 DOI: doi.org/10.25090/remat25269062v16n222019p252a269

Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Regional São Paulo
eISSN: 2526-9062

GEOMETRIA EUCLIDIANA E DO TÁXI: UM PROBLEMA CONCRETO E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

José Carlos Pinto Leivas
Universidade Franciscana - UFN
E-mail: <leivasjc@unifra.br>

Resumo

Neste artigo, apresenta-se resultados de uma investigação realizada com estudantes de Geometria Analítica e Álgebra Linear. A pesquisa, de cunho qualitativo, foi fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, tendo como questão norteadora: para obter a melhor solução de um problema de determinação de um espaço público, verifique qual é a Geometria que proporciona um melhor resultado: a Euclidiana ou a do Táxi? Para responder ao problema, delineou-se o objetivo de analisar os tipos de registros de representação semiótica empregados pelos estudantes na busca de solução, explorando alternativas nas duas geometrias. Os resultados mostraram que alguns estudantes tiveram dificuldades em obter o registro verbal para conceituação do lugar geométrico procurado na Geometria do Táxi e, consequentemente, na conversão para o registro figural. Dessa forma, concluíram que a Geometria do Táxi oferece a melhor solução para o problema.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana; Geometria do Táxi; Registros de Representação Semiótica.

EUCLIDEAN GEOMETRY AND TAXICAB: AN CONCRET PROBLEM AND THE SEMIOTICS REPRESENTATIONS REGISTERS

Abstract

This article presents the results of an investigation carried out with students of a professional master's degree in Mathematics Teaching, in a discipline of Analytical Geometry and Linear Algebra. The qualitative research was based on Duval's Theory of Semiotic Representation Registers and had as a question: to obtain the best solution to a problem of determining a public space, to check which Geometry presents a better result: the Euclidean or the Taxi? To answer the problem, we outline the purpose of analyzing the types of semiotic representation registers used by the students in the search for solutions in the two geometries. The results showed that some students had difficulties in obtaining the verbal registration for the conceptualization of the place searched in the Taxi Geometry and, consequently, in the conversion to the figural register. Thus, they were not able to conclude that the Geometry Taxi offers the best solution to the problem.

Key words: Euclidean Geometry; Taxicab geometry; Semiotic representation registers.

GEOMETRÍA EUCLIDIANA Y DEL TAXI: UN PROBLEMA CONCRETO Y LOS REGISTROS DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

Resumen

En este artículo, se presentan resultados de una investigación realizada con estudiantes de Geometría Analítica y Álgebra Lineal. La investigación, de cuño cualitativo, fue fundamentada en la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Duval, teniendo como cuestión orientadora: para obtener la mejor solución de un problema de determinación de un espacio público, verifique cuál es la Geometría que proporciona un mejor resultado: ¿la Euclidiana o la del Taxi? Para responder al problema, se delineó el objetivo de analizar los tipos de registros de representación semiótica empleados por los estudiantes en la búsqueda de la solución, explorando alternativas en las dos geometrías. Los resultados mostraron que algunos estudiantes tuvieron dificultades para obtener el registro verbal para la conceptualización del lugar geométrico buscado en la Geometría del Taxi y, consecuentemente, en la conversión al registro figural. De esta forma, concluyeron que la Geometría del Taxi ofrece la mejor solución para el problema.

Palabras clave: Geometría Euclidiana; Geometría del Taxi; Registros de Representación Semiótica.

Introdução

A partir da década de 1970, o movimento de Matemática Moderna gerou discussões a respeito do ensino de Geometria. Autores pesquisaram sobre o seu abandono e foram deixadas algumas perguntas como as que seguem. O que se dizer a respeito disso nos dias atuais? Houve algum avanço? Quais inovações estão sendo aplicadas nos diversos níveis de escolaridade? E na formação de professores? Não se pretende respondê-las no presente artigo, mas tomá-las como ponto de partida para o mesmo, o qual tem a pretensão de divulgar resultados de uma pesquisa realizada com estudantes de uma disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear. O estudo foi desenvolvido no contexto de um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

A Geometria Euclidiana tem sido o principal foco de ensino ao longo dos séculos e poucas inovações parecem estar ocorrendo, como indica a pesquisa de Leivas (2009). Embora Piaget e Inhelder (1993) afirmem que as noções topológicas precedem às euclidianas, por independerem de medidas, são raros os trabalhos que envolvem a Topologia no sentido de ser aplicada à escola básica. Em Leivas (2007, 2008, 2009), o autor aborda possibilidades de organizar os tempos e espaços na infância e reafirma sua convicção sobre a importância de propriedades topológicas como vizinhança, separação, ordem, fronteira, envolvimento e continuidade no desenvolvimento cognitivo dos estudantes, especialmente na construção do espaço geométrico. O autor exemplifica como é possível, por exemplo, para estudantes do final do Ensino Fundamental, classificarem quadriláteros por meio de atividades exploratórias simples.

Já em Silva e Leivas (2013), se encontra o emprego da intuição topológica para o ensino de Geometria na escola básica, em resultado obtido em uma pesquisa com mestrandos que desconheciam o assunto. Os autores apresentam possibilidades de seu emprego em níveis mais elementares do que aqueles que se desenvolvem, em geral, nos cursos mais avançados de Matemática.

Visualização é uma habilidade recorrente no cenário internacional em relação à sua importância para a aprendizagem em Geometria, conforme Leivas (2009), Arcavi (1999), Kuzniak (2011), Duval (2004), dentre outros. Entende-se que o desenvolvimento dessas habilidades, quer pelo uso dos materiais manipuláveis, quer pelo uso de softwares de Geometria Dinâmica, têm a contribuir para despertar o interesse dos estudantes, tanto na elaboração de construtos mentais quanto para as representações, especialmente, dos objetos do espaço, os quais oferecem, usualmente, maior dificuldade para eles e, por que não, para os próprios professores.

Nacarato, Luvison e Custódio (2015), em pesquisa realizada com estudantes de um 3º ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de discutir sobre a passagem de um objeto tridimensional para o bidimensional e vice-versa, constatam:

> [...] a importância dos gestos e o papel do desenho. Esse movimento de transformação 3D 2D e, simultaneamente, 2D 3D é um dos mais complexos para os alunos, principalmente os mais novos, como os dessa turma (8-9 anos de idade). Ele exige **visualizar** o duplo movimento: do espaço para o plano e do plano para o espaço – a planificação tem que garantir que se volte à superfície inicial. (p. 7, grifo do autor).

