



## A TRANSIÇÃO DA MODELAGEM PARA MODELAÇÃO NO CONTEXTO DE ENSINO MÉDIO

---

**Fábio Henrique Barbosa**

Coordenador do Núcleo Pedagógico da Diretoria de Ensino de Sorocaba  
E-mail: <fabiohb@live.com>

**Paulo César Oliveira**

Universidade Federal de São Carlos  
E-mail: <paulooliveira@ufscar.br>

### Resumo

O conteúdo do artigo científico tem por objetivo apresentar a experiência de um aluno de licenciatura envolvido, por um lado, com a modelagem matemática e, por outro lado, com a modelação sob a perspectiva de uma proposta de ensino. O problema de pesquisa envolveu o tema descarte inadequado do óleo de cozinha e implicações ambientais. No que diz respeito à modelagem matemática apresentamos a análise de um dos experimentos realizados pelo primeiro autor. A modelação ficou por conta do planejamento de uma proposta de ensino pautada em conteúdos matemáticos previstos para a terceira série do Ensino Médio. Na transição entre a modelagem e a modelação, em termos de conteúdo escolar, estabelecemos conexões entre gráfico matemático e estatístico. O levantamento de dados e tratamento das informações tem como propósito a conscientização sobre a necessidade de adquirir o hábito de descartar e/ou reutilizar o óleo de cozinha de forma adequada.

**Palavras-chave:** Modelagem matemática; modelação matemática; proposta de ensino.

### THE TRANSITION FROM MODELING TO MODELING IN THE MIDDLE SCHOOL CONTEXT

#### Abstract

The content of the scientific article aims to present the experience of a undergraduate student involved, on the one hand, with mathematical modeling and, on the other hand, with modeling from the perspective of a teaching proposal. The research problem involved the issue of inadequate disposal of cooking oil and environmental implications. With regard to mathematical modeling we present the analysis of one of the experiments performed by the first author. The modeling was based on the planning of a teaching proposal based on mathematical contents predicted for the third grade of High School. In the transition between modeling and modeling, in terms of school content, we have established connections between mathematical and statistical graphs. Data collection and processing of information is intended to raise awareness about the need to get into the habit of disposing of and / or reusing cooking oil properly.

**Keywords:** Mathematical modeling; mathematical modeling; teaching proposal.

## LA TRANSICIÓN DEL MODELADO PARA MODELACIÓN EN EL CONTEXTO DE ENSEÑANZA MEDIO

### Resumen

El contenido del artículo científico tiene por objetivo presentar la experiencia de un alumno de licenciatura involucrado, por un lado, con el modelado matemático y, por otro lado, con la modelación bajo la perspectiva de una propuesta de enseñanza. El problema de investigación involucró el tema descarte inadecuado del aceite de cocina e implicaciones ambientales. En lo que se refiere al modelado matemático presentamos el análisis de uno de los experimentos realizados por el primer autor. La modelización se debe a la planificación de una propuesta de enseñanza pautada en contenidos matemáticos previstos para la tercera serie de la Enseñanza Media. En la transición entre el modelado y la modelación, en términos de contenido escolar, establecemos conexiones entre gráfico matemático y estadístico. El levantamiento de datos y tratamiento de las informaciones tiene como propósito la concientización sobre la necesidad de adquirir el hábito de descartar y / o reutilizar el aceite de cocina de forma adecuada.

**Palabras clave:** Modelado matemático; modelado matemático; propuesta de enseñanza.

### Introdução

O presente relato de pesquisa é uma extensão da comunicação científica aprovada para a oitava edição do Encontro Mineiro de Educação Matemática (VIII EMEM) sediada pelo Campus Pontal da Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Este texto contempla por um lado, aspectos relevantes da Iniciação Científica concluída, financiada e cujo relatório (processo: 2012/11205-0) foi aprovado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), desenvolvida pelo primeiro autor.

A Iniciação Científica baseou-se na utilização da Modelagem Matemática no estudo da poluição da água e da terra pelo descarte inapropriado de óleo de cozinha já utilizado.

Por outro lado, o trabalho de Iniciação Científica (IC), foi o ponto de partida para a realização do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) sob a orientação do segundo autor, cujo foco foi a modelação matemática desenvolvida via proposta de ensino. O TCC teve como objetivo apresentar o planejamento de uma proposta de ensino envolvendo o trabalho com variabilidade funcional e gráficos estatísticos, já que no contexto da educação pública paulista, o estudo desses conteúdos está previsto para o término da educação básica.

O relato de nossa pesquisa é uma justaposição do que foi desenvolvido na IC e no TCC com o objetivo de retratar o processo vivenciado pelo pesquisador no decorrer da Modelagem Matemática.

