriu com sua finalidade específica, quer seja, fugir ao ensino pragmático da Geometria, uma vez que, analisamos as diversas contribuições que ela proporcionou ao aprendizado dos estudantes aos quais a proposta foi desenvolvida.

Outro aspecto que destacamos é a consistência teórico-metodológica da proposta, que possibilitou atingir os objetivos pedagógicos traçados. Nesse âmbito, a participação da História da Matemática por meio da problematização, articulada ao *software* GeoGebra, em seu caráter dinâmico proporcionando a simulação, conduziram os estudantes, via processo investigativo, a construir um conjunto de saberes sobre o tema estudado. Ressaltamos ainda que a variedade de estratégias pedagógicos que constituíram a proposta foi determinante no que tange a atingir a totalidade do alunado. Nesse aspecto trazemos a avaliação de G_1T_1 ao afirmar que "a execução desta atividade auxiliou o grupo na absorção dos conceitos trabalhados, tendo como característica possuir o trabalho de forma híbrido, o que mesclou atividades práticas e teóricas".

Evidenciamos alguns desafios durante a realização da proposta, mas também identificamos os seguintes aspectos que classificamos como positivos para o processo de ensino e aprendizagem: a participação da História da Matemática, no viés da história-problema pedagogicamente vetorizada, contribuiu estimulando o interesse dos estudantes e despertou um trabalho investigativo, ou seja, nossos dados apontaram que a articulação entre a História da Matemática e as Tecnologias Digitais evidenciaram aspectos importantes no processo de aprendizagem dos estudantes, na medida em que o aproxima da Matemática, e este a reconhece como processo histórico, construtivo-colaborativo e investigativo, fruto da construção da humanidade; a atividade de campo contribuiu com a apreensão dos conceitos à medida que proporcionou uma interação teoria/prática e oportunizou aos estudantes perceber a aplicabilidade dos conceitos geométricos estudados; houve um envolvimento dos estudantes com a proposta e a integração aluno-professor e, a redefinição nos papéis docente e discente no processo educacional, à medida que a proposta favoreceu a investigação, a criticidade e o desenvolvimento de autonomia do estudante.

Cabe ressaltar também que a proposta foi efetiva no sentido de modificar e ampliar substancialmente os conceitos apreendidos pelos estudantes. Nesse sentido, destacamos seu aspecto de potencializar o processo de educacional, se comparado, as possibilidades, do ponto de vista da aprendizagem, de um ensino pragmático, pautado exclusivamente em exercícios de fixação e descontextualizados.

Por fim, defendemos a importância do esforço pessoal docente, em buscar formas criativas e inovadoras que potencializem qualitativamente o ensino e a aprendizagem de Matemática e possibilite ao estudante aproximar-se da disciplina. Pode colaborar maciçamente com tal objetivo, uma aproximação efetiva, com colaboração mútua, entre a academia e o fazer pedagógico escolar cotidiano.

AGRADECIMENTO

Os autores agradecem ao professor de História Pedro Francisco Cataneli, por sua colaboração na etapa interdisciplinar da sequência didática.

REFERÊNCIAS

BORBA, M.C. ALMEIDA, H. R. F. L. GRACIAS, T. A. de S. **Pesquisa em ensino e sala de aula**: Diferentes vozes em uma investigação. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

BORBA, M.C. SILVA, R.S.R. GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BORSSOI, A. H. **Modelagem Matemática, aprendizagem significativa e tecnologias: articulações em diferentes contextos educacionais.** Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina – UEL. Londrina, 2013.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. 3 Ed. Trad. Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

FREIRE, P. **Pedagogia da Autonomia**: saberes necessários à prática educativa. Ed. 41. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

JESUZ, D. A. F. **Desenvolvendo o conceito de áreas: uma proposta didática para abordar regiões planas irregulares na Educação Básica**. 2015. 122 f. Dissertação

(Mestrado Profissional em Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

JESUZ, D. PEREIRA, A. Estratégias para ensino de áreas de regiões planas irregulares na educação básica: uma proposta fundamentada no uso do software GeoGebra. **Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico** (EDUCITEC), v. 4, n. 08, 14 nov. 2018.

JESUZ, D. A. F.; ROMEIRO, N. M. L.; BACCON, A. L. P. Uma proposta para o ensino de áreas de quadriláteros irregulares na Educação Básica. In: SIMPÓSIO NACIONAL DO ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA - SINECT, 5., 2016, Ponta Grossa. **Anais eletrônicos...**Ponta Grossa: UTFPR,2016. Disponível em: <https://goo.gl/5rYciP>. Acesso em: 10 out. 2017.

MIGUEL, A. MIORIM, M.A. **História na Educação Matemática**: Propostas e Desafios. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MOTTA, C.D.V.B. **História da Matemática na Educação Matemática**: Espelho ou Pintura? São Paulo, 2006.

Submetido em 03 de fevereiro de 2020.
Aprovado em 26 de maio de 2020.