REMat
Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional São Paulo

doi.org/10.37001/remat25269062v17id281 eISSN: 2526-9062

Registro das etapas da Resolução de Problemas como recurso para um melhor desempenho de estudantes em vários níveis de escolaridade

Rosana Nogueira de Lima [1]
Centro Nacional de Educação (CENAED), São Paulo, SP, Brasil

Maria Elisa Esteves Lopes Galvão [2]
Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN), Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo, SP, Brasil

Resumo
Neste artigo, temos por objetivo analisar a contribuição que uma Ficha de Resolução de Problemas pode trazer para o desenvolvimento de habilidades relacionadas à resolução de problemas. A Ficha foi desenvolvida com o intuito de que os alunos passassem pelas fases de Entrada, Ataque e Revisão propostas por Mason, Burton e Stacey. Trabalhamos problemas multiplicativos com alunos de 5º ano do Ensino Fundamental, problemas envolvendo funções com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental na modalidade EJA e problemas envolvendo equações lineares com alunos de 2º ano de Ensino Médio. Em todos os momentos, os alunos trabalharam em grupo e com o uso dessa ficha. Os resultados evidenciam que todos os públicos compreenderam o conceito matemático apresentado e desenvolveram habilidades de resolução de problemas.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Ficha de Resolução de Problemas; Educação Matemática.

Register of stages of Problem Solving as a resource to a better development of students from various school levels

Abstract
In this paper, we aim at analysing the contribution of a Problem Solving Sheet to the development of problem solving abilities. The Sheet has been developed to propitiate students to pass through Mason, Burton and Stacey phases of Entry, Attack and Review. We worked multiplicative problems with 10-year-old students, function problems with students in Youth Education and linear equation problems with 16-year-old students. In all moments, students worked in groups and using such Sheet. Results evidenced that all students understood the mathematical content and developed abilities to solve problems.

Keywords: Problem Solving; Problem Solving Sheet; Mathematics Education.

Submetido em: 15/07/2020 **Aceito em:** 22/03/2020 **Publicado em:** 01/05/2020

[1] Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Professora do Centro Nacional de Educação – CENAED. Endereço para correspondência: Rua Professor José Horácio Meirelles Teixeira, 250 ap 41, Vila Suzana CEP 05630-130 SP/SP. E-mail: rosananlima@gmail.com.br.

[2] Doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo. Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo. Endereço para correspondência: Rua Carajuá, 60 Ap 12, Vila Uberabinha CEP 04520-020 SP/SP. E-mail: elisa.gal.meg@gmail.com.

Registro de los pasos para Resolver Problemas como un recurso para un mejor desempeño de los estudiantes en varios niveles de escuela

Resumen
En este artículo, nuestro objetivo es analizar la contribución que un Formulario de resolución de problemas puede aportar al desarrollo de habilidades relacionadas con problemas. El Formulario fue desarrollado con el objetivo de permitir a los estudiantes pasar por las fases de Entrada, Ataque y Revisión propuestas por Mason, Burton y Stacey. Trabajamos con problemas multiplicativos con estudiantes de 5º grado, problemas que involucran funciones con estudiantes de 9º grado en la modalidad EJA y problemas que involucran ecuaciones lineales con estudiantes de 2º grado. En todo momento, los estudiantes trabajaron en grupos y utilizando este formulario. Los resultados muestran que todos los públicos entendieron el concepto matemático presentado y desarrollaron habilidades para resolver problemas.

Palabras clave: Resolución de Problemas; Formulario de resolución de problemas; Educacion Matematica.

1. Introdução

De acordo com Schroeder e Lester (1989), há três meios diferentes de se utilizar a resolução de problemas no ensino de Matemática: ensinar *para* a resolução de problemas, ensinar *sobre* a resolução de problemas e ensinar *via* resolução de problemas.

O ensino *para* a resolução de problemas é aquele em que o aluno aprende conceitos matemáticos para que ele possa resolver problemas. Ao ensinar *sobre* a resolução de problemas, o professor propicia que o aluno aprenda meios de se resolver problemas, que compreenda e se conscientize dos raciocínios que desenvolve ao longo do processo de resolução do problema. Finalmente, no ensino *via* resolução de problemas, o aluno aprende conceitos matemáticos a partir da resolução de problemas. Entendemos que o ensino *via* resolução de problemas pode englobar os ensinos *sobre* e *para* resolução de problemas, no sentido de que, ao se trabalhar *via* resolução de problemas, o aluno acaba por aprender a resolver problemas e também aprende conteúdos matemáticos que podem ser, posteriormente, utilizados para resolver problemas.

Em nossas pesquisas, observamos que não é possível ensinar *via* resolução de problemas sem que os alunos tenham familiaridade com essa abordagem. Assim, buscamos, inicialmente, entender como poderíamos ensinar os alunos *sobre* essa metodologia.

George Polya, um matemático e professor de Matemática húngaro escreveu o livro “How to solve it”, traduzido para o Português como “A arte de resolver problemas”. Nele, Polya apresentou quatro etapas que um indivíduo deve passar para resolver um problema. São elas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

Inspirados pelas ideias de Polya, Mason, Burton e Stacey (1982) desenvolveram um método para se resolver problemas e desenvolver raciocínio matemático. Para eles, qualquer pessoa pode resolver problemas autonomamente, passando por três fases: a *Entrada*, o *Ataque* e a *Revisão*.