Ainda a respeito de visualização, Kaleff e Nascimento (2015) afirma que

> [...] pode-se utilizar uma grande variedade de representações gráficas nas salas de aula dos anos iniciais do Ensino Fundamental, com as quais se motiva o aluno a observar com mais atenção desenhos, diagramas, gráficos e tabelas, e a vivenciar situações com outros campos do saber, que permitam desenvolver a habilidade da visualização, interligar a matemática escolar às Artes, às Ciências e às novas tecnologias relacionadas a imagens e figuras. (p. 5-6)

Por si só, as duas publicações recentes dão mostra de abordagens envolvendo habilidades visuais que podem ser levadas em consideração na formação do professor e que, certamente, conduzirão à formação de pensamento geométrico dos estudantes.

Outra tendência que tem sido utilizada em pesquisas em Geometria é a Teoria de Van Hiele, a qual trata de níveis para o desenvolvimento do raciocínio em Geometria. Para Nasser e Vieira (2015, p. 9):

> [...] de acordo com essa teoria, o aluno que está raciocinando num determinado nível não compreende alguns termos usados numa linguagem focada em níveis mais avançados. Van Hiele estabelece ainda que o progresso de níveis na aprendizagem de Geometria passa por fases em que a comunicação é fundamental, e que a aprendizagem significativa só ocorre quando o discurso do professor, o material didático (livro texto) e o aluno estão emparelhados num mesmo nível.

Observa-se que essa teoria modifica a forma com que se vinha tratando a Geometria, na qual havia seu abandono nas salas de aula e era relegada ao final do livro didático. Ela independe da idade do indivíduo para que ocorra sua aprendizagem e, por isso, é importante que seja incorporada numa forma de fazer Geometria que busque dirimir, senão eliminar, a rejeição ao estudo dessa disciplina, assim como proporcionar conhecimentos e metodologias diferenciados ao professor para que não a abandone em seu planejamento para a sala de aula.

Outro aspecto que ainda não tem sido absorvido pela escola é a Geometria Fractal, a qual proporciona aos estudantes motivação para estudar Geometria, especialmente pela sua beleza e associação com a realidade ao se estabelecer conexões com os fractais encontrados na natureza. É um dos conteúdos geométricos mais recentes e possui inúmeras aplicações, como no caso da Teoria do Caos e em procedimentos da telefonia celular. Ela pode ser utilizada como recurso didático ao professor para desenvolver conteúdos variados em diversos níveis, por exemplo, progressões geométricas, no Ensino Médio; sequências e séries no Ensino Superior.

Ao fazerem uma investigação com estudantes do Ensino Médio, utilizando o fractal denominado Tetra Círculo no software Geogebra para introduzir o assunto progressão geométrica, Melo e Leivas (2015) constataram que as atividades aplicadas, com aporte nas fases de investigação de padrões de Hilbert e Brown (procura do padrão, reconhecimento do padrão e generalização), possibilitaram aos estudantes se tornarem sujeitos ativos no processo de construção do conhecimento em apreço. Dessa forma, um tema atual pode ser introduzido no currículo escolar para desenvolver conteúdos consagrados ao longo dos tempos e que os professores e o livro didático não deveriam desconsiderar.

Dois temas considerados relevantes para o presente artigo e que dão continuidade a essa linha de desenvolvimento geométrico são: Registros de Representações Semióticas, uma teoria que parece favorecer a aprendizagem conceitual de Geometria e Geometria do Táxi ou Geometria Urbana, um conhecimento a ser incorporado à Geometria na atualidade. Por se constituírem o foco do presente artigo, eles serão abordados nos próximos itens.

Registros de Representação Semiótica

Este estudo se aterá à Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, a qual tem foco na aprendizagem em Matemática e centra a atenção nas operações cognitivas dos indivíduos em formação. Nessa teoria é dado enfoque aos aspectos conceitual e representacional de um objeto, indicando que ocorre a aprendizagem quando há conversão entre, pelo menos, dois tipos de registros.

A representação, em Geometria, não é simples, especialmente em se tratando de objetos tridimensionais, os quais são representados no plano. A partir de representações, a passagem ao conceito ou vice-versa apresenta um grau de dificuldade grande aos estudantes, o que se tem percebido na militância do autor do artigo sobre o ensino desta área.

Duval (2014. p. 24) afirma ser possível concluir, sem maiores riscos, que:

> [...] a linguagem e as dificuldades que suscitam não estão nem no conhecimento do "vocabulário" geométrico nem nos conceitos que as palavras significam, mas nas operações de designação que elas pressupõem, assim como no discernimento visual de diferentes unidades figurais possíveis 2D, 1D em uma figura. Pudemos perceber que os alunos não suspeitam nem da diversidade nem da complexidade uma vez que elas excedem em muito o campo da designação oral dos objetos materiais. Em geometria, elas se ligam ora à linguagem ora à visualização.

Não se acredita que a aprendizagem de um conceito matemático possa advir de uma definição formal dele, seguida de exemplos para esclarecê-lo, prática frequentemente utilizada pelos professores em suas aulas. Preparar situações de ensino que tenham por objetivo a construção de um determinado conceito poderia levar em conta, segundo o autor, à ação que precede a linguagem e uma preparação para compreender o conceito. Assim, a linguagem natural se torna o elemento a expressar o que o indivíduo percebe, pensa, compreende e visualiza.

Entende-se visualização como um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos. Fischbein (1987), a respeito dessa habilidade, assim se expressa:

> [...] representações visuais não somente auxiliam na organização da informação em representações como constituem um importante fator de globalização. Por outro lado, a concretude de imagens visuais é um fator essencial para a criação de um sentimento de auto evidência e imediaticidade. Uma imagem visual não somente organiza os dados em estruturas significativas, mas é também um fator importante para orientar o desenvolvimento de uma solução analítica; representações visuais são essenciais dispositivos antecipatórios. (p. 104, tradução livre)

Ao corroborar com o autor a respeito de que representações visuais são dispositivos antecipatórios, acredita-se que, para a resolução de um problema analítico, partir de uma representação de uma situação concreta, para posterior definição do lugar geométrico, especificamente sobre uma geometria não trivial ou usual, pode ser um mecanismo produtivo de formação de conceitos.