A análise de dados desse processo subsidiou o planejamento de uma modelagem aplicada ao ensino que, por conta do referencial teórico utilizado, denominamos de Modelação.

Estruturamos a redação deste texto basicamente em três partes. A primeira parte diz respeito à revisão bibliográfica, em especial, trabalhos relacionados à modelação. Na segunda parte dedicamos à descrição dos aspectos teóricos e metodológicos utilizados no processo de modelagem matemática. Na terceira parte, apresentamos a proposta de ensino e os aspectos teóricos e metodológicos que nortearam a modelação matemática.

### **Revisão bibliográfica**

O ponto de partida das leituras que embasou o desenvolvimento dessa pesquisa foi o Estado da Arte produzido por Soares (2017), a qual recorreu, em parte ao banco de teses e dissertações da Capes. Soares (2017) afirmou que não há um consenso quanto a definição de modelagem, porém, concepções semelhantes de Modelagem Matemática podem ser agrupadas de acordo com suas características.

Neste relato, de acordo com o objetivo da nossa pesquisa, reconhecemos e entendemos “a relevância de investigar os efeitos da modelagem nos processos de ensino e aprendizagem da matemática” (SOARES, 2017, p.46). Autores como Bonotto, Scheller, Biembengut (2014, p.1) concebem a modelação como “modelagem matemática na educação”. Isto implica que a modelação envolve ensinar os conteúdos curriculares e ao mesmo tempo ensinar o estudante a fazer pesquisa. Para o cumprimento deste propósito, o professor tem que vivenciar o processo de Modelagem e adaptá-lo para o ensino de matemática, ou seja, a modelação.

Na busca por literatura cujo foco foi a modelação, apresentamos aspectos da pesquisa de Selong (2014) e Bonotto, Scheller, Biembengut (2015).

Selong (2014) teve como objetivo em sua pesquisa realizar uma modelação matemática com quatro turmas de primeira série do Ensino Médio, envolvendo o tema Construção de Casas com aproximadamente 120 estudantes, no Colégio Notre Dame, Passo Fundo, Rio Grande do Sul, sendo a docente a autora do próprio artigo. A aplicação se desenvolveu durante os três trimestres letivos acontecendo uma parte em cada trimestre, na disciplina de Desenho Geométrico, que tem de um período semanal de 50 minutos, sempre com aulas à tarde.

O motivo da escolha do tema por Selong (2014), por um lado, deveu-se à aproximação dos conteúdos curriculares trabalhados na disciplina ministrada. Por outro lado, a escolha da professora foi motivada pela praticidade na forma de avaliação, pelo fato de serem muitos estudantes realizando o mesmo trabalho.

As atividades desenvolvidas em sala de aula foram realizadas de acordo com as três etapas de modelação, estabelecidas por Bonotto, Scheller, Biembengut (2014): (1<sup>a</sup>) percepção e apreensão, (2<sup>a</sup>)

compreensão e explicitação, (3<sup>a</sup>) significação e expressão. O objetivo, ao final da aplicação deste material didático, era que os estudantes criassem modelos de prédios (planta baixa e maquete) e que fizessem uma simulação da venda dos mesmos.

A avaliação de Soares (2014) ao término da primeira fase da modelação permitiu perceber qual era a bagagem de conhecimento de geometria dos seus estudantes sobre o tema de modelação, para conseguir então orientar a trabalho das outras duas fases.

Esse tipo de atividade assustou um pouco os estudantes, por ser algo livre, de criação deles, e a professora havia dito que naquele momento não teria certo ou errado.

No decorrer da segunda fase (compreensão e explicitação) a professora-autora utilizou a primeira planta baixa elaborada pelos estudantes e ensinou os elementos introdutórios da geometria: ponto, retas, posições de uma reta, classificações das posições de duas retas, identificando na planta baixa todos estes elementos. Foram realizados exercícios e solicitado que fizessem uma segunda versão da planta baixa, agora utilizando os conceitos estudados sobre retas paralelas e perpendiculares.

Na terceira etapa, os modelos de planta baixa e maquetes foram confeccionados e validados. Nesta etapa, os conceitos de geometria foram necessários para a elaboração dos modelos e para sua validação, além de outros conteúdos terem sido ensinados nesta etapa.

Na medida em que os estudantes foram aprendendo esses conceitos, foram elaborando os seus modelos de prédios, representado inicialmente pela planta baixa, depois pela maquete e, por fim, pelo folder que simulava a venda dos apartamentos deste prédio.

