



UMA ANÁLISE SOBRE AS ESTRATÉGIAS UTILIZADAS POR ALUNOS DO NÍVEL SUPERIOR PERANTE QUESTÕES ENVOLVENDO O TEOREMA DE PITÁGORAS

Wilson Souza Costa Júnior

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

E-mail: <willcostajr@gmail.com>

Ana Paula Perovano

Universidade Estadual Paulista – UNESP

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

E-mail: <apperovano@uesb.edu.br>

Resumo

Apresentaremos aqui o recorte de um estudo que analisou as estratégias adotadas por alunos recém-ingressados no Ensino Superior na Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do interior da Bahia, diante da resolução de questões que envolvem o Teorema de Pitágoras. Adotamos por uma abordagem qualitativa e optamos pela pesquisa descritiva com a aplicação de um questionário a 32 alunos do referido curso, antes que tivessem contato com tal conteúdo na Universidade. Do total de questões analisadas, mais da metade eram respostas erradas, deixadas em branco ou incompletas. A maior parte das estratégias erradas foi classificada como estratégia com indícios de conhecimento do Teorema de Pitágoras, mas com erro nos procedimentos de resolução. Tais resultados nos dão indícios que alunos que ingressam no Ensino Superior ainda apresentam dificuldades que poderiam ter sido sanadas na Educação Básica.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras; Estratégias de resolução; Ensino Superior.

AN ANALYSIS OF THE STRATEGIES USED BY STUDENTS AT THE HIGHER LEVEL WHILE MATTERS INVOLVING THE PITÁGORAS THEOREM

Abstract

We will present here a study about the strategies adopted by students recently enrolled in Higher Education, in the Mathematics course of the State University of Southwest of Bahia - UESB, campus of Vitória da Conquista, in front of questions that involve the Pitágoras Theorem. We adopted a qualitative approach and opted for the descriptive research with the application of a questionnaire to 32 students of that course, before they had contact with such content in the University. Of the total number of questions analyzed, more than half were wrong answers, left blank or incomplete. Most of

the wrong strategies were classified as strategy with evidence of knowledge of the Pitágoras Theorem but with error in the resolution.

Keywords: Pitágoras theorem; Resolution strategies; Higher education.

ANÁLISIS DE LAS ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR ESTUDIANTES DE NIVEL SUPERIOR EN CUESTIONES QUE INCLUYEN TEOREMA DE PITÁGORAS

Resumen

Presentaremos aquí la parte de un estudio sobre las estrategias adoptadas por los estudiantes recién ingresados a la Educación Superior en el curso de matemáticas de una universidad pública en el interior de Bahía, que enfrenta la resolución de preguntas relacionadas con el Teorema de Pitágoras. Adoptamos un enfoque cualitativo y optamos por la investigación descriptiva con la aplicación de un cuestionario a 32 estudiantes de ese curso, antes de que tuvieran contacto con dicho contenido en la Universidad. Del total de preguntas analizadas, más de la mitad eran respuestas incorrectas, dejadas en blanco o incompletas. La mayoría de las estrategias incorrectas se clasificaron como estrategias con evidencia de conocimiento del Teorema de Pitágoras, pero con error en los procedimientos de resolución. Estos resultados nos dan evidencia de que los estudiantes que ingresan a la educación superior todavía tienen dificultades que podrían haberse remediado en la Educación Básica.

Palabras clave: Teorema de Pitágoras; Estrategias de resolución; Enseñanza superior.

Introdução

Este texto é o recorte do Trabalho de Conclusão de Curso do primeiro autor, cujo objetivo foi analisar as estratégias utilizadas por alunos do 1º semestre, de um curso de Licenciatura em Matemática em uma universidade no sudoeste da Bahia, diante questões que envolvem o Teorema de Pitágoras.

O interesse para o desenvolvimento desse trabalho surgiu após a leitura de um dos trabalhos de Reis e Perovano (2016), que tinha como objetivo específico identificar as estratégias utilizadas pelos estudantes, ao responderem questões acerca do Teorema de Pitágoras. Os resultados trazidos pelos autores supracitados nos chamaram a atenção, pois em duas questões do questionário, metade das respostas estava incorretas ou deixadas em branco. A razão de tal surpresa foi o fato de que os sujeitos em questão deveriam estar¹, no mínimo, no 3º semestre da graduação para participar da disciplina sobre a qual que ocorreu a pesquisa.

Assim, além de, supostamente, terem conhecido o Teorema de Pitágoras na Educação Básica, cursaram uma disciplina obrigatória ofertada no 1º semestre, chamada de Fundamentos de Matemática Elementar III, em que esse conteúdo está registrado para ser trabalhado na ementa da

¹ O referido curso não possui pré-requisitos, portanto, o aluno a partir do segundo semestre escolhe quais disciplinas fará.

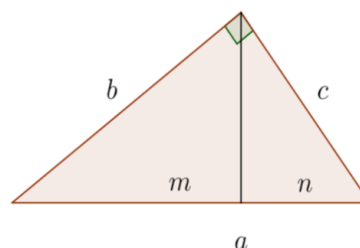
referida disciplina. Portanto, eram esperados melhores índices de desempenho dos alunos em tal pesquisa. Como “alunos em formação inicial repetem as mesmas conceitualizações erradas, relativas aos conceitos geométricos, adquiridas durante a sua escolaridade anterior, e essas ideias têm tendência a tornar-se implícitas, estáveis e resistentes à mudança” (MENEZES, *et al*, 2014, p. 3), surgiu a vontade de pesquisar sobre o conhecimento dos alunos, recém-ingressados no curso de Licenciatura em Matemática, sobre o Teorema de Pitágoras. Quais conhecimentos estes alunos trazem da Educação Básica? Que estratégias lançam mão ao resolverem questões que abordam o Teorema de Pitágoras? Que erros cometem?

O Teorema de Pitágoras

Único a figurar no Guinness Book por sua quantidade de demonstrações (aproximadamente 400 demonstrações diferentes) muitas delas reunidas em um livro publicado em 1927, e com uma segunda edição lançada em 1940, de autoria de Elisha Scott Loomis, um professor de Matemática, natural dos Estados Unidos. (REIS; PEROVANO, 2016).

