

La subordinación ontológica en la construcción y comprensión de la definición de función real

The ontological subordination in the construction and understanding of the definition of real function

Yony Díaz

yonydy@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-6107-2209>

Doctorante en Educación Matemática Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Venezuela

Eje Temático: Calidad educativa y prácticas pedagógicas

RESUMEN

Esta ponencia, cuyo contenido forma parte de una investigación doctoral en el campo de la educación matemática, exploró la subordinación ontológica que se presenta en la construcción de la definición de función real por parte de un grupo conformado por tres (3) informantes clave (estudiantes), pertenecientes al noveno grado de educación secundaria de la institución Educativa de Hatillo de Loba – Colombia. El grupo trabajó en situación adidáctica y se le propuso dos preguntas de selección simple con justificación de respuesta. La investigación se soportó en el paradigma

interpretativo, bajo un enfoque cualitativo y el método fenomenológico - Hermenéutico, buscando determinar las cualidades de los estudiantes en su proceso de comprensión de la definición de función real. El análisis de la interpretación de las respuestas y su justificación permiten concluir que la definición de función real es una organización matemática compleja conformada por otros conceptos cuya coexistencia interna está supeditada a una subordinación ontológica, la cual es necesario considerar. Así mismo, la falta de reconocimiento de dicha subordinación conllevó a los

informantes clave a la imposibilidad de identificar acertadamente la equivalencia de representaciones verbal y algebraica de la definición de función real.

Palabras claves: *función real; subordinación ontológica; registro semiótico; representación verbal; representación algebraica*

INTRODUCCIÓN

Uno de los conceptos más importante en matemática es el de función real. Ésta tiene una gran relevancia en la cotidianidad del individuo en la sociedad o del estudiante en educación básica primaria, secundaria y superior. Sin embargo, señalan Cuevas et al. (2018) que un factor importante en el fracaso de los estudiantes en el primer curso de cálculo diferencial, es la carencia del concepto de función. De allí su vital necesidad, importancia y comprensión, a lo largo y ancho de los estudios.

En concordancia con lo anteriormente señalado, se considera necesario acudir a la definición de función real, la cual de acuerdo con la mayoría de los libros de textos es concebida como: ...una correspondencia definida de un conjunto **A** en un conjunto **B** (con $A, B \subseteq \mathbb{R}$), tal que a cada elemento de **A** le corresponde un único elemento de B. Donde A es el dominio y B es el codominio.

Dicha definición, aparentemente simple, presenta un cierto nivel de complejidad, debido a la:

1. cantidad de conceptos que la conforman: conjunto, subconjunto, números reales, correspondencia, relación, dominio y codominio.

2. jerarquía o subordinación que asumen estos conceptos señalados en (1) dentro de la definición de función real.

3. lectura que se debe realizar, involucrando registros y representaciones semióticas.

En este sentido, señalan Gallardo et al. (2008) que en los últimos años se ha valorado el estudio didáctico de los conceptos matemáticos y sus definiciones, como parte fundamental para su dominio, aplicación y resolución de situaciones-problemas o la modelización en matemática.

Por lo tanto, dentro de ese proceso definitorio, aplicación y solución se destaca que los conceptos que conforman tal concepción tienen un determinado nivel jerárquico que le da sentido matemático al modelo planteado. En opinión del autor de este estudio, el concepto de función real debe ser atomizada y revelada en su dependencia ontológica, descubriendo la coexistencia, correlación y sentido de las nociones matemáticas que la conforman.

En consecuencia, el objetivo planteado, va dirigido hacia: caracterizar la dependencia ontológica del concepto y definición de la función real en atención

al significado y a la posición de subordinación de las nociones matemáticas subyacentes.

Para iniciar este apartado, consideré de importancia destacar algún referencial teórico. El primer elemento asumido a priori es el criterio del filósofo Quine (1948), en el sentido que no se puede entender el concepto y definición de función real solo en su todo existencial y mostrativo, solo lo que hay, se muestra y se lee, sino hay que entenderlo según las partes conceptuales que lo conforman, de allí la dependencia ontológica conceptual y jerárquica.

La definición de jerarquía desde el punto de vista filosófico se debe entender como una división de los problemas en niveles de organización (Bunge, 1969). Aplicada la misma a la definición de función real, esta podrá ser comprensible si se reconoce en su estructura la subordinación conceptual que impera entre ella y los elementos conceptuales que la caracterizan. De esta manera, el significado de la definición de función real toma sentido por las filiaciones ontológicas que se manifiestan con los otros conceptos involucrados en la misma.