Em estudo recente, Duval (2014, p. 31) questiona: "como tomar consciência das rupturas e transferências entre ação e enunciados matemáticos? As verbalizações intermediárias". Ele afirma a importância dessas verbalizações intermediárias: "silenciosa, cujo objetivo é de que se evidencie a operação de reversão e de seu resultado no lugar de se ter um resultado da atividade" (p. 31). Na sequência, indica o recurso a uma produção escrita, não somente oral, pois, de acordo com o autor, ela conduz a uma "tomada de consciência da maneira pela qual os termos geométricos se articulam com as figuras é condição cognitiva para que os estudantes possam compreender enunciados matemáticos" (p. 32). Assim, apresenta a vantagem de remeter, cada estudante, a produzir ele mesmo uma descrição, uma explicação e não somente entendê-la ou lê-la.

Duval (2014) afirma que: "para se tornar capaz de resolver, sozinho, problemas em geometria e de maneira mais prática, para reconhecer quando e como aplicar fórmulas para calcular grandezas (distância, área, etc.), é necessário se apropriar desta maneira de ver as figuras" (p. 34). Para ele, a atividade matemática nos cursos de Geometria da educação básica se realiza em dois tipos de registros: o das figuras e o da linguagem natural. Para o autor, a originalidade dos processos nesta disciplina tem a ver com coordenação entre os tratamentos específicos ao registro das figuras e os do discurso teórico natural. No que diz respeito ao registro figural, Duval afirma que ele é comandado pela evidência imediata de uma constatação perceptiva, indo ao encontro do que afirmou Fischbein (1987) a respeito de visualização.

Em termos de representações geométricas, uma figura é sempre uma configuração de ao menos duas unidades figurais. Por exemplo, em uma circunferência é necessário se ter um ponto que é o centro e o traçado circular obtido com o compasso, no caso da Geometria Euclidiana. Nesse sentido, a obtenção de uma circunferência em uma Geometria Não Euclidiana irá necessitar, além de um ponto comum, o centro, que corresponde a outra forma que não o compasso para o traçado do lugar geométrico. Segundo Duval (2004, p. 160), “Um mesmo ‘objeto’ matemático pode representar-se com unidades figurais diferentes”. Isto se torna claro ao tomar a ‘circunferência’ em duas métricas distintas, tema do presente artigo.

No que diz respeito ao tratamento dos registros na teoria de Duval, para compreender como ocorre a abstração, deve-se distinguir dois níveis na apreensão das figuras geométricas:

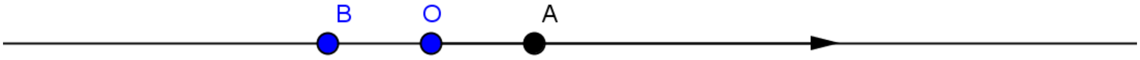
> [...] um primeiro nível no qual se opera o reconhecimento das diferentes unidades figurais que são discerníveis na figura dada e, num segundo nível, em que se efetuam as modificações possíveis das relações das partes com o todo (óticas ou posicionais) das unidades figurais reconhecidas e da figura dada. O primeiro nível corresponde ao que classicamente se conhece como ‘percepção’ e o segundo a uma apreensão operatória das figuras. (DUVAL, 2004, p. 162)

No que segue, apresenta-se alguns pressupostos a respeito de uma geometria não euclidiana.

Geometria do Táxi

Uma característica importante na Geometria Euclidiana é a questão de medidas. Na abordagem analítica, os objetos geométricos (pontos, retas, plano, superfícies) são caracterizados por coordenadas. Assim, um ponto na reta é dado por P = (x), em que x é um número real qualquer, obtido por meio de uma orientação dada a um eixo, denominado orientado, no momento em que se escolhe um ponto O como origem, ao qual se atribui o número real 0; uma unidade de medida, um sentido de percurso para as medições, considerado positivo [de O para A, por exemplo] e o inverso como negativo [de O para B] (figura 1).

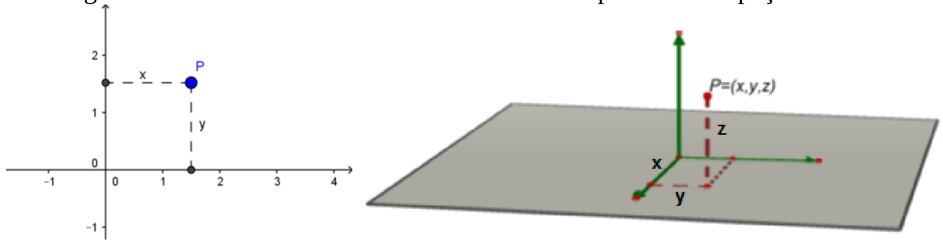
Figura 1 – Eixo coordenado



Fonte: autor

Um ponto no plano é dado por um par de coordenadas P = (x,y), como na figura 2, na qual são dispostos dois eixos, como o do caso anterior, perpendiculares entre si, pelo ponto O. A distância do ponto P ao eixo vertical é denotada por x, enquanto a de P ao eixo horizontal, por y. Por sua vez, no caso do espaço, o ponto passa a ter uma terceira coordenada z, que indica a cota do ponto, ou seja, a distância até um plano determinado pelos dois eixos anteriores, P = (x,y,z).

Figura 2 – Sistema de coordenadas cartesianas no plano e no espaço.



Fonte: autor

Isso pode ser abstraído para espaços não perceptíveis ou representados, com número de coordenadas maiores do que três.

A partir da atribuição de coordenadas nesses espaços, define-se a função distância, entre dois pontos A e B, como sendo aquela que associa ao par ordenado (A,B) um único número real não negativo, denominado de distância de A até B, com as seguintes propriedades:

d(A, B) ≥ 0 e d(A, B) = 0 se, e somente se, A = B.