Os autores afirmam que o professor Elisha classifica as demonstrações do Teorema em dois tipos, *provas algébricas* (baseadas nas relações métricas no triângulo retângulo) e *provas geométricas* (baseadas em comparações de áreas). Uma das demonstrações mais conhecidas, de acordo com Lima (1991) e, também a mais curta é a que segue com a utilização das relações métricas em um triângulo retângulo, consequência da semelhança de triângulos. A Figura 1 apresenta tal demonstração.

Figura 1: Triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a .

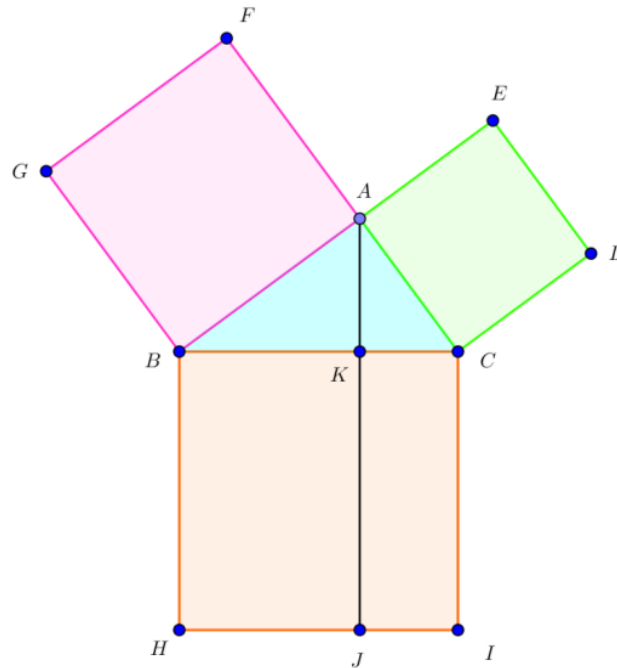


Fonte: Elaborado pelos autores.

Num triângulo retângulo, cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e a sua projeção dos catetos c e b sobre a hipotenusa a , temos $c^2 = m \cdot a$, $b^2 = n \cdot a$, como $m + n = a$. Somando, temos $a^2 = b^2 + c^2$.

Berlingoff e Gouvêa (2008) afirmam que a demonstração do Teorema de Pitágoras mais famosa foi aquela realizada por Euclides, apresentada no Livro I dos Elementos que é uma obra reconhecida mundialmente, sendo a segunda mais traduzida em todo o mundo (BORGES FILHO, 2005). A Figura 2 apresenta uma construção para demonstração proposta por Euclides.

Figura 2: Construção para a demonstração de Euclides.



Fonte: Elaborada pelos autores utilizando o GeoGebra.

Consideremos o triângulo ABC reto em A , os quadrados feitos sobre os lados desse triângulo e o segmento AJ paralelo aos segmentos BH e CI . É notável que os triângulos ABH e GBC possuem mesma área, por se tratarem de triângulos congruentes pelo caso LAL ($AB = GB$, $ABH = GBC$, $BH = BC$), que possuem mesma base e mesma medida da altura. Observe que a área de GBA é metade da área do quadrado de lado AB . O mesmo ocorre com o triângulo ABH e KBH , sendo a área de KBH metade da área de $KBHJ$. Temos então que as áreas de GBA e KBH possuem mesmo valor e conseqüentemente a área do quadrado de lado AB e do retângulo $KBHJ$ também. Realizando o mesmo procedimento com os triângulos DCB e ACI , encontramos que a área de $KCIJ$ é igual à área do quadrado de lado AC . Assim, fica demonstrado que a área do quadrado formado no lado BC é igual à soma das áreas dos quadrados formados nos lados AB e AC .

O que Euclides fez, de acordo com Berlingoff e Gouvêa (2008), foi mostrar “como dividir o quadrado grande em duas partes cujas áreas coincidam com as áreas com as áreas dos dois quadrados menores”. Não há como negar a beleza e a importância desse teorema, tanto na Matemática quanto em outras áreas do conhecimento, como a Engenharia, a Física, a Astronomia e diversas outras. Acreditamos que a sua simplicidade e suas diversas aplicações sejam os agentes motivadores da grande quantidade de estudos que existem a seu respeito.

Existem indícios históricos que nos levam a crer que foram os pitagóricos os primeiros a demonstrar o teorema. Assim, não devemos atribuir sua descoberta a Pitágoras. Boyer menciona que: “Mesmo o teorema, a que o nome de Pitágoras ainda está ligado, muito provavelmente veio dos

babilônios. Sugeriu-se, como justificativa para chamá-lo teorema de Pitágoras, pois que foram os pitagóricos os primeiros a dar uma demonstração dele; mas não há meios de verificar essa conjectura” (BOYER, 1974, p 37).

Estudos mostram evidências, no mundo antigo, de conhecimento sobre a relação entre os lados de um triângulo retângulo. Isso impede a atribuição de tal descoberta a Pitágoras, ou a alguém de sua escola. Como citamos anteriormente, o que é suposto por alguns autores é que na escola Pitagórica foi realizada a primeira demonstração desse Teorema. Porém, como nessa irmandade o conhecimento era um bem comum e todo conhecimento era atribuído a Pitágoras, também não se pode afirmar ter sido ele o primeiro a realizar tal demonstração.

O teorema trata de uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo qualquer e é enunciado no Livro I dos elementos de Euclides da seguinte forma: “Em todo triângulo retângulo o quadrado feito sobre o lado oposto ao ângulo reto, é igual aos quadrados formados sobre os outros lados, que fazem o mesmo ângulo reto” (EUCLIDES, 2009, p. 56). A recíproca do teorema também é válida.

O ensino do Teorema de Pitágoras é proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN (BRASIL, 1998) desde o quarto ciclo, ou seja, nos anos finais do Ensino Fundamental, de forma a trabalhar com verificações experimentais, aplicações e demonstração. Além desses itens, são apontadas, também, como sugestão de trabalho em sala de aula de Matemática, algumas aplicações do Teorema de Pitágoras, como por exemplo: Cálculo da diagonal (quadrado, retângulo, losango), comprimento de segmento tangente de cordas; relações entre raios, apótemas e raio para polígonos inscritos e circunscritos.