Na fase da *Entrada*, o aluno deve familiarizar-se com o problema. Para isso, ele deve compreender, principalmente, quais são as informações apresentadas no problema e qual é a pergunta do problema, isto é, o que se deve buscar. Além disso, o aluno deve também refletir sobre quais conhecimentos matemáticos são necessários para se resolver o problema. Para que essas informações não sejam perdidas, Mason, Burton e Stacey (1982) sugerem que sejam feitas anotações, que eles chamam de "Rubrica". Essas anotações são essenciais para que o aluno possa refletir sobre o problema e sobre como resolvê-lo. Assim, a estrutura de trabalho na fase de Entrada baseia-se em três questões: "*1) o que eu sei? 2) o que eu quero? e 3) o que eu posso introduzir?"* (MASON; BURTON; STACEY, 1982, p. 29, tradução nossa).

Na fase de *Ataque*, o aluno se apossa do problema e parte para a ação, buscando resolvê-lo. É nessa fase que os conhecimentos matemáticos são utilizados a partir dos dados que foram levantados no enunciado do problema. Para resolvê-lo, o aluno levanta conjecturas e as testa. É possível que suposições e conjecturas levantadas não sejam válidas. Nesse caso, ele deve reformulá-las e tentar resolver o problema novamente. De acordo com Mason, Burton e Stacey (1982), o aluno deve se convencer e aos outros de que a resolução é válida e a solução correta.

Finalmente, a fase da *Revisão* é considerada a mais educativa delas. É nessa fase que se deve verificar o que foi feito. Assim há uma volta ao problema, de forma que o aluno possa verificar se a solução é realmente válida, refletir sobre as ideias que foram geradas durante a resolução do problema e estender o conhecimento desenvolvido para um contexto mais amplo.

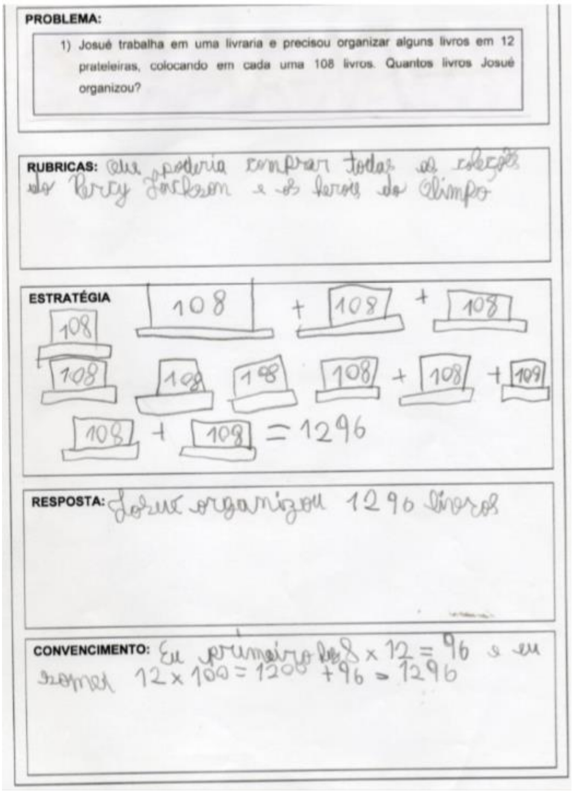
A passagem de uma fase para outra permite uma mudança de sentimentos sobre o problema em questão e pode propiciar reflexões sobre processo de resolução envolvido e o progresso do aluno no que se refere a conhecimentos desenvolvidos durante a resolução do problema.

Os autores apontam também a necessidade de se fazer anotações para iniciar e em todas as etapas da resolução de um problema. Para eles, "escrever os sentimentos que você tem e as ideias matemáticas que lhe ocorrem destruirá a brancura gritante do pedaço de papel que você enfrenta quando você começa a responder uma pergunta" (MASON; BURTON; STACEY, 1982, p. 11, tradução nossa).

1.1 A Ficha de Resolução de Problemas

Tendo em mente as três fases para a resolução de problemas elaboradas por Mason Burton e Stacey (1982), e a necessidade de se livrar "da brancura do papel", Cybis e Lima (2015) elaboraram uma Ficha de Resolução de Problemas que permitisse que alunos pudessem efetivamente passar por tais fases. Nesta Ficha, há algumas etapas que devem ser preenchidas pelo aluno, com o intuito de que ele não perca informações, que ele possa anotar elementos essenciais extraídos do enunciado do problema, conteúdos que podem colaborar para a resolução do problema, explicitar o raciocínio feito durante a resolução, a resposta efetiva do problema e razões que validam a solução apresentada.