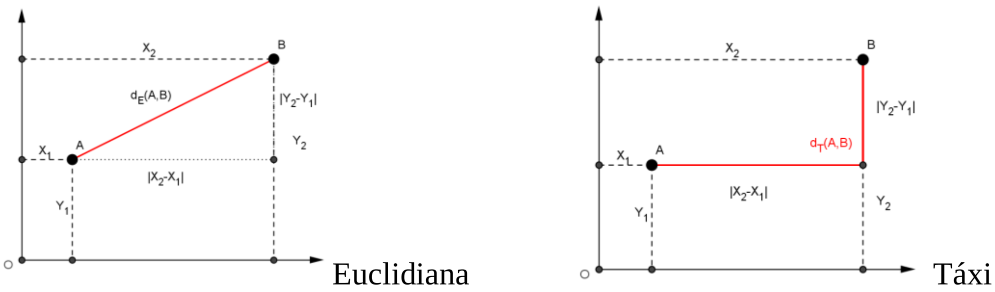
d(A, B) = d(B, A); para todo A e B.

d(A, B) ≤ d(A, C) + d(C, B), para todo A, B, C.

Para os propósitos deste artigo, se fará a definição de duas dessas funções no plano cartesiano R^2. Sejam A= (x_1, y_1) e B = (x_2, y_2), então

$d_E(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$ e $d_T(A,B) = |x_2-x_1|+|y_2-y_1|$ são as denominadas distância Euclidiana e distância do Táxi. Uma geometria que utiliza a primeira forma de definir distância é conhecida como Euclidiana, enquanto que a segunda é a do Táxi. As formas de representação no plano, das duas distâncias, constam na figura 3.

Figura 3 – Métrica Euclidiana e do Táxi.



Fonte: autor

Observa-se que a distância percorrida na Euclidiana é menor do que a percorrida na do Táxi, a qual também é denominada dos catetos, uma vez que o percurso realizado para o deslocamento de A até B ocorre ao longo dos catetos de um triângulo formado pelos três pontos assinalados e, assim, ele é sempre maior do que o feito ao longo da hipotenusa. A Geometria do Táxi é chamada por alguns de Geometria Urbana, uma vez que ela fornece uma forma mais ou menos concreta dos deslocamentos feitos por um táxi ao realizar os trajetos ao longo das quadras de uma cidade urbanizada. Ela pode ser motivadora para a aprendizagem de Geometria por despertar interesse em visualizar o emprego dessa área no cotidiano e não apenas nos aspectos teóricos que usualmente são invocados na Euclidiana. De acordo com Kaleff e Nascimento (2004, p. 13):

> [...] a Geometria do Táxi pode ser apresentada, com a intenção de se integrar a Matemática ao cotidiano do aluno, pois esta se apresenta em todos os lugares, não podendo, portanto, deixar de ser encontrada no espaço das "ruas". Desta forma, confrontado com esta nova Geometria, o aluno pode ser levado a perceber que existem outras Geometrias além da Euclidiana, possibilitando que tenha despertada a sua curiosidade para novos ambientes matemáticos.

Souza (2015) comprovou em sua pesquisa de mestrado o quanto esta Geometria proporciona novas aprendizagens. Ela investigou seu uso na resolução de problemas que envolviam o deslocamento de estudantes até a escola a partir de suas residências, com o auxílio da visualização obtida a partir da ferramenta computacional GeoGebra. Levando em conta, ainda, o que preconizam as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 75), temos:

> [...] o estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida.

Pelas razões expostas, justifica-se a pesquisa ora apresentada envolvendo este conteúdo de Geometria, ainda pouco explorado no ambiente escolar, apresentando uma boa razão para o emprego da função modular. Além disso, pode ser o desencadeador do estudo da equação da reta no plano cartesiano, também constante dos conteúdos programáticos deste nível de ensino. No que segue, apresentamos a investigação realizada, seus fundamentos e a análise dos dados.

A investigação e a análise dos dados

Participaram da investigação 14 estudantes de um mestrado profissionalizante de uma disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, ministrada pelo pesquisador, no segundo período letivo de 2015, os quais serão nomeados por letras maiúsculas **A**, **B**, **C**, ..., **N**, para evitar identificação.

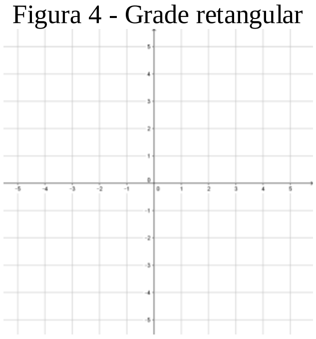
A questão de pesquisa foi: para obter a melhor solução de um problema de determinação de um espaço público, verifique qual é a Geometria que proporciona um melhor resultado: a Euclidiana ou a do Táxi? O objetivo foi analisar os tipos de registros de representação semiótica empregados pelos estudantes na busca de solução explorando alternativas nas duas geometrias.

A atividade ocorreu num período de quatro horas aula, ao final da disciplina, sendo tomada como parte do processo avaliativo da mesma, em caráter individual. A coleta de dados foi feita mediante registros escritos dos estudantes e encaminhados ao investigador tão logo cada um deles a tivessem concluído. Foi distribuída uma folha individual contendo o seguinte problema:[1]

> Certa região de um bairro é limitada a oeste pelo ponto localizado em B=(-5,0); ao norte pelo ponto C=(0,5), a leste pelo D=(5,0) e ao sul pelo ponto E=(0,-5). Existem construções históricas e árvores milenares localizadas nesses pontos e nos pontos J=(-3,4), K=(-4,3), L=(0,2), M=(-4,2), N=(3,3), O=(0,0), P=(-2,3), Q=(2,2), R=(3,0), S=(-1,3), T=(1,-1), U=(4,-2), V=(-2,-4), X=(-3,1), Z=(-2,2).
>
> A prefeitura local quer construir um espaço público nesta região no entorno do ponto O. Deseja preservar o patrimônio histórico e o meio ambiente, tendo o menor gasto com desapropriações, cortes das árvores e ocupar o maior espaço possível.
>
> Ajude a resolver o problema. Para tal, faça uso das Geometrias Euclidiana e do Táxi para decidir qual a que oferece maior vantagem. Faça um layout desse espaço. Para isso:
>
> a) Faça uma representação gráfica do problema.
> b) Defina o lugar geométrico envolvido.
> c) Obtenha as leis matemáticas que definem o lugar geométrico nas duas Geometrias.
> d) Descreva verbalmente as duas situações.
> e) Argumente sobre sua decisão tomada.