Em termos de conteúdos curriculares a última fase da modelação, segundo Selong (2014), demandou o estudo de quadriláteros, área de figuras plana, escala (transformação de unidades de medida de área), cálculo da quantidade de materiais para uma construção (tijolos, pisos e revestimentos) e sólidos geométricos:

O artigo de Bonotto, Scheller, Biembengut (2015) teve como objetivo relatar uma experiência desenvolvida com um grupo de professores de matemática, participantes de uma ação de formação continuada promovida por uma universidade pública do Rio Grande do Sul. Os encontros do grupo aconteceram mensalmente, com temáticas delineadas pelos participantes e mediadas, teoricamente, em sessões de estudo.

O episódio relatado pelas autoras refere-se às ideias de Modelagem Matemática que emergiram no grupo, por meio dos questionamentos dos professores, no decorrer da realização de uma atividade envolvendo a construção de triângulos com as peças do Tangram.

Percebeu-se que o desenvolvimento da atividade e os problemas apontados pelos professores possibilitaram reflexões sobre e para a prática docente, para a (re)elaboração de saberes e, paralelamente, para a vivência de uma experiência com Modelagem Matemática.

Bonotto, Scheller, Biembengut (2015) entenderam a Modelagem como um método de ensino com pesquisa, cujos procedimentos foram agrupados nas fases já descritas: percepção e apreensão, compreensão e explicitação, significação e expressão.

Na fase da percepção e apreensão o grupo de professores optou por estudar as potencialidades e limitações do material manipulável Tangram, devido a disponibilidade do mesmo na maioria das escolas de atuação dos docentes. Utilizaram-se o material para o estudo dos números racionais e seus diferentes significados, bem como para trabalhar a construção de figuras geométricas planas e o estudo de área e perímetro.

A compreensão e explicitação do tema pelos professores e que foi descrita nesse artigo, envolveu a sistematização de expressões algébricas para o cálculo do perímetro e a área em função da medida do lado do Tangram.

Como significação e expressão desse modelo matemático, os professores realizaram e analisaram a representação gráfica da função quadrática associada à expressão algébrica da área como forma de compreensão mais ampla do problema.

De acordo com Bonotto, Scheller, Biembengut (2015), a postura investigativa e reflexiva dos professores, ao envolver-se na atividade, possibilitou a ampliação de significados no tratamento do material manipulativo, promovendo a possibilidade de vislumbrar novas maneiras de sua exploração em sala de aula. No caso do conteúdo relatado, a possibilidade de explorar o conceito de função por meio da utilização do Tangram.

As leituras que realizamos foram relevantes para compreendermos e vivenciarmos o processo de transição da modelagem para a modelação. Porém, no caso de nosso relato de pesquisa a modelação descrita ocorreu no âmbito de uma proposta de ensino.

### **Pressupostos teórico-metodológicos da pesquisa**

O movimento pela Modelagem Matemática passa a ocorrer a partir da década de 1970, inclusive no Brasil. Em termos de práticas escolares, a Modelagem têm tido fortes influências teóricas da Matemática Aplicada, como forma de tratar a indagação “para que serve a matemática?”

Em termos de conceituação da Modelagem Matemática, adotamos para a Iniciação Científica Bassanezi (2002) que concebe-a como um processo que consiste em interpretar um objeto de estudo que pode ser uma situação ou tema do meio em que vivemos para uma linguagem matemática, denominada de Modelo Matemático.

Os modelos matemáticos podem envolver uma multiplicidade de representações matemáticas por meio de seus registros tais como: gráficos, tabelas, equações, sistemas de equações, entre outros.

Bassanezi (2002) ainda afirma que a modelagem nos permite realizar previsões e tendências e é eficiente a partir do momento que tomamos consciência de que estamos trabalhando sobre

representações de um sistema ou parte dele. Isto é, não estamos lidando com a situação real e sim com uma representação desta situação. Salienta ainda alguns pontos positivos da Modelagem Matemática como método de pesquisa. Para ele seu uso é possível, pois:

Pode estimular novas ideias e técnicas experimentais; Pode dar informações em diferentes aspectos dos inicialmente previstos; Pode ser um método para se fazer interpolações, extrapolações e previsões; Pode sugerir prioridades de aplicações de recursos e pesquisas e eventuais tomadas de decisão; Pode preencher lacunas onde existem falta de dados experimentais; Pode servir como recurso para melhor entendimento da realidade; Pode servir de linguagem universal para compreensão e entrosamento entre pesquisadores em diversas áreas do conhecimento. (BASSANEZI, 2002, pp. n.33-n.34)

Bonotto, Scheller, Biembengut (2014, p.4) complementam a visão de Bassanezi (2002) defendendo “a Modelagem como um método de ensino com pesquisa nas Ciências”. O processo de Modelagem realizado seguiu três fases não disjuntas descritas por estas autoras:

1) *percepção e apreensão* que envolve a percepção no reconhecimento da situação-problema e apreensão na familiarização com o assunto a ser modelado; 2) *compreensão e explicitação* que envolve a compreensão na formulação do problema, explicitação na formulação do modelo matemático e explicitação na resolução do problema a partir do modelo e 3) *significação e expressão* em que acontece a significação na interpretação da solução e validação do modelo e a expressão do processo e do resultado. (BONOTTO, SCHELLER, BIEMBENGUT, 2014, p.5)

A seguir detalhamos como estas fases foram concebidas em nossa pesquisa, a qual se constitui numa modalidade de ensaio teórico: “um estudo bem desenvolvido, formal, discursivo e concludente, consistindo numa exposição lógica e reflexiva e numa argumentação rigorosa com alto nível de interpretação e julgamento pessoal” (SEVERINO, 1996, p.120). É importante enfatizar que nosso trabalho não é puramente teórico e, sim, embasado na perspectiva teórica que apresentamos para fundamentar a prática de Modelagem matemática.

### **Primeira fase: Percepção e Apreensão**

A escolha do tema poluição da água e da terra pelo óleo foi motivada pela existência de um grupo de coleta de óleo de cozinha já utilizado na cidade de Sorocaba, região metropolitana do estado de São Paulo.

Trata-se de um grupo desenvolvido pela CEADDEC (Centro de Estudos e Apoio ao Desenvolvimento, Emprego e Cidadania) que tem sua sede nessa cidade e tem como objetivos centrais: a sensibilização da população sobre a necessidade e importância da destinação ambientalmente adequada do óleo residual de fritura, a promoção da coleta e da destinação final adequada do produto que poderá ser reaproveitado para a ração animal ou na produção de combustível biodegradável; o biodiesel.

Nesta fase realizamos estudos sobre as possíveis consequências do descarte inapropriado do óleo de cozinha já utilizado sobre o solo como também no meio aquático.

Uma revisão da literatura sobre esta temática foi imprescindível para o delineamento experimental da modelagem com o objetivo de compreender o impacto ambiental com o descarte inadequado do óleo, o qual envolveu a realização de dois experimentos:

- a) plantio de sementes de feijões a serem irrigados com "água" e diferentes misturas de "água e óleo";
- b) nível de oxigenação da água de cinco aquários, cada um deles contendo dois exemplares de plantas aquáticas (*Higrofila Stricta*) e preenchidos, um deles, apenas com água e os outros aquários com misturas de água e óleo.

### **Segunda fase: Compreensão e Explicitação**

Com base em Bonotto, Scheller, Biembengut (2014) esta fase compreende a formulação do problema e do modelo, em cada um dos experimentos. Por questões limitações do tamanho do texto, vamos abordar apenas o experimento envolvendo o plantio de sementes de feijões.

Para realização do experimento 'plantio de sementes de feijão' foi necessário os seguintes materiais: sementes de feijão, copos de café (50 ml), óleo de soja (usado), 5 garrafas pets de 500 ml e terra com adubo. Com o material disponível, fizemos o plantio das sementes em cinco amostras e diariamente submetidos à irrigação com água (1 amostra) e diferentes misturas de água e óleo para as demais amostras, a atividade experimental teve como problema de pesquisa analisar a influência da irrigação com concentrações distintas de óleo sobre o crescimento da planta.

Na residência do primeiro autor deste relato, escolheu-se o local mais adequado para dar início ao experimento, no qual foi preciso colocar ao menos três sementes de feijão em cada um dos cinco copinhos de café e cobri-las com terra e adubo.

Na sequência, enchemos quatro garrafas pets de 500 ml, com misturas de água e óleo com diferentes percentuais de concentração de óleo, ou seja, com 20%, 30%, 40% e 50% de 500ml (óleo de cozinha). A quinta garrafa pet foi preenchida apenas com água, ou seja, 500 ml.

Com os recipientes preparados, os cinco copos plásticos com as sementes de feijão plantadas foram regadas diariamente, apenas com água até seus brotos nascerem. Após isto ocorrer, cada copo será identificado através um número (1, 2, 3, 4 e 5), os quais passaram a ser irrigados com apenas "água" (copo 1), com "água e 20% de óleo" (copo 2), com "água e 30% de óleo" (copo 3), com "água e 40% de óleo" (copo 4) e, finalmente, com "água e 50% de óleo" (copo 5). Os pés de feijões foram medidos diariamente, com o auxílio de uma régua graduada, conforme tabela a seguir:

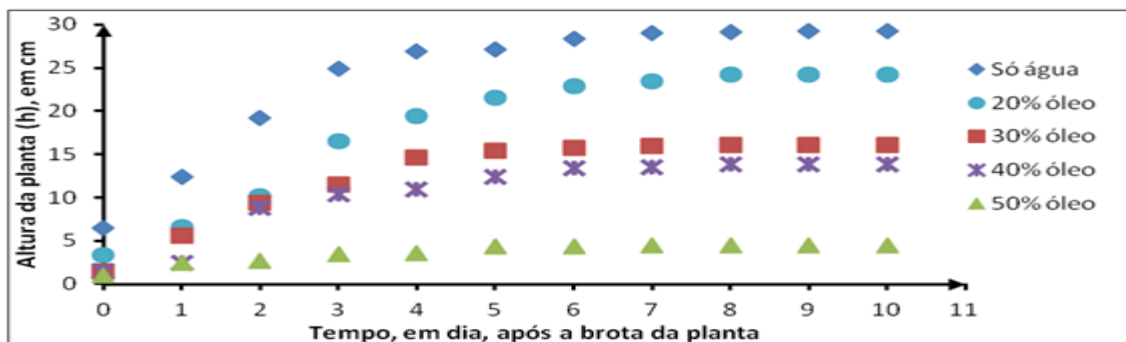
**Tabela 1:** Altura dos pés de feijão (cm) durante 10 dias

| Tempo | Feijão "1"<br>(só água) | Feijão "2"<br>(20% de óleo) | Feijão "3"<br>(30% de óleo) | Feijão "4" (40%<br>de óleo) | Feijão "5"<br>(50% de óleo) |
|-------|-------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 0     | 6,5                     | 3,4                         | 1,4                         | 1,5                         | 1                           |
| 1     | 12,4                    | 6,6                         | 5,6                         | 2,4                         | 2,5                         |
| 2     | 19,2                    | 10,1                        | 9,4                         | 8,8                         | 2,7                         |
| 3     | 24,9                    | 16,5                        | 11,5                        | 10,4                        | 3,5                         |
| 4     | 26,9                    | 19,4                        | 14,6                        | 10,9                        | 3,6                         |
| 5     | 27,1                    | 21,6                        | 15,4                        | 12,4                        | 4,4                         |
| 6     | 28,4                    | 22,9                        | 15,7                        | 13,4                        | 4,4                         |
| 7     | 29                      | 23,4                        | 16                          | 13,5                        | 4,5                         |
| 8     | 29,1                    | 24,2                        | 16,1                        | 13,8                        | 4,5                         |
| 9     | 29,3                    | 24,2                        | 16,1                        | 13,8                        | 4,5                         |
| 10    | 29,3                    | 24,2                        | 16,1                        | 13,8                        | 4,5                         |

**Fonte:** arquivo do pesquisador

As informações da tabela foram dispostas no ‘gráfico 1’ e a partir deste conjunto de informações avançamos para a formulação do modelo matemático.

**Gráfico 1:** Dados sobre o crescimento do feijão, sob cinco condições



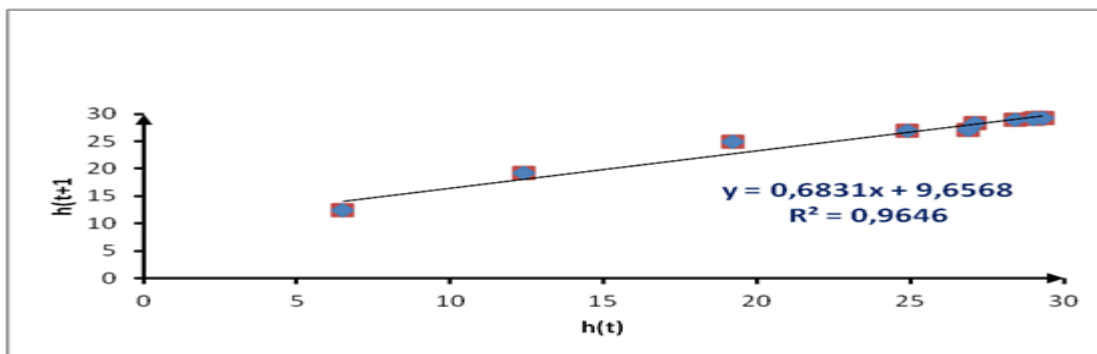
**Fonte:** arquivo do pesquisador

Com o objetivo de relatar como se deu o procedimento de determinação do Modelo Exponencial Assintótico para cada Pé de Feijão irrigado diferentemente, primeiro se buscou estabelecer o valor de estabilização para o crescimento do Pé de Feijão irrigado apenas com água, cujos pontos foram ajustados linearmente, conforme o ‘gráfico 2’.

Foi utilizado o método Ford-Walford, cuja finalidade “é determinar o valor para o qual uma solução irá se estabilizar, que chamaremos de valor de estabilização da solução” (NUNES, MELLO, 2017).