Cybis e Lima (2015) elaboraram a Ficha com as seguintes etapas: *Problema*, *Rubrica*, *Estratégia*, *Resposta* e *Convencimento*. Na primeira etapa, apresenta-se o enunciado do problema. Na etapa da *Rubrica*, deve-se anotar as informações do problema e os primeiros pensamentos sobre a resolução. Na etapa da *Estratégia*, apresenta-se uma estratégia para resolver o problema e a própria resolução. Na etapa da *Resposta*, volta-se ao problema, para reler o enunciado e observar se a solução encontrada é válida, para que se possa escrever a resposta ao problema. Finalmente, na etapa do *Convencimento*, explica-se porque a resolução e a solução encontradas são matematicamente válidas para o problema. Na Figura 1, apresentamos um exemplo da Ficha.


PROBLEMA:

1) Josué trabalha em uma livraria e precisou organizar alguns livros em 12 prateleiras, colocando em cada uma 108 livros. Quantos livros Josué organizou?

RUBRICAS: Que poderia comprar todas as coleções do Percy Jackson e os herois do Olimpo

ESTRATÉGIA 108 108 108 + 108 + 108 108 108 108 108 + 108 + 109 108 + 108 = 1296

RESPOSTA: Josué organizou 1296 livros

CONVENCIMENTO: Eu primeiro fiz 8 x 12 = 96 e eu somei 12 x 100 = 1200 + 96 = 1296

Figura 1: Ficha de Resolução de Problemas
Fonte: Cybis e Lima (2015)

É nosso entendimento que as etapas da *Rubrica* e *Estratégia* permitem que o aluno passe pela fase da *Entrada*, que as etapas da *Estratégia* e do *Convencimento* se referem à fase de *Ataque*, e que as etapas da *Resposta* e do *Convencimento* colaboram para o desenvolvimento da fase da *Revisão*.

As pesquisas que se seguiram, de Pita (2016) e de Sena (2017) fizeram pequenas modificações na nomenclatura das etapas da Ficha, numa tentativa de melhor adaptá-la aos participantes das respectivas pesquisas. Ambas modificaram a etapa da *Rubrica*: Pita (2016) para *Rascunho* e Sena (2017) para *Anotações*. Pita (2016) também alterou a etapa da *Estratégia* para *Resolução* e a etapa da *Resposta* para *Revisão*. Essas mudanças, entretanto, não modificaram o objetivo de cada etapa da Ficha. Assim, para este artigo, nos referiremos às etapas de *Anotações*, *Resolução*, *Resposta* e *Convencimento*. Escolhemos utilizar esta nomenclatura, pois ela nos parece a mais adequada para expressar o que se pretende com cada etapa. Tivemos o cuidado de apresentar tais mudanças neste artigo para que o leitor possa compreender se porventura nomes diferentes aparecerem nas figuras extraídas de cada pesquisa.

Neste artigo, apresentamos situações destacadas das três pesquisas, nas quais há evidências de que a Ficha de Resolução de Problemas foi fundamental para que os participantes pudessem refletir sobre o trabalho de se resolver um problema, exteriorizar o raciocínio realizado na resolução e entender que a volta ao problema é essencial para uma eficaz resolução. Além disso, os alunos puderam compreender melhor, em cada um dos problemas, os conceitos envolvidos, e entender, mais profundamente, as características e propriedades inerentes a eles. Dessa forma, trabalhamos tanto o ensino *sobre* quanto *via* resolução de problemas.

2. Entrando na Resolução do Problema

Como mencionado anteriormente, a Ficha de Resolução de Problemas foi utilizada em três pesquisas diferentes no que se refere ao público participante e ao conteúdo matemático envolvido nos problemas aplicados. Por outro lado, todas as pesquisas envolviam a ideia de trabalho em grupo e utilização da ficha para que os alunos pudessem refletir sobre a resolução de problemas. Em todas as pesquisas, as Fichas já utilizadas pelos alunos ficavam à disposição deles para própria consulta.

Assim, nossa “Entrada” ao problema de analisar a contribuição que esta Ficha pode trazer para o desenvolvimento de habilidades relacionadas à resolução de problemas se inicia com a descrição dos procedimentos metodológicos utilizados em cada pesquisa.

Iniciamos o trabalho com a Ficha com 19 alunos de uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola particular de São Paulo/SP (CYBIS; LIMA, 2015). Estes alunos tinham um momento destinado à resolução de problemas uma vez por semana. Ainda assim, eles não haviam ainda desenvolvido hábitos autônomos de resolução de problemas, nem de reflexão sobre os processos heurísticos que adotavam para a resolução, por isso a introdução da Ficha se fez necessária. Com eles, foram trabalhados problemas multiplicativos. Eles trabalharam em grupos de 4 ou 5 alunos, iniciando o uso da Ficha individualmente, pelas Anotações, e passando para as outras etapas em grupo, discutindo sobre as anotações de cada integrante. Os grupos foram áudio-gravados e o trabalho escrito deles foi coletado. Os dados foram analisados à luz da Teoria de Campos Conceituais de Vergnaud (2009), em particular as ideias de cálculo relacional e cálculo numérico. De acordo com Vergnaud (2009), o cálculo numérico se refere às operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão, isto é, à conta, ao cálculo a ser efetuado, enquanto o cálculo relacional se refere ao pensamento envolvendo as relações das situações, isto é, à lógica do problema. O estudante precisa dominar tanto o cálculo numérico quanto o relacional. Vergnaud (2009) ainda aponta que é o cálculo relacional que guia o aluno para o cálculo numérico adequado para cada situação.