A concretização da aprendizagem do Teorema de Pitágoras acontecerá no Ensino Médio, pois as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006) sugerem que é durante esse período escolar que o estudante deve consolidar alguns conceitos estudados no Ensino Fundamental. Dessa forma, é esperado que o aluno saia do Ensino Médio conhecendo as características de um triângulo retângulo, a relação existente entre os lados desse triângulo e que saiba aplicar esses conhecimentos em situações-problema que envolvam o Teorema de Pitágoras.

Pesquisas que retratam estratégias de alunos em questões que envolvem o Teorema de Pitágoras

Buscamos pesquisas que relatam o desempenho e estratégias de alunos diante de questões que envolvam o Teorema de Pitágoras a partir de 2000 e encontramos os estudos de Bastian (2000), Rodrigues e Menezes (2010), Pereira, Couto e Costa (2016), Ferreira (2016) e Reis e Perovano (2016).

A dissertação de mestrado de Bastian (2000) utiliza como metodologia a Engenharia Didática e testa uma sequência didática com alunos que ainda não conhecem o Teorema de Pitágoras,

estudando a potencialidade dessa atividade na aprendizagem de tal conteúdo. Foi aplicado um questionário pela autora, em dois momentos, e foram analisados apenas os questionários da segunda aplicação pois, mais de 50% dos questionários da primeira aplicação voltaram em branco.

Analisando as respostas dos alunos, Bastian (2000) detectou erros na igualdade Pitagórica, que entendemos ser do tipo em que se assume que o quadrado de um dos catetos é igual à soma dos quadrados do outro cateto e da hipotenusa; erro em contas, em cálculo com radical e o que ela chama de “considerações absurdas”, que continha estratégias em que o aluno utilizava de forma indevida o Teorema de Tales ou considerava que o lado de um triângulo retângulo era a soma dos outros dois lados, ou utilizava a régua graduada para determinar a medida do lado de um triângulo ou utilizava da fórmula de área do triângulo ou fazia uso de uma estratégia que não condiz com a situação proposta. Uma das considerações da autora sobre essa análise foi que os alunos possuem maior facilidade em aplicar o Teorema de Pitágoras quando o lado desconhecido do triângulo é a hipotenusa.

O próximo passo da pesquisa foi a elaboração e a aplicação de uma sequência didática, que ocorreu no ano de 1999, com alunos do 8º ano de uma escola estadual na cidade de São Paulo. Após a sequência, foi aplicado o mesmo questionário com 30 dos alunos que participaram da atividade, com o objetivo de verificar os efeitos do trabalho na aprendizagem do Teorema de Pitágoras. Mesmo após a sequência didática, alguns erros continuaram persistentes nas respostas dos alunos. Alguns desses erros são os erros na igualdade Pitagórica, erro no cálculo com radical e algumas “considerações absurdas”. Além desses, a autora destaca a utilização da relação para determinar a medida do lado de um triângulo não retângulo, o erro na resolução de equações de 2º grau incompletas, erro no cálculo de potências, utilização do número um como elemento neutro da adição e esquecimento de elevar a hipotenusa ao quadrado. Bastian (2000) declara que muitos alunos possuem dificuldades em questões em que se tem uma figura que é composta por subfiguras e também quanto à apreensão discursiva.

Rodrigues e Menezes (2010) realizaram um estudo com uma turma no 9º ano da modalidade Educação de Jovens e Adultos, comentando sobre a resolução desses alunos em questões contextualizadas e não contextualizadas, ambas envolvendo o Teorema de Pitágoras. Justificam seu trabalho pela maior possibilidade de envolvimento dos alunos com problemas contextualizados, que remetem a situações do seu cotidiano e por considerarem que o conteúdo Teorema de Pitágoras “está entre o mais importante a ser utilizados no processo de ensino-aprendizagem da matemática desta série” (RODRIGUES; MENEZES, 2010. p. 4). A pesquisa, de abordagem qualitativa, com tratamentos de dados quantitativos, ocorreu com 19 alunos da referida série, matriculados em uma escola municipal do município de Santa Rita no estado da Paraíba, tendo como instrumento de coleta de dados questionários, entrevistas e atividades.

As considerações trazidas pelas autoras apontam que há um equilíbrio no desempenho e na preferência dos alunos pelos dois tipos de questão, porém ressaltam que ambas devem ser trabalhadas em conjunto. Apontam também que em alguns momentos, a preferência dos alunos pelas questões não contextualizadas os levam a pensar que o “contato permanente” com esse tipo de questão pode gerar rejeição dos alunos pelas questões contextualizadas. Percebemos nos dados apresentados pelas autoras que o erro na identificação dos elementos do triângulo retângulo também é um fator causador de erro nas estratégias utilizadas pelos alunos.

A pesquisa de Ferreira (2016) que teve como principal objetivo investigar o conhecimento de estudantes do 3º ano do Ensino Médio acerca da aplicação do Teorema de Pitágoras como ferramenta para a resolução de problemas. O autor menciona a importância de conhecer e dominar o Teorema de Pitágoras e justifica sua pesquisa destacando que o aprendizado é “[...] indispensável à sua formação intelectual não somente pelo grau de sua importância dentro da Matemática, mas também por se constituir em um útil pré-requisito em diversas situações teóricas e práticas do cotidiano.” (FERREIRA, 2016, p. 14).

Participaram da investigação 170 alunos do Ensino Médio, matriculados em uma escola estadual localizada na cidade de Juazeiro – BA. O processo investigativo utilizado foi de uma pesquisa bibliográfica e de campo com aplicação de questionários. Ocorreu com a aplicação de dois questionários contendo cinco questões envolvendo o Teorema de Pitágoras. O primeiro questionário era contextualizado e o segundo sem contexto. Foi realizada também uma intervenção didático-metodológica e por último a aplicação de um terceiro questionário, contendo cinco questões contextualizadas. As questões dos três questionários eram de múltipla escolha, em que havia apenas uma resposta correta.

Ao avaliar o desempenho dos alunos nos dois primeiros questionários, Ferreira (2016) se deparou com resultados que os julgou insatisfatórios devido ao baixo rendimento, tendo encontrado uma média de 2,58 no primeiro questionário e 3,68 no segundo, avaliando em um intervalo de zero a 10, o que reforçou a ideia da necessidade de uma intervenção e a aplicação de um novo questionário. Esse teria o objetivo de avaliar uma melhora no desempenho dos alunos, que para o autor ocorreu de forma bastante “tímida” tanto em relação à aprendizagem do conteúdo em questão quanto de fundamentos de Matemática elementar, em que os índices de acertos foram de 25,82%, nos primeiros questionários, para 37,97% no terceiro. Diante desses dados, o autor alerta sobre o pouco conhecimento que os alunos possuem sobre conteúdos que serão requisitados no futuro.