**Gráfico 2:** Cálculo do valor de estabilização ( $h^*$ ) da planta regada apenas com água



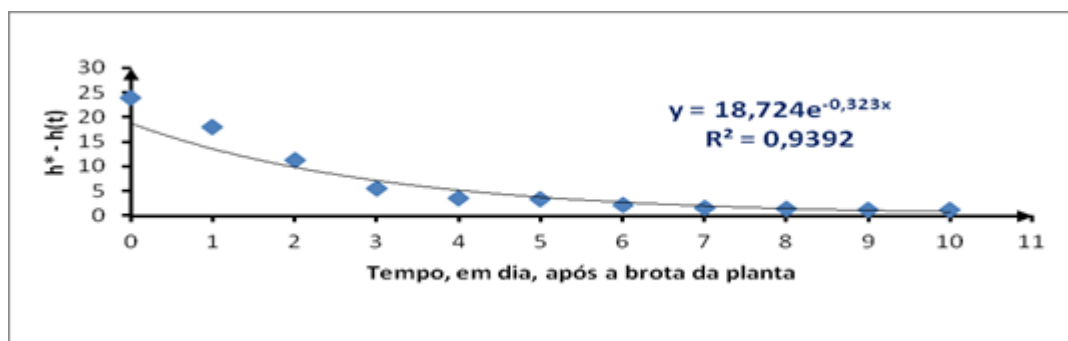
**Fonte:** arquivo do pesquisador

O coeficiente de determinação ( $R^2$ ) é uma medida de ajuste no modelo estatístico de regressão linear, o qual varia entre 0 e 1; indicando que quanto maior este valor, melhor ele se ajusta à amostra. Pelo método de Ford-Walford, o valor de estabilização do crescimento de uma planta ( $h^*$ ) é obtido resolvendo-se o sistema de equações lineares dado por  $h(t) = h(t+1)$  e a equação obtida do ajuste linear dos pontos do gráfico acima, ou seja,  $h(t) = 0,6831.t + 9,6568$ . Desse procedimento obtemos para o "Pé de Feijão irrigado apenas com água", o valor de estabilização de seu crescimento que é, aproximadamente,  $h^* \approx 30,5$  cm.

De posse do valor de  $h^*$ , o passo seguinte na determinação do Modelo Exponencial Assintótico é identificar a chamada Função Auxiliar que, neste caso, é uma função decrescente, na forma  $h(t) = a.e^{bt}$ .

A Função Auxiliar pode facilmente ser determinada via planilha Excel. Expomos a representação gráfica dos valores de ' $h^* - h(t)$ ' em função do tempo. Com o ajuste dos pontos através de uma função exponencial, geramos o 'gráfico 3'. A formulação da Função Auxiliar para o Modelo Exponencial Assintótico associado ao Pé de Feijão '1' é dado por:  $h(t) = 18,724 \cdot e^{(-0,323t)}$ .