Na segunda utilização da Ficha de Resolução de Problemas, trabalhamos com 11 alunos da modalidade EJA de uma escola pública do município de São Vicente/SP, no 9º ano do ensino regular (PITA, 2016). Trabalhamos com eles problemas relacionados ao conceito de função, ainda não conhecido por eles. Os temas dos problemas foram escolhidos por eles, a partir das necessidades práticas que apontaram. Pesquisas como as de Ferreira (2011) e Fonseca (2012) relatam que o uso da resolução de problemas pode ser um fator motivador para esse público, que passou muito tempo fora da sala de aula e se interessa principalmente por elementos que possam ser relacionados a atividades cotidianas. Os alunos trabalharam em trios e uma dupla para resolver os problemas, tendo sido áudio-gravados e as fichas escritas recolhidas para análise. Os dados coletados foram analisados de acordo com os modos de pensamento Narrativo e Paradigmático de Bruner (2001). Para Bruner (2001), narrativa é uma sequência de eventos carregados de significados, e se justifica pelo simples fato de contar uma história para que haja uma desmitificação de algo duvidoso, ou ainda algo que o interlocutor tenha a resolver ou a sanar. Já o pensamento paradigmático associa-se ao desenvolvimento formal de conceitos, ou seja, quando há uma apropriação de ideias demonstradas, descritas ou argumentadas, segundo o autor, o sujeito tenta preencher o ideal de um sistema formal e matemático de explicações e provas por meio de argumentos empíricos.

Finalmente, na pesquisa de Sena (2017) participaram 25 alunos de 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual de São Paulo/SP. Eles buscaram resolução de problemas envolvendo equações polinomiais de primeiro grau. Os participantes tinham muita dificuldade em transpor o enunciado de um problema para a linguagem matemática, e conjecturamos que isso poderia ser amenizado pelo uso da Ficha. Os alunos trabalharam em duplas ou trios, foram áudio-gravados e tiveram seus protocolos recolhidos para análise. Analisamos os dados coletados a partir da teoria dos Três Mundos da Matemática de Tall (2013). De acordo com Tall (2013), existem pelo menos três diferentes tipos de conceitos em Matemática, que habitam três diferentes mundos: o mundo conceitual corporificado, o mundo operacional simbólico e o mundo formal axiomático. O mundo corporificado é o mundo das observações, ações e reflexões sobre objetos, referindo-se a objetos físicos e também a experiências mentais. O mundo simbólico é o do uso dos símbolos matemáticos. O símbolo tem a função de representar as ações e as percepções existentes no mundo corporificado. O mundo formal axiomático é baseado em linguagem formal, em definições formais e axiomas, que são usados para formar as estruturas matemáticas, fazer deduções e demonstrações.

Nas três pesquisas apresentadas, a fundamentação teórica não foi a mesma por terem sido consideradas as características dos participantes e os conteúdos a serem trabalhados. No presente artigo, a análise que nos interessa é justamente verificar a contribuição da Ficha para o desenvolvimento de habilidades relacionadas à resolução de problemas. Dessa forma, nossa análise retrata a passagem dos alunos pelas fases de entrada, ataque e revisão, e não os quadros teóricos anteriormente utilizados.

3. O Ataque às Dificuldades por meio da Ficha de Resolução de Problemas

Cada grupo de participantes com os quais nos deparávamos tinha necessidade de desenvolvimento de um elemento diferente. Os alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, além de terem dificuldades de se desenvolverem quando o conteúdo era multiplicação, também tinham dificuldades em compreender os processos pelos quais passavam ao resolver problemas. Alunos da EJA demandavam um tratamento diferenciado para a compreensão do conceito de função, dadas as necessidades deles de entender também a Matemática nas atividades cotidianas e no mundo a volta deles. Os alunos de 2º ano do Ensino Médio apresentavam grande dificuldade de compreender como representar com linguagem matemática os problemas a eles propostos.

Para atacar cada uma dessas dificuldades, nosso intuito foi duplo, o de ensinar os alunos a observarem e compreenderem os processos que desenvolviam ao resolver um problema e ensinar um conteúdo (ensinar *sobre* e *via* resolução de problemas). A riqueza da metodologia de resolução de problemas permite que ambos os objetivos sejam alcançados, mas vimos a necessidade de um instrumento que colaborasse para que os alunos pudessem organizar seu raciocínio, compreender o problema e aprender com isso. A utilização da Ficha de Resolução de Problemas se mostrou eficiente como um recurso para superar as dificuldades apontadas.

3.1 Alunos de 5º ano resolvendo problemas multiplicativos

Magina, Santana, et al. (2010) analisaram as estratégias que estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental de escolas públicas do Sul da Bahia apresentaram na resolução de problemas aditivos. Observaram que a ausência de palavras-chave nos problemas, do tipo “mais”, “menor que” e “menos”, por exemplo, pareceu dificultar a escolha da operação a ser efetuada na resolução. No nosso caso, a presença da expressão “três vezes mais” fez com que muitos dos alunos escolhessem a operação incorreta para resolver o problema multiplicativo proposto. Entretanto, a reflexão possibilitada pelas etapas da ficha permitiu que eles revissem seu trabalho e reformulassem a estratégia de resolução. Isso pode ser observado no trabalho de Gabriele. Na Figura 2, apresentamos as *Anotações* de Gabriele para um problema em que, para fazer um conjunto era necessário "três vezes mais tecido" do que para fazer uma saia. Ao se perguntar "quanto tecido é necessário para fazer uma saia", dado que para um conjunto usa-se 3 metros de tecido, Gabriele entendeu que deveria multiplicar 6 por 3.