Além do problema, foi fornecida uma folha com a Figura 4 para o registro figural e uma em branco para os demais registros.

Figura 4 - Grade retangular



Fonte: autor

Entende-se a presente pesquisa como qualitativa no sentido apontado por Denzin e Lincoln (1994), para as quais “é um conjunto de práticas interpretativas, prerrogativa de nenhuma outra qualquer metodologia” (p. 3). Segundo as autoras, a pesquisa qualitativa tem um conjunto distinto de métodos que lhe são próprios. Além disso, “pesquisadores qualitativos usam semiótica, narrativa, conteúdo, discurso, arquivo e análise fonêmica e, até mesmo, estatística” (p. 3).

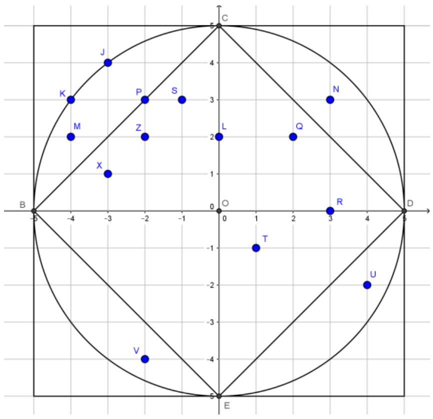
Analisa-se a pesquisa feita com base nos arquivos apresentados ao investigador com suas narrativas e seus registros de representação semiótica: natural ou discursivo, gráfico ou figural e simbólico.

[1] Para destacar o problema o mesmo foi digitado em fonte 10 e espaço simples.

As estudantes **K** e **L** representaram o ponto X no quarto quadrante, equivocando-se com a ordenada, enquanto **N** se equivocou com a ordenada de U, localizando o ponto no primeiro quadrante. Os demais representaram os pontos corretamente. Isso vai ao encontro do que Duval (2014) informa quanto "[...] a linguagem e as dificuldades que suscitam não estão nem no conhecimento do vocabulário geométrico nem nos conceitos que as palavras significam, mas nas operações de designação que elas pressupõem, assim como no discernimento visual de diferentes unidades figurais [...]" (p. 24)

Ao analisar o item a), qual seja, 'faça uma representação gráfica do problema', verificou-se que 90% da turma constatou que os pontos definiam duas figuras geométricas que identificaram como circunferência e quadrado (Figura 5), sem o quadrado externo. O estudante **A**, limitou o problema como consta.

Figura 5 - Transcrição do registro figural feito por ***A***[2]

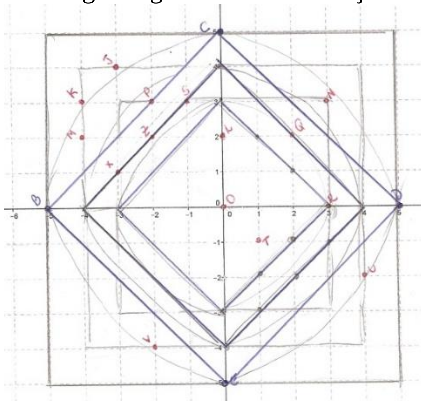


Fonte: aluno **A**.

O estudante apresentou três possibilidades de demarcação do espaço para a construção; uma circunferência Euclidiana, um quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados e um de diagonais paralelas a estes eixos [a circunferência na métrica do Táxi]. Somente os estudantes **A** e o **F** demarcaram o quadrado maior. Esse registro ampara-se no afirmado por Fischbein (1987) de que a imagem visual é importante, não somente para organizar dados, mas para orientar a solução analítica.

[2] Por terem sido feitas as representações a lápis e para uma melhor visualização das figuras, algumas delas foram construídas no GeoGebra pelo investigador.

Figura 6 - Registro gráfico da demarcação

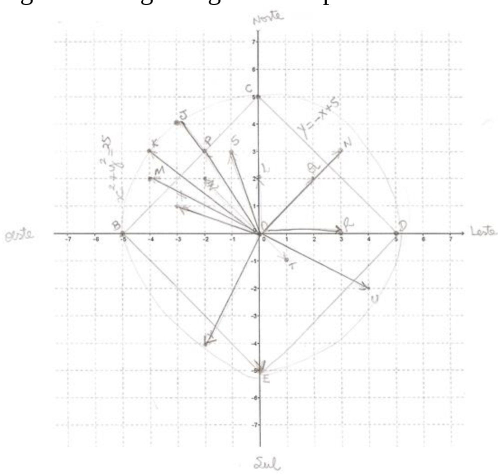


Fonte: estudante ***F***.

Observa-se, no registro figural da estudante **F**, que a mesma fez uma limitação máxima pelo quadrado de lados paralelos aos eixos coordenados e foi construindo 'bolas' nas duas métricas com raios sendo ampliados a partir de 3 unidades até chegar a 5. Procedimento similar foi realizado pelo estudante **N**, porém ele não demarcou o quadrado maior e começou com os de diagonais paralelas aos eixos a partir do raio 1, sempre inteiros. Entendeu-se aqui estar ocorrendo o primeiro nível apontado por Duval (2004), o qual opera o reconhecimento das primeiras unidades figurais discerníveis na figura.

Diferenciado desses primeiros registros foi o produzido por **B**. Em sua representação gráfica, colocou vetores, partindo do ponto O até encontrar um dos pontos e, na mesma direção, até encontrar outros pontos. Assim, limitou as circunferências nas duas métricas com o fim de responder aos próximos encaminhamentos. Isso vem reafirmar o indicado por Fischbein (1987) de que "[...] a concretude de imagens visuais é um fator essencial para a criação de um sentimento de auto evidência e imediaticidade" (p. 104).

Figura 7 - Registro gráfico do problema



Fonte: registro da aluna ***B***.