Outro trabalho encontrado foi o de Pereira, Couto e Costa (2016) que realizaram um estudo sobre os erros frequentes de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental em questões que envolviam o Teorema de Pitágoras. Justificaram esse tipo de estudo pela possibilidade de avaliar as dificuldades dos alunos em relação ao conhecimento que foi adquirido. O trabalho trata-se de uma pesquisa

diagnóstica, do tipo qualitativa em que foi aplicado um teste diagnóstico, contendo seis questões sobre o referido tema, a 20 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Belém do Pará.

As autoras criaram três categorias para os erros mais frequentes dos alunos: erro na compreensão dos elementos de um triângulo retângulo, que ocorre quando o sujeito confunde a hipotenusa do triângulo com um dos catetos; erros cometidos na aplicação de regras e estratégias irrelevantes, contendo os procedimentos que utilizam estratégias aleatórias para solucionar a questão; erros no desenvolvimento das operações matemáticas, que eram estratégias que apresentavam erros com as operações básicas ou no cálculo de potência e radiciação. Estas apontam que as causas dos erros desses alunos estão relacionadas, sobretudo, à falta de compreensão do Teorema de Pitágoras e da identificação dos elementos de um triângulo retângulo. Outro fator causador de erro encontrado por Pereira, Couto e Costa (2016) é “a falta de compreensão do conceito de área relacionado aos lados do triângulo”, dificultando a compreensão do teorema, que mencionam não tê-lo identificado na literatura analisada.

Reis e Perovano (2016) também realizaram estudos sobre estratégias de alunos em problemas que envolvem o Teorema de Pitágoras, com o objetivo de identificar quais as estratégias que alunos do Nível Superior utilizavam ao responderem questões envolvendo o teorema, justificando tal estado pela possibilidade de “perceber a dificuldade que os alunos enfrentam e assim buscar táticas que permitam determinar os modos de remediar essa situação” (p. 228).

A metodologia empregada foi de caráter qualitativo e delineamento descritivo. Os sujeitos da pesquisa foram 28 alunos do curso de Licenciatura em Matemática, ofertado pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, no campus de Vitória da Conquista, matriculados na disciplina Geometria Euclidiana, que no referido curso é ofertado no III semestre. O instrumento de coleta de dados foi um questionário que continha oito questões envolvendo o Teorema de Pitágoras.

Em duas questões analisadas a porcentagem de respostas incorretas ou em branco foi de 53,57% e 46,43%. Ao analisarem as respostas incorretas, os autores agruparam respostas com erros semelhantes para facilitar a análise. Entre esses erros destacam-se: não elevar a hipotenusa ao quadrado, não realizar a conversão de unidade de medidas, falha na interpretação da questão e erros em operações, sendo elas a soma com números decimais, potenciação e radiciação.

Reis e Perovano (2016) registram o propósito de dar continuidade ao estudo “buscando táticas que possibilitem dirimir com as dificuldades dos alunos”, pois entendem que tais sujeitos, futuros professores, deverão direcionar sua prática pedagógica considerando as experiências de seus futuros alunos, propondo situações cotidianas que os motivam na busca de soluções.

As informações encontradas nos textos mencionados anteriormente estão apresentadas no quadro a seguir.

Quadro 1 – Ano, unidade federativa, nível escolar, tipos de questões e erros encontrados nas pesquisas que compõem o referencial teórico da seção.

UF	Série/ Modalidade	Erros	Autores/Ano
SP	1º; 8º / EM; EFII	<ul style="list-style-type: none"> • na igualdade Pitagórica; • em contas; • em cálculos com radicais; • considerações absurdas; • utilização da relação; • na resolução de equações do 2º grau incompletas; • no cálculo de potências; • utilização do número um como elemento neutro da adição; • esquecimento de elevar a hipotenusa ao quadrado. 	Bastian (2000)
PB	9º / EJA	<ul style="list-style-type: none"> • na identificação dos elementos do triângulo retângulo. 	Rodrigues e Menezes (2010)
PA	9º / EFII	<ul style="list-style-type: none"> • na compreensão dos elementos de um triângulo retângulo; • cometidos na aplicação de regras e estratégias irrelevantes; • nos desenvolvimentos das operações matemáticas. 	Pereira, Couto e Costa (2016)
BA	3º / EM	<ul style="list-style-type: none"> • não os explicita 	Ferreira (2016)
BA	ES	<ul style="list-style-type: none"> • não elevar a hipotenusa ao quadrado; • não realizar a conversão de unidade de medidas; • falha na interpretação da questão; • em operação. 	Reis e Perovano (2016)

EFII – Ensino Fundamental II; EM – Ensino Médio; EJA – Educação de Jovens e Adultos; ES – Ensino Superior.

Fonte: elaborado pelos autores

Como pode ser observado no Quadro 1, foram encontradas pesquisas realizadas em três diferentes regiões do Brasil, em diferentes níveis escolares e também em escolas públicas e privada. O que pudemos constatar nessas leituras é que em toda essa diversidade de estudantes existem dificuldades na resolução de questões que envolvem o Teorema de Pitágoras, independente de essas questões estarem ou não contextualizadas.

Em relação ao Teorema de Pitágoras, quando os traços dele aparecem nas estratégias cujo resultado final não está correto, os erros mais frequentes nas pesquisas são a não utilização correta do teorema, quando o aluno utiliza a relação “cateto ao quadrado igual à soma dos quadrados do outro cateto e a hipotenusa”, o esquecimento de elevar algum dos elementos do triângulo ao quadrado e erros com as operações matemáticas.

A ocorrência desses erros em estratégias de alunos do Ensino Médio e do Nível Superior é o que mais nos preocupa pois, é previsto que alunos do Ensino Médio já tenham o domínio sobre as operações básicas, potenciação e radiciação, assim, esperávamos que erros desse tipo fossem pouco frequentes nesse nível de ensino. Em relação ao teorema, entendemos que o seu conhecimento é consolidado no Ensino Médio, assim esses alunos ainda estão na fase de firmar tal conhecimento.