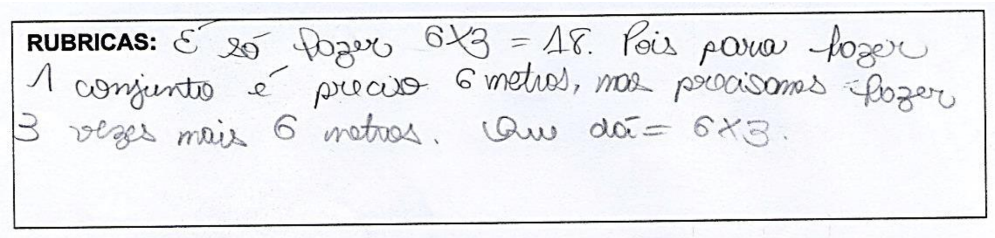

RUBRICAS: É só fazer 6x3 = 18. Pois para fazer 1 conjunto é preciso 6 metros, mas precisamos fazer 3 vezes mais 6 metros. Que dá = 6x3.

Figura 2: Rubrica da aluna Gabriele

Fonte: Cybis e Lima (2015)

Gabriele apresenta em suas *Anotações* ideias ligadas à expressão "três vezes mais", o que fica explícito quando ela registra a multiplicação a ser efetuada. Ao colocar o seu plano em ação, percebe que ele não é válido para responder o problema, e efetua uma divisão ao passar para a etapa da Resolução. Dessa forma, observamos uma dificuldade relatada em outras pesquisas cuja superação foi possibilitada pelo trabalho com a Ficha.

Molinari (2010) enfatiza a preocupação em propiciar um espaço para os alunos explicarem seu raciocínio para resolver um problema e discutirem sobre outros meios de se resolver um mesmo problema. Em nossa pesquisa, a etapa do Convencimento foi essencial para se comparar diferentes resoluções e para propiciar a compreensão da importância do cálculo relacional. Evidenciamos, no diálogo a seguir, que os próprios estudantes distinguem entre realizar com eficácia o algoritmo da multiplicação e compreender com eficiência o cálculo relacional (relações existentes na multiplicação) no momento de redigir o Convencimento:

Lúcio: Convencimento: todas as contas deram o mesmo resultado.

Danilo: Ah para, sem zoeira, vai. [...]

Isabel: É para concluir sobre o problema e não se todos os cálculos deram respostas iguais.

Lúcio: Vamos fazer a operação inversa.

Isabel: Não, eu não vou fazer isso. [...] Não é preciso. [...] A conta inversa só prova que o cálculo está certo e não que o problema está certo.

Lúcio: É verdade.

(Trecho de áudio do Grupo G2)

Para convencer sobre a resolução do problema, Lúcio afirma que deve apresentar que todos os cálculos resultaram no mesmo número, ou que basta efetuar uma operação inversa. Isabel desconsidera as ideias de Lúcio, com a justificativa de que o cálculo efetuado pode estar correto, mas não assegura que o problema tenha sido resolvido corretamente. A aluna Isabel destaca que precisam revisar o cálculo relacional (VERGNAUD, 2009), e não o cálculo numérico (VERGNAUD, 2009), trazendo riqueza ao Convencimento.

3.2 Alunos da EJA resolvendo problemas relacionados à Função

A primeira reação que tivemos ao trabalhar com alunos da EJA foi que, ao receberem a Ficha, eles ficaram surpresos com as etapas nela apresentadas, talvez por estarem acostumados a somente resolver um problema, e não a construírem uma resolução na Ficha, isto é, a refletir sobre como elaborar a resolução, anotar dados e considerações, e voltar ao problema. Para eles, era um guia de como resolver um problema, e lhes pareceu agradável.

Uma dificuldade apresentada em pesquisas (por exemplo NASSER; SOUZA; TORRACA, 2012) sobre o conceito de função é a de se compreender funções definidas por mais de uma sentença. Ao trabalharmos com a Conta de Água, uma necessidade dos próprios alunos, eles puderam compreender esse tipo de função de maneira intuitiva, como apresentado no diálogo abaixo.

> **Joana**: Pelo que entendi, esses valores dependem do consumo, porém também dependem das faixas acima. Assim, até 10m³ multiplicamos pelo primeiro valor. Depois, de 11 até 20, pelo segundo valor...
> **André**: Mas não desprezamos os valores, temos que ir somando. Você percebeu que as faixas estão separadas, mas estão juntas no final?
> **Joana**: É verdade!
>
> (Transcrição de áudio)

Este diálogo evidencia que Joana e André compreenderam como calcular o valor a pagar do consumo de água a partir das informações presentes na conta. Evidencia, também, a compreensão deles de como lidar com uma função definida por mais de uma sentença e que elas são relacionadas.