Percebe-se que o estudante empregou mais de um registro figural na medida em que utilizou vetores para obter o registro dos dois lugares geométricos que forneceriam a solução do problema, o que encontra amparo no indicado por Duval (2004) quanto à necessidade de se apropriar das figuras para calcular grandezas. Após a obtenção dos registros figurais, foi solicitado o item b), a saber ‘Defina o lugar geométrico envolvido’.

Com essa solicitação, o investigador esperava que os estudantes realizassem o registro em linguagem natural dos lugares geométricos, de acordo com seus registros figurais. Há de se considerar que, durante o transcorrer da disciplina, um assunto que a permeou foi o de distâncias: entre dois pontos, de ponto a reta, de ponto a plano, de ponto a conjunto, entre retas, entre reta e plano, entre planos, entre ponto e conjunto e entre conjuntos, sempre utilizando os registros algébricos em conexão com os figurais. Por outro lado, foi empregada, além da métrica Euclidiana para a obtenção de tais distâncias, a métrica dos catetos e com as quais se buscou o lugar geométrico equivalente ao de circunferência na Geometria Euclidiana. Dessa forma, chegou-se à equação da reta para definir as leis dos lados dessa circunferência (quadrado de diagonais paralelas aos eixos cartesianos), em uma aplicação da função modular e exploração de coeficientes angulares e lineares da reta no plano. Esperava-se que houvesse o registro verbal do lugar geométrico ‘circunferência’ nas duas métricas.

Constata-se, a partir dos registros, tanto verbais quanto figurais, o quanto os estudantes são conduzidos apenas pela métrica Euclidiana e, ainda que utilizando um mesmo conceito “lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes de um ponto dado” em duas métricas distintas, não conseguem se afastar da imagem Euclidiana de circunferência, muito embora a métrica dos catetos seja mais real do que essa, pois traduz um problema de deslocamento concreto ao longo das quadras de uma cidade urbanizada.

Os estudantes **F**, **H**, **J** e **M** não definiram os lugares geométricos e, portanto, não realizaram a conversão do registro figural para o natural. Por sua vez, **A** define como sendo circunferência na Geometria Euclidiana, realizando a conversão do registro figural para o natural, mas não o faz para a métrica do Táxi.

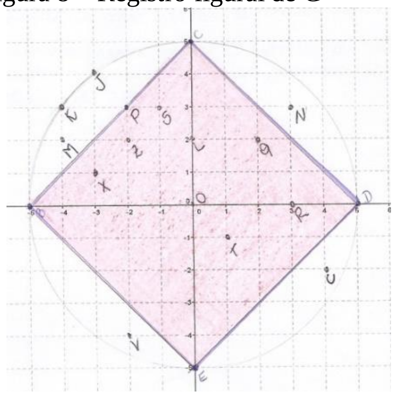
Entende-se que **D** realiza a conversão, porém não assimila a nomenclatura do segundo registro de forma adequada. Houve dificuldade no registro natural do conceito. Assim, se expressa quanto ao lugar geométrico: “*o quadrado representa a geometria do Táxi e a circunferência representa a geometria euclidiana*[3]”. No entanto, não define o lugar geométrico como circunferência, quer em uma métrica, quer em outra.

Considerando seu registro figural, **E** responde adequadamente: “*na Geometria do Táxi o lugar geométrico envolvido também é uma circunferência*”. Por sua vez, assim se expressa **C**: “*o lugar geométrico na distância euclidiana demonstra uma circunferência, com raio 5 e centro (0,0), e a distância do Táxi é a ‘bola’ quadrada que dista 5 unidades do centro (0,0)*”. A partir de sua solução,

[3] As transcrições dos estudantes são literais e destacadas em itálico e entre aspas.

apresentada no registro figural dado pela Figura 8, **G** indica: “*a maior área coberta prevê menor destruição é obtida pela Geometria do Táxi, que se refere ao quadrado de raio 5, ou seja, a circunferência quadrada de raio 5*”. Observa-se que há uma forte inclinação a continuar utilizando o termo quadrado e não circunferência num ato que parece não querer aceitar o conceito do lugar geométrico, ou melhor, aceitar a existência de uma métrica que não a euclidiana. Duval (2004) define dois níveis de apreensão operatória para compreender como ocorre com a abstração: reconhecimento das diferentes unidades figurais e modificações possíveis das relações partes com o todo. Os estudantes, ao não usarem o registro natural de forma convincente ao investigador, parecem indicar que não reconheceram as diferentes unidades figurais relacionadas ao objeto ‘circunferência’.

Figura 8 – Registro figural de G



Fonte: aluno **G**.

A próxima questão da investigação era ‘Obtenha as leis matemáticas que definem o lugar geométrico nas duas geometrias’. (item c).

Observou-se certa dificuldade dos estudantes na obtenção das leis que definem a circunferência na métrica do Táxi. D’Amore (2005) afirma que o conhecimento é a intervenção e a utilização dos símbolos e/ou registros. Na aprendizagem matemática, os estudantes são introduzidos em um mundo novo, conceitual e simbólico, sobretudo representativo, ou seja, o registro simbólico matemático. Os investigados **L**, **D** e **E** somente aplicaram a fórmula da distância Euclidiana entre dois pontos para obter um valor concreto. Há uma variação desses cálculos; alguns obtiveram a distância de O até B e outros de B até D. O estudante **G** não calculou nenhum valor e não apresentou leis dos lugares geométricos. O participante **F**, a partir de seu registro figural (Figura 6), indicou os seguintes registros algébricos:

- “*A primeira hipótese seria um deslocamento igual a 3u, na Geometria Euclidiana a equação que determina é* $x^2+y^2=9$”.

- “*A segunda hipótese seria um deslocamento igual a 4u, na Geometria Euclidiana a equação que determina é* $x^2+y^2=16$”.

- “*Na terceira hipótese seria um deslocamento igual a 5u, usando a maior área possível. Na Geometria Euclidiana a equação que determina é* $x^2+y^2=16$”.

- “*A primeira hipótese seria um deslocamento igual a 3u, na Geometria Euclidiana a equação que determina é* $x^2+y^2=9$”.

- “*A segunda hipótese seria um deslocamento igual a 4u, na Geometria Euclidiana a equação que determina é* $x^2+y^2=16$”.