Desde una posición propiamente didáctica, siguiendo el criterio de Chevallard (1997) la definición de función real es una noción matemática, conformada por otra serie de subconceptos subordinados que deben ser conjugados para entender el enunciado planteado. De la misma manera, por la teoría de los campos conceptuales (Vernaud, 1990), se infiere que la definición

de función real adquiere generalidad y aplicabilidad si los subconceptos matemáticos que la conforman son aprehensibles por el sujeto y están integrados en una red de conceptos que el sujeto debe comprender mediante un proceso de reflexión y aplicación a situaciones dadas.

Por otro lado, se tiene el problema de la significación del concepto de función real, en este sentido plantea Duval (1999) que es imprescindible el análisis de los sistemas semióticos creados durante el aprendizaje de la matemática, ya que a través de este proceso se puede determinar si el estudiante ha sido capaz de relacionar dos tipos diferentes de representación en un mismo registro o de relacionar por lo menos dos registros semióticos con sus respectivas y necesarias representaciones. Solo bajo esas circunstancias se puede decir que el estudiante ha logrado un cambio conceptual con relación al objeto matemático establecido en la situación.

En consecuencia, los registros semióticos vienen siendo los contenedores donde se producen las representaciones. Estos no son absolutos, sino que cada uno de ellos tiene sus propias reglas y pueden ser compartidas por otro. Como ejemplos de registros en las funciones reales se tienen: lenguaje algebraico, esquema gráfico, lenguaje coloquial/natural, tabular, entre otros. Por otro lado, las Representaciones Semióticas son las construcciones por medio de signos con las cuales el estudiante exterioriza sus representaciones mentales. Como ejemplo de representaciones se tienen: representación conjuntista,

representación fraccionaria, escritura funcional, escritura verbal, etc.

Lo anteriormente señalado conlleva a mostrar una relación entre registro y representación semiótica (Cuadro 1):

Cuadro 1. Registro y representación semiótica

Registro semiótico	Representación semiótica
Lenguaje algebraico	$y = f(x): x \rightarrow -6x + 1$ (escritura funcional)
Lenguaje coloquial	A la variable y se le asigna el valor de la variable x multiplicada por -6 y sumado 1 (escritura verbal)

Por todo lo anterior la dependencia ontológica-conceptual se denota en el esquema siguiente (Gráfico 1).

METODOLOGÍA

La investigación se soportó en el paradigma interpretativo, bajo un enfoque cualitativo y el método fenomenológico - Hermenéutico, al ir en la búsqueda de identificar las cualidades de los estudiantes en su proceso de comprensión de la definición de función real.