Observamos que a etapa de Resposta da Ficha proporcionou a esses alunos, não somente a reflexão sobre o problema em si, mas também sobre os próprios procedimentos de resolução de problemas. O grupo de Mada, Maria e Marta, ao voltarem ao problema, observaram que deveriam duplicar o valor que encontraram, considerando água e esgoto. Carlos ainda exterioriza sua "afobação" por acabar rapidamente e não responder de forma apropriada.

> **Carlos**: Que engraçado! (Risos) Essa revisão! Agora tudo ok! Acho que tenho que sempre fazer revisão nas atividades que faço, porque sempre esqueço alguma coisa, fico afobado para terminar rápido.

André: Sim. É para ver se não esquecemos alguma conta ou de algum dado importante. Então vamos lá!

(Transcrição de áudio)

Esse diálogo evidencia uma predisposição à mudança na maneira de resolver atividades por causa da Ficha de Resolução de Problemas e as etapas nela apresentadas. Carlos observou que rapidez pode prejudicar a resolução de atividades e problemas, e a revisão é um meio de se garantir resultados mais efetivos.

3.3 Alunos de Ensino Médio e os problemas sobre equações lineares

Para analisarmos como os alunos tratavam a relação entre enunciado de um problema e a tradução dele para a linguagem algébrica, aplicamos, inicialmente, um problema que solicitava explicitamente o sistema de equações que o resolveria (Quadro 1).

Quadro 1: Enunciado do Problema do Encontro 1

Em uma caixa existem peças em formatos de triângulos e pentágonos, nas quantidades de “x” triângulos e “y” pentágono. Sabe-se que a soma das quantidades de peças é igual a 12 e que, se somarmos as quantidades de vértices de todas as peças, obtemos 52. Qual sistema de equações que permite descobrir as quantidades de peças triangulares e pentagonais contidas na caixa?

Fonte: Adaptado de São Paulo (2013)

Entretanto, nenhum dos alunos participantes apresentou tal sistema de equações. Eles buscaram descobrir os valores de *x* e *y*. Ao analisarmos os protocolos deles para esse problema, observamos que eles utilizaram pensamento aritmético/algébrico nas resoluções, mesmo sem as equações.

O Grupo G1 apresentou a etapa Resolução da Ficha como na Figura 3.

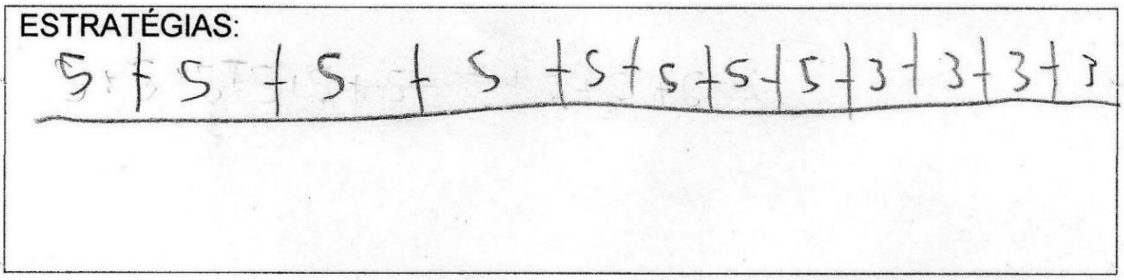


Figura 3: Estratégias do Grupo G1 para o Problema do Encontro 1

Fonte: Sena (2017)

Também tiveram a seguinte discussão:

> **Alexandre:** Vou fazer um negócio pra ver se eu entendi: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, pera aí: x=3 e y=5.
> **Carina:** Tem 12 quadradinhos aí, tem que colocar 5 em cada um.
> **Alexandre:** Não, posso colocar 5 ou 3, e no final tem que dá 52.
> **Carina:** Posso fazer tudo 5 mais.
> **Alexandre:** Pode, mas vai passar, tipo 5+5 = 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 43, 46, 49, 50, 51, 52, terminou, é isso!
> **Carina:** 1, 2, 3, 4, 5, 6, aqui é 6?
> **Alexandre:** x=1, 2, 3, 4, e y=
> **Carina:** Isso aqui é um 5?
> **Alexandre:** É.
> **Alexandre:** y=8.
> **Carina:** Tem 8 cincos, e 4 três igual a 52.
> **Alexandre:** Só refazer a conta: 10,15, 20, 25, 30, 35, 40, 43, 46, 49, 50, 51, 52 é, tá certo! Assim vai ficar confuso tem que ser 5 sobre 8 e 3 sobre 4 igual a 52, x=4 e y=8.
> (Trecho de áudio do Grupo G1)

Neste diálogo, entendemos que, ao fixar 12 "espaços" para a inclusão dos números "5" ou "3", o aluno Alexandre considera a equação que determina que a quantidade de peças é 12 ($x + y = 12$). Com esse valor fixado, ele trabalha com a quantidade de vértices de triângulos e pentágonos, respectivamente 3 e 5, para obter 52 deles, o que significa que estava utilizando a equação $3 \cdot x + 5 \cdot y = 52$. Assim, esses alunos buscavam, simultaneamente, valores para as duas equações que compõem o sistema. Entendemos que, nesse raciocínio, inicialmente aritmético, eles apresentaram um pensamento algébrico sofisticado, e evidenciaram características dos mundos corporificado e simbólico, pois perceberam a necessidade de utilizar o número 3 algumas vezes para obter a quantidade de vértices apresentada.