O que de fato nos preocupa são os erros dos alunos do Nível Superior, principalmente por se tratar de alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. Sobre tais alunos Reis e Perovano (2016) destacam que: “serão futuros professores que precisarão direcionar sua prática docente,

considerando os conhecimentos trazidos por seus futuros alunos apresentando situações que envolvam e estimulem a busca de soluções para problemas do cotidiano” (REIS, PEROVANO, 2016, p. 248-249).

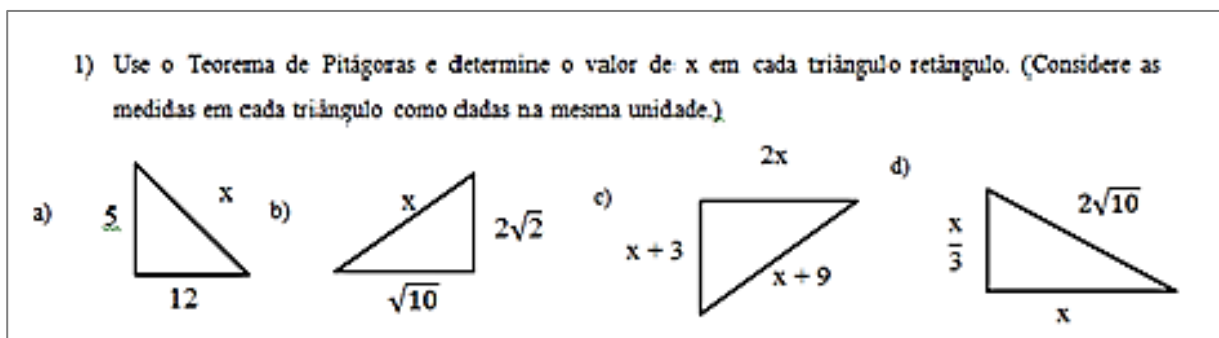
Ao perceber os erros existentes em diferentes localidades e diferentes modalidades de ensino, ponderamos investigar as estratégias de alunos recém-ingressados no curso de Licenciatura em Matemática, quando estes se encontram diante questões que envolvem o Teorema de Pitágoras em sua resolução. Pois, julgamos ser importante identificar conceitos e procedimentos incorretos utilizados por esses alunos, para que assim seja possível pensar em medidas capazes de evitar que quando estiverem à frente de uma sala de aula, estes alunos reproduzam informações errôneas aos seus alunos.

Metodologia

Adotamos uma abordagem qualitativa, tendo em vista que, conforme Minayo (1994), a preocupação desse tipo de pesquisa é com “um nível de realidade que não se pode ser quantificado” (p. 22). Optamos, também, pela pesquisa descritiva, pois se “deseja descrever ou caracterizar detalhes de uma situação, um fenômeno ou um problema” (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p.70). Em nosso caso, a intenção é obter dados que possam descrever as estratégias adotadas por alunos recém-ingressados, em 2016, no curso de Licenciatura em Matemática da UESB, diante questões que envolvem o Teorema de Pitágoras.

Fizeram parte dessa pesquisa 32 (trinta e dois) alunos do referido curso, devidamente matriculados no 1º semestre letivo 2016. 1, com faixa etária média de 23 anos. Como instrumento de coleta de dados, foi utilizado um questionário contendo 10 (dez) questões envolvendo o Teorema de Pitágoras. Para o estudo descrito neste artigo, foi considerada apenas a questão de número um, conforme pode ser visto na Figura 3, a seguir.

Figura 3: Extrato da primeira questão do instrumento de coleta de dados.



Fonte: Elaboração do autor com base em Dante (2010)

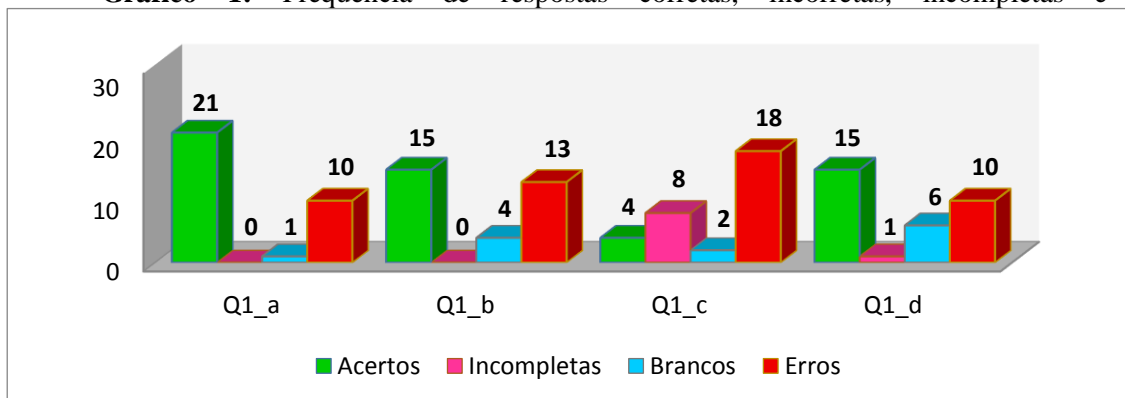
Essa questão traz quatro triângulos retângulos, em cujo desenho não é explícita a indicação do ângulo reto. Contudo, no momento da aplicação do questionário foi informado aos alunos que todos os triângulos eram retângulos. Tivemos o cuidado de realizar a aplicação do questionário antes que os sujeitos em questão tivessem contato com tal conteúdo na universidade.

Após a coleta, os dados foram tabulados e agrupados em quatro grupos: acertos, erros, incompletos e brancos. Categorizamos como respostas incompletas aquelas que foram abandonadas durante o procedimento, sem apresentar uma resposta final. A partir dessa organização, fizemos uma análise mais detalhada das respostas com erros e incompletas, buscando analisar as estratégias utilizadas e o fator que levou a resposta ao erro (quando for o caso).

Resultados

Foram analisadas 128 respostas, resultado do produto do número de alunos (32) com a quantidade de letras (4) presentes na questão 1 (Q1) do questionário. Do total de questões analisadas (128), 43% foram classificadas como acertos (55 respostas), 40% como erros (51 respostas), 7% deixadas como incompletas (9 respostas) e 10% das questões foram em branco (13 respostas). Para identificar mais claramente a distribuição das respostas dos alunos, organizamos o Gráfico 1 que apresenta a frequência das respostas de acordo com nossa classificação.