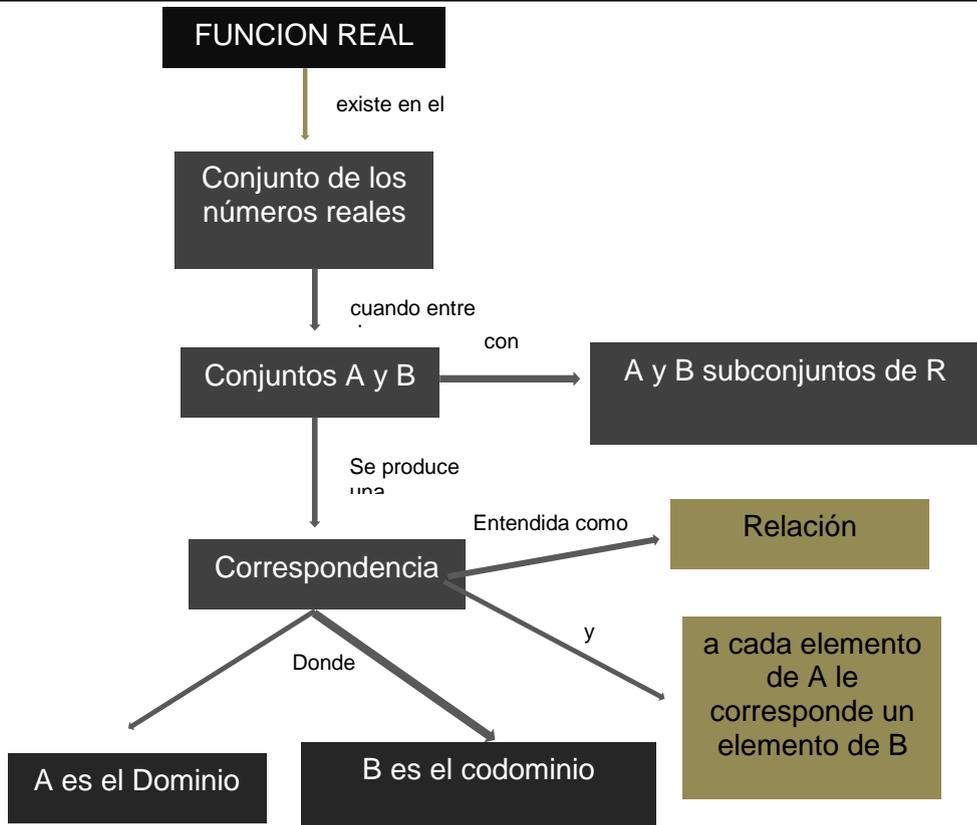


Gráfico 1. Dependencia ontológica en la definición de función real.

Se trabajó con un grupo conformado por tres (3) informantes clave, pertenecientes al noveno grado de educación básica secundaria de la institución Educativa de Hatillo de Loba – Colombia. Una primera fase consistió en una situación adidáctica donde se les propuso a los estudiantes dos preguntas de selección simple con justificación de respuesta. Luego de la discusión debían

seleccionar una opción de las cuatro respuestas propuestas explicando las razones de su opinión.

A continuación, son presentadas las preguntas realizadas durante este ejercicio:

1. Dada la siguiente definición, seleccione la opción que más se adapta al enunciado:

Es una correspondencia definida de un conjunto A en un conjunto B (con $A, B \subseteq \mathbb{R}$), tal que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B. Donde A es el dominio y B es el codominio

- a) La misma define un enlace de elementos entre dos conjuntos reales
- b) La misma define una función real de variable real
- c) La misma define una relación entre dos conjuntos cualesquiera
- d) Todas las respuestas anteriores son correctas

Explique su selección: _____

2. Como representaría usted algebraicamente la definición dada en la pregunta 1):

- a) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- b) $f: A \rightarrow B$
- c) $A \xrightarrow{f} B$
- d) Todas las respuestas anteriores son correctas

Explique su selección. _____

RESULTADOS

La intención didáctica de la pregunta (1) va dirigida hacia la identificación de la proposición planteada en correspondencia con la definición de función real esbozada en el libro de texto, guía de estudio y en la clase del profesor. Para ello, según las características de la definición de una función real, deben reconocer en su proceso de discusión y construcción que las respuestas (a) y (c) están jerárquicamente subsumidas en (b), por lo tanto, de acuerdo a los planteamientos de Quine (1948), Vergnaud (1990) y Chevallard (1997), existe una subordinación esquematizada en el mapa conceptual planteado en el gráfico 1, el cual justifica que (a) y (c) se supeditan a (b).

Por otra parte, dicho proceso de identificación de la subordinación de las respuestas (a) y (c) en (b) demostraría, en palabras de Duval (1999), un acertado tratamiento en el uso interno del registro semiótico conceptual y su representación.

La intención didáctica de la pregunta (2) cae en el plano estrictamente semiótico, con ella se busca que el grupo de estudiantes, dada la definición de función real (pregunta 1), sea capaz de pasar de un registro verbal a un registro algebraico y aplicar una representación funcional. Para ello, se realizó un proceso de análisis representado en los gráficos siguientes:

- 1) Dada la siguiente definición, seleccione la opción de respuesta que más se adapta al enunciado:

"Es una correspondencia definida de un conjunto A en un conjunto B (con $A, B \subseteq \mathbb{R}$), tal que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B. Donde A es el dominio y B es el codominio."

- a) La misma define un enlace de elementos entre dos conjuntos reales
- b) La misma define una función real de variable real
- c) La misma define una relación entre dos conjuntos cualesquiera.
- d) Todas las respuestas anteriores son correctas

Explique su selección.

la "d" por que todas las respuestas dadas muestran una relacion entre dos conjuntos de numeros reales

Gráfico 2. Respuesta a pregunta 1.

De la respuesta seleccionada y su justificación se ha inferido la siguiente cadena explicativa (Gráfico 3), la cual señala el camino cognitivo recorrido para proponer la respuesta y seguidamente son presentadas las justificaciones de cada respuesta en la cadena en el cuadro 2:



Gráfico 3. Cadena cognitiva explicativa 1.