**Gráfico 3:** Função auxiliar para o caso da irrigação apenas com água



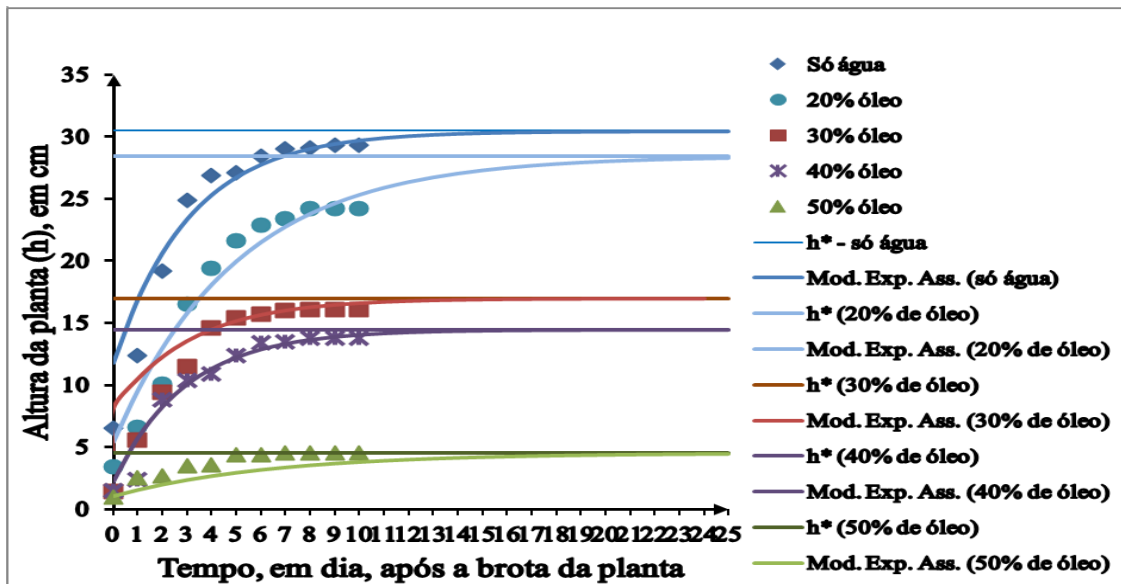
**Fonte:** arquivo do pesquisador

A lei da Função Auxiliar para o Modelo Exponencial Assintótico associado ao Pé de Feijão ‘1’ tem a formulação  $h(t) = 18,724 \cdot e^{(-0,323t)}$ . Portanto, o Modelo Exponencial Assintótico na forma  $h(t) = h^* - a \cdot e^{b \cdot t}$ , onde  $h^* > 0$  e  $b < 0$ , é dado por  $h(t) = 30,5 - 18,724 \cdot e^{(-0,323 \cdot t)}$ .

### Terceira fase: significação e expressão

Finalizando, temos o momento da interpretação da solução e a validação do modelo em questão. Traçando os gráficos do modelo exponencial assintótico obtido e da função auxiliar que representa o valor de estabilização do crescimento do ‘Pé de Feijão irrigado apenas com água’ obtemos:

**Gráfico 4:** Modelo exponencial assintótico para os cinco casos de irrigação



Fonte: arquivo do pesquisador

Observando os dados reais e o Modelo obtido para o Pé de Feijão ‘1’ no gráfico ‘4’, podemos afirmar que o modelo construído é adequado, pois seu erro é aproximadamente 6% ( $R^2=0,9392$  na Função Auxiliar). Com relação aos demais pés de feijão, observamos que o comportamento do Modelo Exponencial Assintótico obtido se adequa de forma similar, em comparação ao primeiro pé de feijão.

Após ter realizado a Modelagem e descrito o modelo exponencial para o crescimento dos pés de feijão, levando em conta a interferência maléfica da irrigação com porcentagens distintas e crescentes de óleo, a etapa subsequente é a transição da modelagem para a modelação, a partir da temática escolhida e do processo de Modelagem desenvolvido.

Na sequência apresentamos as mesmas fases da Modelação, a partir do que foi descrito para a Modelagem Matemática a partir da análise de dados que o pesquisador fez desse processo vivenciado.

### **Processo de modelação: uma proposta de ensino**

Com base em Bonotto, Scheller, Biembengut (2014, p.4), a “Modelação orienta-se pelo ensino do conteúdo curricular (e não curricular) a partir da reelaboração de modelos aplicados em alguma área do conhecimento e pela orientação dos alunos à pesquisa”. Esta sequência foi planejada envolvendo o tema descarte do óleo de cozinha e suas implicações ambientais, bem como as fases não-disjuntas descritas Bonotto, Scheller, Biembengut (2014): 1) percepção e apreensão; 2) compreensão e explicitação e 3) significação e expressão.

### **Primeira fase: Percepção e Apreensão**

A partir da escolha do tema que, nesse caso é sugerido pelo professor, busca-se a familiarização e interação com o assunto a ser modelado. Partindo do pressuposto de que a condição para o professor implementar a Modelação em sala de aula é ter vivenciado o processo de Modelagem Matemática, uma sugestão inicial para o desenvolvimento do trabalho é um relato expositivo do processo vivenciado pelo próprio docente.

Sugerimos na sequência que os alunos trabalhem em pequenos grupos, para obter informações referentes ao descarte do óleo de cozinha utilizado. O professor pode orientar os estudantes nessa fase de interação com o tema cedendo textos ou mídias digitais para estudos, tal como o texto de Costa, Lopes, Lopes (2015) utilizados em nossa pesquisa para o planejamento da proposta de ensino.

Para socializarmos a compreensão sobre o tema de pesquisa levando em conta o bairro e o município para um dado contexto escolar, propomos inserir questões norteadoras a serem abordadas em assembleia com os estudantes envolvidos:

- a) Na sua casa como é feito o descarte do óleo de cozinha utilizado?
- b) O óleo de cozinha usado pode servir como matéria-prima na fabricação de diversos produtos. Que benefícios o descarte adequado trazer á sociedade?
- c) Você sabe da existência da coleta seletiva para este tipo de material no seu bairro ou município? Em caso positivo, como é feito a divulgação do projeto? Você conhece famílias que participam desta ação ambiental?