Gráfico 1: Frequência de respostas corretas, incorretas, incompletas e em branco.



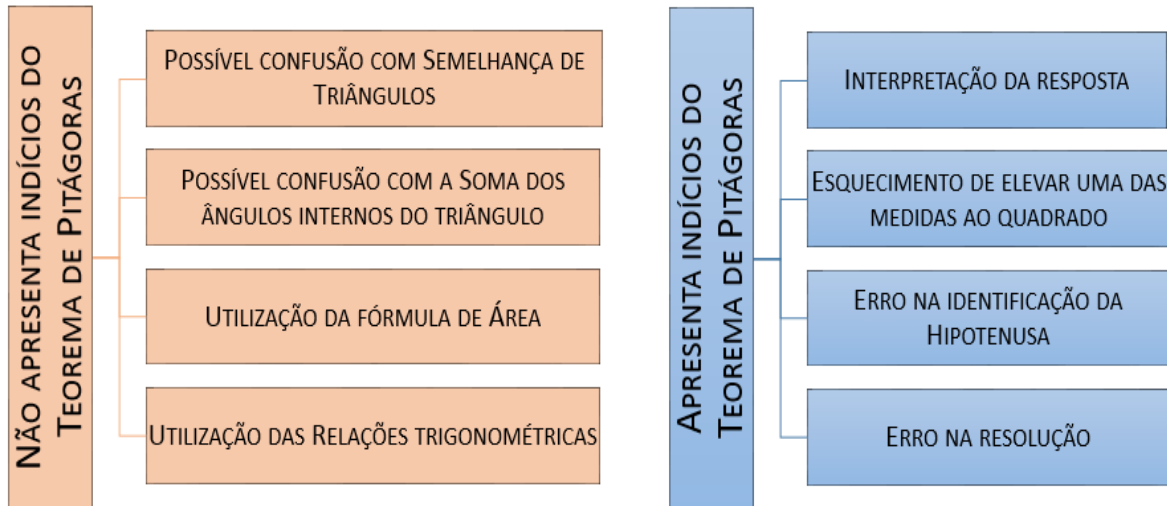
Fonte: Dados da pesquisa.

Como pode ser observado pelos dados do Gráfico 1, apenas em Q1_a o número de acertos corresponde a mais da metade do total de respostas nessa questão ponderamos que este número de acertos pode ter acontecido devido ao lado desconhecido ser a hipotenusa, o que já foi apontado nos estudos de Bastian (2010).

A porcentagem de acertos em Q1_b e Q1_d chega próximo de 50% do total de respostas nas respectivas questões. Há uma queda do número de respostas corretas em Q1_c, que tem o mais elevado número de erros (13).

Como o número de respostas classificadas como erros foi expressivo (40%) e também por consideramos importante identificar os tipos de erros, pois, eles exigirão atitudes diferenciadas, por parte do professor, frente as dificuldades de sua turma em sua prática docente, recorremos a uma subclassificação dessa categoria como pode ser observado na Figura 4.

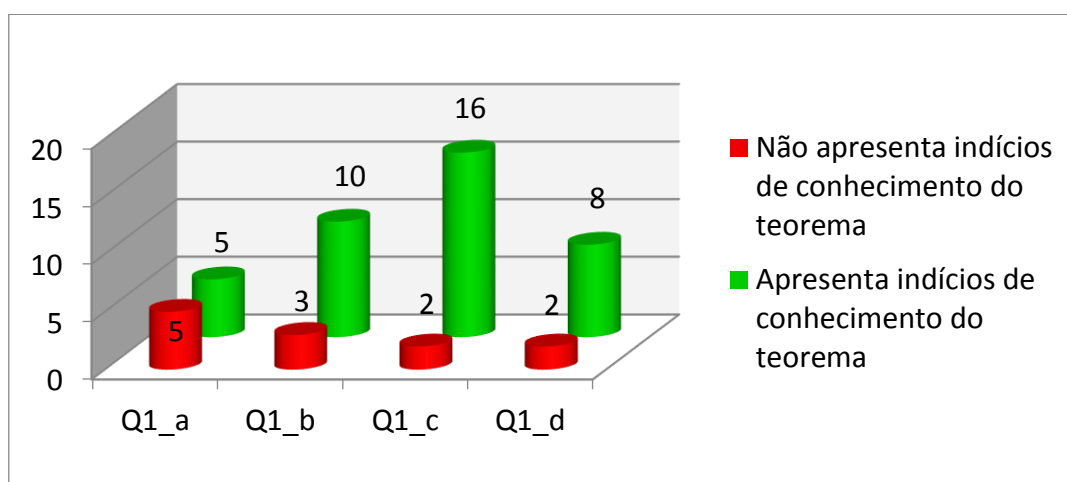
Figura 4: Subclassificação das estratégias categorizadas como erros.



Fonte: Elaboração dos autores

Ao analisar as questões que categorizamos como erradas, notamos que algumas dessas mostravam indícios de que os alunos conheciam o Teorema de Pitágoras. Do total de questões classificadas como erradas (51 respostas), 24% não apresentaram indícios do Teorema de Pitágoras. A distribuição desses resultados está ilustrada no Gráfico 2.

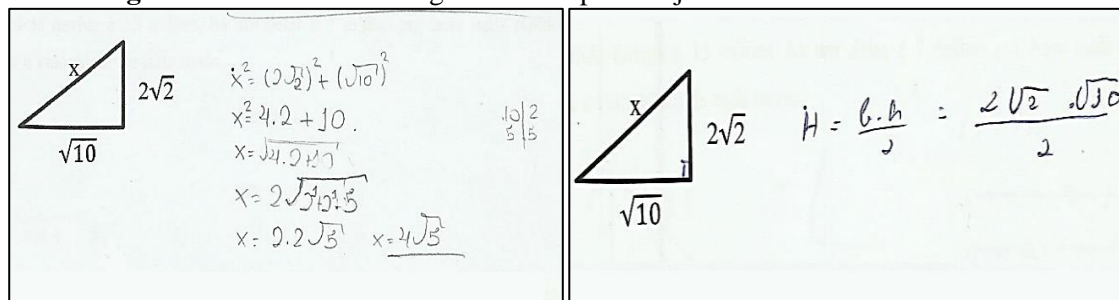
Gráfico 2: Distribuição das respostas que apontam indícios sobre o Teorema de Pitágoras e que não apontam indícios do Teorema de Pitágoras.