Cuadro 2.
Justificaciones de las respuestas a la pregunta 1.

Estudiante/ Respuesta	Argumento de cada estudiante
E2: b)	Para mí la B.
E1: b)	La misma define una función real de variable real. ¿y tu A2E1?
E3: b)	La misma define una función real de variable real.
E1: d)	Yo digo que es la D
E3: d)	¿Todas las respuestas son correctas?
E2: b)	Yo digo que es la B.
E1: d)	La última porque todos están relacionados, tenemos que explicar, una explicación que concuerde con el enunciado. Yeremi, una explicación que concuerde con el enunciado. Bueno, marquen la D. Explique la selección, la D porque todas las definiciones están relacionadas con ese punto... de A, B... Todas las definiciones muestran una relación de dos conjuntos.
E2: b)	De un conjunto que son función real..., porque pertenece a todos los números reales.
E1: d)	Explique su selección vamos a poner porque todos los enunciados dados muestran una relación entre dos conjuntos, porque todos aquí dicen una relación entre dos conjuntos. Bueno escriban eso.
E2: d)	La D porque todas las respuestas están relacionadas con dos conjuntos reales cualesquiera. Muestran una relación entre dos conjuntos reales cualquiera. Porque puede uno anotar cualquier número real, así sea desde el menos uno, desde el infinito y desde el uno hasta el infinito.

Del cuadro anterior, se destaca que en la pregunta (1) se le solicita al grupo que seleccione *la opción de respuesta que más se adapta al enunciado*. Al estudiar su mecanismo explicativo la opción (b) aparece inicialmente como posible respuesta, pero sin argumento que la sostenga, por ello seguidamente

surge la opción (d), infiriéndose que las opciones (a), (b) y (c) son independientes y pueden ser consideradas como posibles respuestas, concluyendo además que todo el enunciado se reduce a una relación entre dos conjuntos reales (A y B), obviando todos los demás elementos conceptuales que la componen. Esto ocurre porque excluyen la subordinación conceptual de las opciones (a) y (c) en (b) respuesta más adaptada al enunciado según (Chevallard, 1997; Vergnaud, 1990), esquematizada en el mapa conceptual planteado anteriormente.

En concordancia con los enunciados de Quine (1948), este argumento se explica puesto que la definición de función real es considerada, por el grupo de estudiantes, en su esencia existencial relacionada solo con dos objetos materiales relacionados (los conjuntos a y B) y no como dependiente de otras entidades (conceptos) ontológicas no concretas que la definen.

Por otra parte, la falta de identificación de la subordinación de las respuestas (a) y (c) en (b) demostraría, en palabras de Duval (1999), que el grupo de estudiantes no es capaz de realizar un tratamiento dentro del mismo registro verbal, que lo lleve, dentro de éste, a identificar acertadamente una representación verbal y concluir que tal definición corresponde a aquella de función real.

El modelo de respuesta propuesto por el grupo se puede resumir en el siguiente esquema (Gráfico 4):

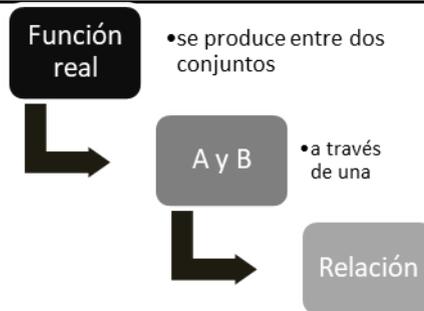


Gráfico 4. Modelo de respuesta pregunta 1

En cuanto al análisis de las respuestas a la pregunta (2) y su justificación dadas por el grupo de estudiantes es presentada en el gráfico 5 a continuación y posteriormente expuesta su argumentación:

2) Como representaría usted analíticamente la definición dada en la pregunta 1):

- a) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- b) $f: A \rightarrow B$
- c) $A \xrightarrow{f} B$
- d) Todas las respuestas anteriores son correctas

Explique su selección.

la "b" por que nos indica que "A" le pertenece un único elemento de conjunto "B", en donde "A" es el dominio y "B" el codominio

Gráfico 5. Respuesta a pregunta 2.

De la respuesta seleccionada y su justificación se ha inferido la siguiente

cadena explicativa (Gráfico 6), la cual señala el camino cognitivo recorrido para proponer la respuesta y seguidamente se presenta su justificación en el cuadro 3:



Gráfico 6. Cadena cognitiva explicativa 2.