- “*Na terceira hipótese seria um deslocamento igual a 5u, usando a maior área possível. Na Geometria Euclidiana a equação que determina é* $x^2+y^2=16$”.

Dessa forma, pode-se perceber que houve uma conversão do registro figural para o algébrico, mas isso ocorreu apenas com relação ao construto euclidiano.

O estudante **M** utilizou a fórmula da distância Euclidiana entre dois pontos para obter a equação do lugar geométrico e, em seguida, tentou estabelecer uma analogia para obtê-la na outra métrica, mas equivocou-se escrevendo:

“$5 \geq |x_1-x_2|+|y_1-y_2|$; $5 \geq |0-x_2|+|0-y_2|$; $x_2+y_2 \leq 5$.”

Ele não se preocupou com o domínio das variáveis para retirá-las do módulo, fato comum entre estudantes da escola básica ao tratarem com a função modular.

C obteve a equação correta da circunferência na métrica Euclidiana. Calculou a distância de O até os quatro pontos limítrofes B, C, D e E na métrica do Táxi. Entretanto, ao aplicar a distância obtida a um ponto descrevente A=(x,y), a exemplo do que fez **M**, abandonou o módulo e obteve a lei x+y=5 de forma equivocada.

B obteve a equação Euclidiana $x^2+y^2=5$ para o limite e, logo a seguir, indicou “$x^2+y^2 \leq 5$ *para região ou área de abrangência*”. Exemplificou, utilizando a fórmula da distância Euclidiana, que os pontos K e J estão na circunferência, enquanto U e T estão na região limitada por ela. Ilustrou uma pequena circunferência ao lado de seus cálculos. Em seguida, aplicou a métrica do Táxi, desmembrando a função modular obtendo as quatro leis:

$x \leq 0$, $y \leq 0 \Rightarrow -x-y=5 \Rightarrow y=-5-x$; equivoca-se no sinal de x.

$x \leq 0$, $y>0 \Rightarrow -x+y=5 \Rightarrow y=x+5$;

$x>0$, $y \leq 0 \Rightarrow x-y=5 \Rightarrow y=x-5$;

$x>0$, $y>0 \Rightarrow x+y=5 \Rightarrow y=-x+5$;

Afirmou: “*geometricamente retas no plano contendo segmento de reta: lugar geométrico é o quadrado formado pelos 4 segmentos: bola quadrada*”.

As equações obtidas por **A** e **I** são as mesmas de **B**, porém, sem o equívoco manifestado pelo último. **I** redigiu: “*a representação geométrica das quatro equações reduzidas da reta formam uma região retangular*”. Concluiu-se que ele não tinha clareza do conceito de circunferência na métrica do Táxi.

J fez de forma similar ao estudante anterior. Entretanto, utilizou como raio 4u. Por sua vez, **N** apresentou a equação Euclidiana do lugar geométrico para os casos de raios valendo 4, 3, 2 e 1, respectivamente e, conjuntamente, desmembrou a função modular para obtenção das diversas equações reduzidas da reta. Além disso, indicou: "*2 desapropriações (em ambas); 5 na Euclidiana e 3 na do Táxi; 7 em ambas; nenhuma nas duas*".

Por fim, **H** não obteve equações cartesianas, mas desmembrou a função modular para o caso do raio ser igual a 1u e apresentou as leis:

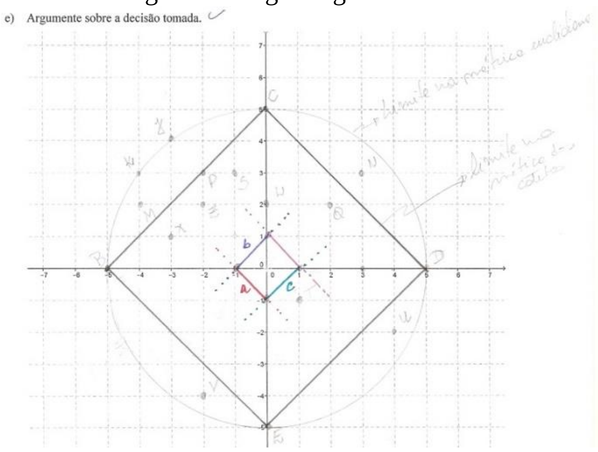
y = -x-1 e indicou em cor vermelha essa lei com a letra a;

y =x+1e indicou em cor preta essa lei com a letra b;

y = x-1 e indicou em cor verde essa reta com a letra c;

y = 1-x e indicou em cor rosa essa reta com a letra d.

Figura 9 - Registro gráfico de H



Fonte: aluna **H**.

Pode-se afirmar que os estudantes **L**, **D**, **E**, **P**, **M**, **C** e **B** realizaram a conversão do registro figural circunferência na métrica Euclidiana para o registro simbólico (equação do lugar geométrico), porém não o fizeram para o registro natural ou discursivo (conceito). Quanto aos estudantes **C** e **M** realizaram a conversão para o caso da distância do Táxi, mas cometeram erros algébricos quanto à função modular. Os estudantes **B**, **A**, **T**, **J**, **N** e **H** fizeram a conversão do registro figural para o algébrico na Geometria do Táxi.

Concluída essa etapa, o investigador fez o seguinte questionamento: para obter a melhor solução de um problema de determinação de um espaço público, verifique qual é a geometria que proporciona um melhor resultado: a Euclidiana ou a do Táxi? Os estudantes deveriam responder a tal pergunta após os registros de representação semiótica feitos, em formulário próprio, fornecido por eles. Houve unanimidade na resposta que seria a Geometria do Táxi, uma vez que não poderiam ter a circunferência Euclidiana "redondinha", na linguagem de alguns, para resolver o problema formulado, pois a urbanização das cidades, em geral, é feita em quarteirões ou muito próximo a isso.

Dessa forma, entendemos que o problema foi respondido e que os registros figurais foram os que proporcionaram a resposta correta ao problema. Entretanto, constatamos que as conversões entre o registro figural e o em língua natural não ocorreram adequadamente, uma vez que não conseguiram formular a definição do lugar geométrico obtido como sendo circunferência.