Fonte: Dados da pesquisa.

Como podemos observar no Gráfico 2, é pequeno o número de respostas que não apresentam indícios de conhecimento do teorema. Podemos, então, afirmar que o não conhecimento do Teorema de Pitágoras não foi o maior fator que conduziu os alunos ao erro. A Figura 5, a seguir ilustra essas estratégias.

Figura 5: Extrato da estratégia utilizada pelos sujeitos A07 e A06.



Fonte: Dados da pesquisa.

Pela figura acima, percebemos que o aluno A07 reconhece a hipotenusa e os catetos do triângulo retângulo e aplica o Teorema de Pitágoras para determinar o valor de x ; no entanto, ele erra ao “tirar os valores da raiz”, transformando a operação de adição que existe no radicando em uma multiplicação. Percebemos que o erro desse aluno não foi relativo ao Teorema de Pitágoras e sim às operações que seriam realizadas. Pelo registro do aluno A06, ponderamos que ele utiliza como estratégia de resolução a fórmula da área de um triângulo, indicando o valor da área do triângulo como “H”, que supomos ser a hipotenusa.

Entre as respostas que não apresentava indícios do Teorema de Pitágoras, buscamos entender de quais conteúdos os alunos poderiam estar lançando mão para resolver a questão apresentada e, assim, percebemos determinada semelhança, o que nos possibilitou identificar as subcategorias: possível confusão com Semelhança de Triângulos, possível confusão com Soma dos ângulos internos do triângulo, utilização da Fórmula de Área, utilização das relações trigonométricas e razão entre os catetos. O Quadro 2 apresenta o quantitativo de respostas encontradas nessa subcategoria.

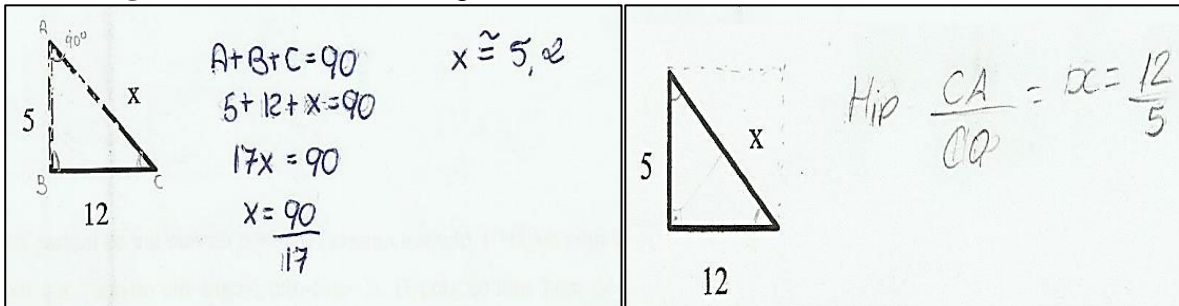
Quadro 2 – Quantitativo de respostas da subcategoria não apresenta indícios do Teorema de Pitágoras.

Categoria	Quantidade de respostas
Possível confusão com Semelhança de Triângulos	3
Possível confusão com soma dos ângulos internos do triângulo	2
Utilização da fórmula de área	5
Utilização das relações trigonométricas	2
Total	12

Fonte: Dados da pesquisa.

A utilização da Fórmula de Área foi a estratégia mais utilizada dentre as respostas classificadas como erradas e que não apresenta indícios de conhecimento do Teorema de Pitágoras (41%). Essa estratégia foi apresentada acima (Figura 2). Uma possível confusão com a utilização de Semelhança de Triângulos foi encontrada em 25% das respostas dos alunos dessa categoria. Na Figura 6, é possível observar a estratégia: utilização de relações trigonométricas. Ambas ocorreram apenas uma vez entre as respostas a primeira questão.

Figura 6: Extrato da estratégia dos alunos A20 e A25.



Fonte: Dados da pesquisa.

No primeiro quadro, o que se pode observar é que o aluno A20 nomeou cada ângulo interno do triângulo com as letras A, B e C e em seguida escreveu que a soma desses ângulos internos era igual a 90. O que acreditamos é que houve aí uma possível confusão com a soma dos ângulos internos de um triângulo. Ponderamos que o aluno tenha se atrapalhado com o fato de o triângulo possuir um ângulo de 90° , com o valor da soma dos ângulos internos. Ainda nesse extrato, o aluno substituiu as letras A, B e C, que ele havia destacando como sendo os ângulos internos do triângulo, pelos valores da medida dos catetos e da hipotenusa e deu continuidade, resolvendo a equação do primeiro grau que ele havia encontrando com essas ações, confundindo a representação utilizada por ele para ângulos com a medida dos lados do triângulo.

No segundo quadro, o aluno A25 descreve uma relação que diz que a medida da hipotenusa é razão entre o cateto adjacente e o cateto oposto; em seguida, substituiu as medidas do triângulo nessa relação, dizendo assim que a medida da hipotenusa é a cotangente do ângulo formado pela hipotenusa e pelo cateto de medida 12, o que não é verdade. Assim como no extrato do primeiro quadro, essa estratégia não apresenta nenhum indício de que o aluno conheça o Teorema de Pitágoras.

Analisando as respostas que apresentavam indícios do Teorema de Pitágoras buscamos entender quais equívocos foram cometidos pelos alunos e reconhecemos: erro na interpretação da resposta, esquecimento de elevar uma das medidas ao quadrado, erro na identificação da hipotenusa e erro na resolução.

Quadro 3: Quantitativo de respostas encontradas na subcategoria apresenta indícios de conhecimento do Teorema de Pitágoras.

Categoria	Quantidade de respostas
Erro na interpretação da resposta	6
Esquecimento de elevar uma das medidas ao quadrado	6
Erro na identificação da hipotenusa	2
Erro na resolução	25
Total	39

Fonte: Dados da pesquisa.