Cuadro 3.
Justificaciones de las respuestas a la pregunta 2.

Estudiante/ Respuesta	Argumento de cada estudiante
E2: d)	Es como si fuera función, es lo mismo, la D.
E3: d)	Todas las respuestas anteriores son correctas.
E2: d)	Si porque en una función se puede agarrar cualquier letra.
E1: b)	Va de un conjunto A a B.
E3: b)	Es la B.
E1: b)	“¿Cómo representaría usted analíticamente la definición dada en la pregunta uno?” La B, ¿están de acuerdo? Pero esto va como a la función.
E2: b)	Yo sé, la función que corresponde a esta (La primera pregunta).
E1: b)	Mira que dice una correspondencia definida de un conjunto A a un conjunto B, no podemos poner todas las preguntas son correctas porque aquí dice de R a R y aquí nos dice de A a B.
E2: b)	okey, mira, A es función de B. La B.
E1: b)	La B
E3: b)	La B. Una explicación para eso, tu..., A2E1?.
E1: b)	Porque está relacionada..., bueno, vamos a escribir esto, la B porque nos indica que a cada conjunto de A le pertenece un único elemento del conjunto B.
E2: b)	en donde A es el dominio y B el codominio.

En su tratamiento analítico el grupo parte, sin convicción, de una definición:

como si fuera una función, denotando que no hay una certeza de tal tesis, sin embargo, seleccionan como respuesta la opción d) (*Todas las respuestas anteriores son correctas*) resaltando que esta elección recoge a las alternativas a), b) y c), infiriéndose, a priori, que en su estructura cognitiva existen y usan diferentes tipos de representación semiótica algebraica para una misma definición. Sin embargo, a posteriori terminan acogándose a la opción b) como mejor respuesta ya que es la que evidencia la correspondencia entre dos conjuntos taxativamente definidos como A y B.

Parece indudable entonces, que al no lograr reconocer la definición de función real propuesta en la pregunta 1) en términos de la opción b), que representa la subordinación y existencia del tratamiento dentro del registro semiótico verbal, en la pregunta 2) se les dificulta reconocer la opción d) como respuesta más acertada y en consecuencia interpretar que la definición de función real puede tener diferentes representaciones algebraicas, sin alterar su significación.

CONCLUSIONES

Las evidencias obtenidas de la interpretación de las respuestas y su justificación de los dos ítems propuestos permiten concluir que:

1. El grupo de informantes clave interpreta el enunciado de función real solo en atención a una correspondencia o relación entre dos conjuntos A y B, desconociendo los demás conceptos involucrados en la construcción de la definición.

2. La definición de función real es una organización matemática compleja conformada por otros conceptos cuya coexistencia interna está supeditada a una subordinación ontológica, la cual es necesario considerar.

3. La falta de reconocimiento de dicha subordinación conllevó a los informantes clave a la imposibilidad de identificar acertadamente la equivalencia de representaciones verbal y algebraica de la definición de función real.

REFERENCIAS

- Bunge, M. (1969): "La metafísica, epistemología y metodología de los niveles", publicado en Whyte, L.: "Hierarchical structures", American Elsevier [en español (1973): "Las estructuras jerárquicas", Alianza, Madrid].
- Chevallard, Y. (1997) La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Editorial Aique. Buenos Aires: Argentina.
- Cuevas, C., Delgado, M., Reyes, M. (2018). Una propuesta para introducir el pensamiento funcional y el concepto de función real, antes de un curso de cálculo diferencial. Revista Logos y tecnología. Vol. 10. Número 2. En <https://revistalogos.policia.edu.co:8443/index.php/rlct/article/view/557>. Consultado el 3 de enero 2022. 430pm
- Duval, R. (1999) Semiosis y pensamiento humano. Universidad del Valle,

Instituto de Educación y Pedagogía, Colombia.

- Gallardo, J., González, J-L., Quispe, W. (2008). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*. On-line. Relime vol. 11. N° 3. Consultada: 4 de enero de 2022. 5 pm.
- Quine, W.v.O. (1948). « On what there is ». *Review of Metaphysics* (2 (5)). (Reproducido en *id.* « From a Logical Point of View », pp.1-19). pp. 21-38.
- Vergnaud, G. (1990) La teoría de los campos conceptuales, en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10, nº 2, 3, pp. 133-170