Em outro problema, em que se buscava como obter 28 pontos em uma prova de 20 questões em que questões certas valiam 3 pontos e questões erradas tinham 1 ponto subtraído, os alunos do Grupo G2 fizeram algumas tentativas (Figura 4) utilizando o que poderia ser escrito como a equação que buscávamos: $3 \cdot x - (20 - x) = 28$, em que x é o número de questões corretas.

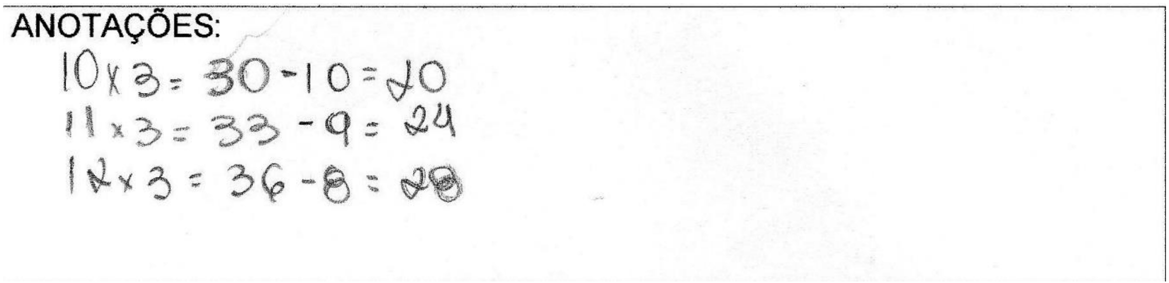

ANOTAÇÕES:
10x3= 30-10=20
11x3=33-9=24
12x3=36-8=28

Figura 4: Anotações do Grupo G2 para o Problema do Encontro 2

Fonte: Sena (2017)

Novamente, uma tentativa aritmética, porém baseada em um pensamento algébrico correto para o problema.

Como nosso intuito nesta pesquisa foi analisar os procedimentos utilizados pelos alunos, os problemas apresentados a eles permitiam resolução sem a obrigatoriedade de utilização de equações. Isso permitiu que eles interpretassem o problema e raciocinassem sobre quais operações poderiam ser realizadas, o que foi possibilitado pela etapa das *Anotações* da Ficha de Resolução de Problemas, amenizando as dificuldades evidenciadas, por exemplo, por Weber (2012), de interpretar dados matemáticos em enunciados de problemas.

4. Nossas Reflexões sobre o uso da Ficha

Neste artigo, tivemos por objetivo analisar a contribuição que uma Ficha de Resolução de Problemas pode trazer para o desenvolvimento de habilidades relacionadas à resolução de problemas. Cada um desses públicos trabalhou conceitos matemáticos diferentes. No 5º ano do Ensino Fundamental, trabalhamos problemas multiplicativos. Com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental na modalidade EJA, trabalhamos problemas envolvendo o conceito de função. Finalmente, alunos de 2º ano do Ensino Médio buscaram resolução a problemas que envolviam equações lineares.

Nosso intuito era o de que a Ficha por nós desenvolvida permitisse que os alunos passassem pelas fases de Entrada, Ataque e Revisão elaboradas por Mason, Burton e Stacey (1982). Para isso, ela era formada por quatro etapas, que neste artigo denominamos: *Anotações*, *Resolução*, *Resposta* e *Convencimento*. Entendemos que tais etapas e a necessidade de preenchê-las com informações relevantes para a resolução do problema e para a reflexão sobre essa resolução, poderiam auxiliar os alunos a compreenderem melhor os conceitos matemáticos envolvidos nos problemas, e como eles lidavam com problemas matemáticos.

Observamos, com estas pesquisas, que a utilização da Ficha de Resolução de Problemas foi bem-vinda em todos os momentos, inclusive naqueles em que os alunos não tinham obrigatoriedade em utilizá-la. Os relatos da parte deles foram de facilidade em utilizá-la e contribuições trazidas por ela para melhor desenvolvimento da resolução e da resposta. De forma geral, o uso da ficha possibilitou reflexão sobre as conjecturas levantadas, as hipóteses não confirmadas e as validadas pelos alunos para a resolução dos problemas. Também permitiu que os alunos aprimorassem suas habilidades de resolução de problemas e de raciocínio lógico.

A etapa das *Anotações* permitiu que os alunos amenizassem dificuldades de leitura e compreensão do enunciado, pela necessidade de anotar informações importantes, definir quais elas eram e como elas poderiam colaborar com a resolução. Já a etapa da *Resposta* propiciou uma diminuição de erros nos trabalhos dos alunos. Ao voltarem ao problema para poderem revisar o trabalho realizado e apresentarem resposta adequada ao problema, eles, muitas vezes, observavam elementos que passaram despercebidos anteriormente, ou retomavam a pergunta, percebendo a necessidade de mais algum cálculo ou nova reflexão para finalizar a resposta ao problema, como apresentado na reflexão de Gabriele, que compreendeu melhor o que o problema solicitava e como obter o resultado correto. Esta volta ao problema só não foi evidenciada por todos os alunos de 2º ano de Ensino Médio.