Pelos dados apresentados no Quadro 3, identificamos que, em apenas duas das respostas, os alunos não identificaram corretamente a hipotenusa no triângulo retângulo, ou seja, o aluno confunde um dos catetos com a hipotenusa. Entre os alunos que erraram as questões e que possuíam indícios de conhecimento do Teorema de Pitágoras, 64% apresentaram erro na resolução, sendo que os erros mais frequentes são: as resoluções de produtos notáveis, potenciação e radiciação. A Figura 7 ilustra estas estratégias.

Figura 7: Extrato da estratégia dos sujeitos A01e A30.

Fonte: Dados da pesquisa.

No primeiro quadro da Figura 4 o erro cometido pelo sujeito foi no desenvolvimento dos produtos notáveis $(x+9)^2$ e $(x+3)^2$. Acreditamos que esse aluno tenha confundido uma propriedade de potências que diz que um produto de a e b , elevado a uma potência n , é o produto de a elevado a n e b elevado a n . No segundo quadro percebemos que o erro se encontra numa operação incorreta, realizada com dois monômios de partes literais diferentes – o sujeito realiza a diferença entre $12x$ e $4x^2$, afirmando que a solução é $8x$. Supomos que esse aluno não identificou a equação como sendo uma equação do 2º grau e realizou o processo que é usualmente feito com equações do 1º grau.

Esses resultados nos chamam a atenção, pois o quantitativo de erros (51 respostas) está próximo do quantitativo de respostas corretas (55 respostas). Apesar de o trabalho de Reis e Perovano (2016) terem apontado dificuldade na resolução das situações aqui apresentadas, uma vez que, todas as alternativas da primeira questão são questões encontradas facilmente nos livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental esses resultados nos possibilitam inferir que ainda há dificuldades na

resolução de questões que envolvem o Teorema de Pitágoras por parte desses alunos, quando do ingresso no Ensino Superior.

Considerações finais

Apesar de o Teorema de Pitágoras ser abordado nas aulas de Matemática desde os anos finais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio, estudos indicam dificuldades na resolução de questões que envolvem esse teorema (REIS; PEROVANO, 2016). Assim, analisamos as estratégias utilizadas por alunos do 1º semestre do Curso de Licenciatura em Matemática da UESB diante questões que envolvem o Teorema de Pitágoras.

Adotamos uma abordagem qualitativa e decidimos pela pesquisa descritiva com a aplicação de um questionário a 32 alunos do referido curso, antes que estes tivessem contato com tal conteúdo na Universidade.

Foram analisadas 128 respostas, e verificamos que mais da metade (57%) eram respostas erradas, deixadas em branco ou incompletas. A maior parte das estratégias erradas foi classificada como estratégia com indícios de conhecimento do Teorema de Pitágoras e com erro na resolução, o que nos leva a ponderar que o grande fator de erro, nessas respostas, não está no desconhecimento do teorema, mas sim, numa possível dificuldade em conteúdos como produtos notáveis, potenciação e radiciação.

Identificamos que tais problemas merecem um olhar cuidadoso para que tais erros não sejam considerados como inerentes ao trabalho com o Teorema de Pitágoras. Consideramos ser essencial iniciar uma mudança, desde a formação inicial evitando o que Menezes et al., (2014) aponta: futuros professores tendem a repetir as mesmas ideias equivocadas adquiridas em sua escolaridade anterior

Referências

BASTIAN, I. V. **O Teorema de Pitágoras**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

BERLINGHOFF, W. P., GOUVÊA, F. Q. **A Matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

BORGES FILHO, Francisco. **O desenho e o canteiro no Renascimento Medieval (séculos XII e XIII)**: indicativos da formação dos arquitetos mestres construtores. 2005. Tese (Doutorado em Estruturas Ambientais Urbanas) - Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/16/16131/tde-13102005-115856/pt-br.php>> Acesso em: mai 2019.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio**; volume 2. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

DANTE, R. L. **Tudo é matemática**: 8º série - 2 edição - São Paulo: Ática, 2010.

EUCLIDES. **Os elementos**. tradução e introdução de Irineu Bicudo. – São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FERREIRA, R. M. **Teorema de Pitágoras**: uma análise quantitativa do seu saber na 3º série do Ensino Médio. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal do Vale do São Francisco, Juazeiro, 2016.

FIORENTINI, Dário; LORENZATO, Sérgio. **Investigações em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos – Campinas, SP: Autores Associados, 2006 – Coleção formação de professores.

LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

MENEZES, L. M; SERRAZINA, L; FONSECA, L.; RIBEIRO, A.; RODRIGUES, M.; VALE, I.; BARBOSA, A.; CASEIRO, A.; MARTINS, A.; LOUREIRO, C.; FERNANDES, F.; VELOSO, G.; GOMES, H.; BRUNHEIRA, L.; ALMEIDA, P.; TEMPERA, T; Conhecimento de Geometria de estudantes da Licenciatura em Educação Básica. **In**. Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática. Braga: APM., (2014). pp. 243–26

MINAYO, Maria Cecília de Souza. **Pesquisa Social**: teoria, método e criatividade. Petrópolis: Vozes, 1994.

PEREIRA, M. G. G., COUTO, A. P. N. P., COSTA, A. C. Análise de erros em questões de Teorema de Pitágoras: um estudo com alunos do Ensino Fundamental. **In**: Encontro Nacional de Educação Matemática, XII, São Paulo – SP, 2016.

RODRIGUES, R. F., MENEZES, J. E. Aplicações de problemas diferenciados do Teorema de Pitágoras na Educação de Jovens e Adultos. **In**: Encontro Nacional de Educação Matemática, X, Salvador – BA, 2010.

REIS, J. C.; PEROVANO, A. P. Uma análise das Estratégias Empregadas por Alunos do Ensino Superior em Problemas Envolvendo o Teorema de Pitágoras. **In**: SANT’ANA, Claudinei de Camargo; SANTANA, Irani Parolin; AMARAL, Rosemeire dos Santos. (Org). AÇÕES COLABORATIVAS E COOPERATIVAS EM EDUCAÇÃO: entre História, Ensino e Formação de Professores. 1ªed. São Carlos: Pedro & João Editores, 2016, v.1, p. 231-254.

Recebido em 29/04/2018

Aceito em 29/08/2018

Sobre os autores

WILSON SOUZA COSTA JÚNIOR, atualmente cursando Mestrado Profissional em Matemática em Rede – PROFMAT. Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.

ANA PAULA PEROVANO, doutoranda em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Professora assistente da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.