Considerações finais

Apresentou-se, neste artigo, uma investigação realizada junto a mestrandos que cursavam uma disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, a qual teve por objetivo analisar os tipos de registros de representação semiótica empregados pelos estudantes na busca de solução explorando alternativas nas duas geometrias. Para tal, a investigação se apoiou na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, particularmente buscando os registros gráficos e em língua natural para poder, a partir do primeiro, chegar ao segundo, ou seja, o conceito de circunferência em uma métrica que não a Euclidiana.

Conclui-se que o objetivo foi alcançado, uma vez que o uso das representações gráficas em papel, foram importantes para a compreensão do problema na transformação dessas em relação aos espaços 3D e 2D, como indicado por Nacarato, Luvison e Custódio (2007). Esse recurso permitiu aos estudantes visualizarem e projetarem uma solução por meio dos registros figurais elaborados nas duas métricas. Reiterou-se, também, essa conclusão no indicado por Duval (2004) quanto ao que ocorre em Geometria no que diz respeito a dificuldades suscitadas nos estudantes em relação às operações de designação.

Acredita-se, além disso, que empregar um conceito em duas geometrias distintas não é nada fácil, uma vez que tomar consciência de certas rupturas e transferências entre uma ação e um enunciado matemático, como indicado por Duval (2004), é complexo para os estudantes, pois, em geral, alguns conceitos matemáticos são desenvolvidos por eles em um determinado contexto, sem deixar aberta a possibilidade de adequação deste mesmo em outro. No caso da Geometria Euclidiana isso é latente em vários contextos, como no caso de lugares geométricos em outros paradigmas. Por exemplo, uma reta na Geometria Elíptica é representada por uma circunferência em uma superfície esférica no espaço tridimensional, ou um arco de circunferência no Plano de Poincaré para a Geometria Hiperbólica.

Para Duval (2003), uma análise cognitiva de registros semióticos de uma atividade matemática é baseada na conversão entre dois registros, discursivos ou não, representantes de um mesmo objeto matemático. Dessa forma, entendeu-se que foi realizada, por aproximadamente 85% dos investigados, a conversão entre o registro figural e o discursivo (natural) do objeto circunferência em duas geometrias, isto é, a Euclidiana e a do Táxi, cumprindo com o objetivo da pesquisa. Além disso, responderam que a melhor geometria para a solução do problema proposto é a do Táxi.

Espera-se que o trabalho possa contribuir para estimular novas leituras a respeito de outras geometrias além da Euclidiana e que, dessa forma, possa proporcionar novas abordagens ao ensino de Geometria nos diversos níveis de escolaridade.

Referências

ARCAVI, A. The role of visual representation in the learning of mathematics. In: NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE PME, 1999. **Proceedings**… Disponível em: <http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf>. Acesso em: 30 set. 2008.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. v. 2.

D' AMORE, B. **Epistemologia e didática da matemática.** São Paulo, SP: Escrituras, 2005. 123 p. Coleção Ensaios Transversais; n. 31.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. **Handbook of Qualitative Research**. USA: Sage, 1994.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica.** Campinas, SP: Papirus, 2003. p. 11-33.

___________ **Semiosis y Pensamiento Humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali, Colômbia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogia, Grupo de Educación Matemática, 2004.

___________ Rupturas e Omissões entre Manipular, Ver, Dizer e Escrever: História de uma Sequência de Atividades em Geometria. **As contribuições da Teoria das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática**. BRANDT, C.F. e MORETTI, M.T. (org.). Ijuí: Editora da UNIJUI, 2014. p. 15-38.

FISCHBEIN, E. **Intuition in science and mathematics**: an educational approach. Dordrecht: Reidel, 1987.

KALEFF, A. M.; NASCIMENTO, R. S. Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi**. Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, n. 44, p. 11-42, dezembro 2004.

KALEFF, A. M. M. R. Formas, Padrões, Visualização e Ilusão de Ótica no Ensino da Geometria. **VIDYA**, v. 35, n. 2, p. 75-91, jul./dez., 2015 - Santa Maria, 2015.

KUZNIAK, A. L'Espace de Travail Mathématique et ses Génèses – **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, v. 16, p. 9–24. © 2011, IREM de STRASBOURG.

LEIVAS, J. C. P. A Aprendizagem de Noções Topológicas para Classificaçao de Quadriláteros na Licenciatura de Matemática. **Anais...** Reunião da ANPEDSUL, Itajai, SC., 2007.

___________ Organizando o Espaço Geométrico por Caminhos Topológicos. **VIDYA**, v. 28, n. 2, p. 59-71, jul/dez, 2008 - Santa Maria, 2008.

___________. **Imaginação, Intuição e Visualização:** a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. Tese doutorado em Educação – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009.

MELO, C. B. da; LEIVAS, J. C. P. Explorando o fractal Tetra Círculo: possibilidade para a introdução. **Anais...** XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México, 2015.

NACARATO, A. M.; LUVISON, C. da; CUSTÓDIO, I. A. Falar, Gesticular, Desenhar e Manipular...a produção de significações em conceitos geométricos. **VIDYA**, v. 35, n. 2, p. 1-18, jul./dez., 2015 - Santa Maria, 2015.

NASSER, L.; VIEIRA, E. R. Formação de Professores em Geometria: uma experiência no ciclo de alfabetização. **VIDYA**, v. 35, n. 2, p. 19-36, jul./dez., 2015 - Santa Maria, 2015.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança.** trad. [de] Bernandina Machado de Albuquerque. – Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

SILVA, E. S.; LEIVAS, J.C.P. Empregando intuição topológica no ensino de geometria na escola básica. **Anais...** - I CEMACYC, República Dominicana, 2013

SOUZA, H. M. **A Geometria do Táxi:** investigação sobre o ensino de uma geometria não euclidiana para o terceiro ano do ensino médio. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática – UFN), 2015, 140 p.

Recebido em 10/09/2018

Aceito em 16/11/2018

Sobre o autor

Professor Doutor atuando no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana de Santa Maria – RS. Licenciado em Matemática pela Universidade Católica de Pelotas, especialista em Análise Matemática pela Universidade Federal de Pelotas, Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina e Doutor em Educação (Matemática) pela Universidade Federal do Paraná. Professor Titular aposentado da Universidade Federal do Rio Grande, atualmente diretor regional da SBEMRS e editor da revista Vidya.