A etapa do *Convencimento* foi aquela em que os alunos dos três níveis de escolaridade tiveram mais dificuldade. Os alunos de 5º ano apresentavam justificativas claras em suas falas, mas a dificuldade em escrevê-las fazia com que eles deixassem tal parte em branco e nos avisassem que ouvíssemos a gravação, pois nela estaria claro o Convencimento deles! Os alunos da EJA se esforçavam por buscar argumentos para convencerem uns aos outros, enquanto os alunos do 2º ano do Ensino Médio explicavam seu raciocínio ao invés de explicarem a validade dele.

De acordo com Demana e Leitzel (1995), os conceitos de álgebra como equações e funções tornam-se mais acessíveis aos alunos quando trabalhados meio da resolução de problemas, particularmente para os iniciantes em álgebra. Observamos que tanto os alunos da EJA quanto os alunos do Ensino Médio desenvolveram seu pensamento algébrico, como explicitado, por exemplo, no trabalho do Grupo 2 ao resolver problemas sobre equações polinomiais de primeiro grau, o que colaborou para que compreendessem melhor a resolução de problemas com esses conceitos. Em particular, os alunos da EJA compreenderam, a partir do problema proposto e da utilização da Ficha, o conceito de função, que ainda não haviam trabalhado anteriormente.

O uso da Ficha de Resolução de Problemas permitiu que os alunos passassem a trabalhar de maneira autônoma, sem a necessidade de se apoiar no professor a cada passo da resolução. Além disso, a discussão em grupos propiciada pela abordagem utilizada foi determinante para que eles se apropriassem de seus próprios meios de resolver problemas, discutissem cada resolução apresentada e compreendessem melhor os conceitos matemáticos envolvidos.

Finalmente, gostaríamos de relatar que esta Ficha também é utilizada em grupos de professores pedagogos. Os relatos que obtivemos deles com essa experiência foram que eles passaram a organizar melhor seu raciocínio para resolver problemas matemáticos, que buscam conhecimentos anteriores e novos para resolvê-los. É importante salientar que a experiência deles os fez ter interesse por trabalhar a utilização desse instrumento também com os próprios alunos, margem para novas pesquisas que podem trazer importantes resultados para a Educação Matemática.

5. Referências

BRUNER, J. **A cultura da educação**. Tradução de M. A. G Domingues. Porto Alegre: Artmed, 2001. 186 p.

CYBIS, A. C.; LIMA, R. N. D. **Entrada, Ataque e Revisão:** uma abordagem para a resolução de problemas multiplicativos. 4o Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matematica. Ilhéus/BA: [s.n.]. 2015. p. 1825-1836.

DEMANA, F.; LEITZEL, J. Estabelecendo conceitos fundamentais através da resolução de problemas numéricos. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 70-79.

FERREIRA, R. B. **O ensino de funções através da resolução de problemas na educação de jovens e adultos**. Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo. 2011.

FONSECA, M. C. F. R. **Educação Matemática de Jovens e Adultos**. 3a. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. 118 p.

MAGINA, S. M. P. et al. As estratégias de Resolução de Problemas das Estruturas Aditivas nas Quatro Primeiras Séries do Ensino Fundamental. **Zetetikè**, 18, n. 34, jul/dez 2010.

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K. **Thinking Mathematically**. 1a. ed. London: Addison-Wesley, 1982.

MOLINARI, A. M. C. **Representação e solução de problemas aritméticos de divisão: um estudo dos procedimentos empregados por alunos do ensino fundamental I**. Unicamp. Campinas. 2010.

NASSER, L.; SOUSA, G. A. D.; TORRACA, M. A. **Transição do Ensino Médio para o Superior:** como minimizar as dificuldades em cálculo? Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Petrópolis/RJ: SBEM. 2012. p. 18.

ONUCHIC, L. D. L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, 25, n. 41, dezembro 2011. 73-98.

PITA, A. P. G. **A ideia de função por meio da resolução de problemas: narrativas da educação de jovens e adultos**. Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo. 2016.

SCHROEDER, L. T.; LESTER, F. K. J. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R. **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31-42.

SÃO PAULO. Secretaria Estadual de Educação. **Avaliação de Aprendizagem em Processo**. Matemática. 2013.

SENA, M. R. **Resolução de Problemas Algébricos: Uma análise à luz dos Três Mundos da Matemática**. Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo, p. 126. 2017.

TALL, D. **How Humans Learn to Think Mathematically:** Exploring the Three Worlds of Mathematics. 1a. ed. New York: Cambridge University Press, 2013. 457 p.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**. Tradução de M. L. F. Moro. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.

WEBER, R. G. **Estudos das dificuldades de leitura e interpretação de textos matemáticos em enunciados de problemas por alunos do ensino médio**. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho. Presidente Prudente. 2012.