## Segunda fase: Compreensão e Explicitação

Para esta etapa propomos disponibilizar aos seus estudantes os dados obtidos no processo de Modelagem e disponibilizados na ‘tabela 1’. A fim de proporcionar compreensão dos dados obtidos, a representação gráfica e algébrica via taxa de variação, propomos as seguintes tarefas:

- Considerando o tempo que varia do broto da planta até o décimo dia, compare os cinco pés de feijão irrigados com concentrações distintas de água e óleo, descreva o que ocorreu com a estatura das plantas no referido período.
- Calcule a taxa de variação da estatura de cada pé de feijão em relação aos dias expostos na ‘tabela 1’.
- Faça a representação gráfica para as taxas de variação de crescimento de cada um dos pés de feijão. Sugiro utilizar primeiramente o lápis e papel para localizar os pontos na malha quadriculada, a partir da designação dos eixos coordenados e das variáveis em questão. Na sequência utilize a planilha Excel ou um software livre como o GeoGebra para plotar os mesmos pares ordenados obtidos na malha quadriculada. Compare as duas formas utilizadas na representação gráfica e descreva suas observações.
- O que acontece com a taxa de variação da estatura em relação ao tempo? Escreva suas observações levando em conta o que significa a taxa de variação ser crescente, decrescente ou nula?

Essas quatro questões que propomos como sugestões em nossa pesquisa foram norteadas pela habilidade compreender o significado de taxa de variação no tratamento de conteúdos envolvendo o conceito de função, conforme quadro a seguir:

### Quadro 1: Conteúdos e Habilidades (3ª série do Ensino Médio)

| 3ª série do Ensino Médio |   |  |
|--------------------------|---|--|
|                          | Conteúdos   | Habilidades  |
| 3º. Bimestre             | Estudo das funções <ul style="list-style-type: none"> <li>• Qualidades das funções</li> <li>• Gráficos: funções trigonométricas, exponencial, logarítmica e polinomiais</li> <li>• Gráficos: análise de sinal, crescimento e taxa de variação</li> <li>• Composição: translações e reflexões</li> <li>• Inversão</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Saber usar de modo sistemático as funções para caracterizar relações de interdependência, reconhecendo as funções de 1º- e de 2º- graus, seno, cosseno, tangente, exponencial e logarítmica, com suas propriedades características</li> <li>• Saber construir gráficos de funções por meio de transformações em funções mais simples (translações horizontais, verticais, simetrias, inversões)</li> <li>• Compreender o significado da taxa de variação unitária (variação de <math>f(x)</math> por unidade a mais de <math>x</math>), utilizando-a para caracterizar o crescimento, o decrescimento e a concavidade de gráficos</li> <li>• Conhecer o significado, em diferentes contextos, do crescimento e do decrescimento exponencial, incluindo-se os que se expressam por meio de funções de base <math>e</math></li> </ul> |

Fonte: São Paulo (2012, p.70).

### Terceira fase: significação e expressão

Nesta fase, procura-se validar o modelo obtido. No nosso caso, se a análise da taxa de variação no crescimento dos pés de feijão é influenciada diretamente pela concentração de óleo utilizada na irrigação. A relação estabelecida nessa análise propicia observar quantitativamente o impacto maléfico das concentrações de óleo de cozinha utilizada na irrigação com água na planta utilizada no experimento da Modelagem Matemática.

No decorrer do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), concordamos com uma afirmação feita por Bonotto, Scheller, Biembengut (2014, p.14) em seu artigo: “percebe-se que durante o processo de modelagem e Modelação, à medida que acontece a interação com o tema, surgem outras questões que podem ser estudadas”.

No nosso caso, o Currículo do Estado de São Paulo prescreve em sua grade curricular de matemática, no quarto bimestre da terceira série do Ensino Médio, o estudo de gráficos, entre outros conteúdos da Estatística, sistematizados no quadro a seguir:

#### Quadro 2: Conteúdos e Habilidades (3ª série do Ensino Médio)

| 3ª série do Ensino Médio |  |   |
|--------------------------|--|---|
|                          | Conteúdos  | Habilidades   |
| 4º. Bimestre             | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Gráficos estatísticos: cálculo e interpretação de índices estatísticos.</li> <li>• Medidas de tendência central: média, mediana e moda.</li> <li>• Medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Saber construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências a partir de dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas.</li> <li>• Saber calcular e interpretar medidas de tendência central de uma distribuição de dados: media, mediana e moda.</li> <li>• Saber calcular e interpretar medidas de dispersão de uma distribuição de dados: desvio padrão.</li> <li>• Saber analisar e interpretar índices estatísticos de diferentes tipos.</li> </ul> |

Fonte: São Paulo (2012, p.70)

As habilidades descritas nesse quadro, em sua maioria, priorizam os cálculos estatísticos em detrimento ao desenvolvimento de opiniões e crítica sobre os dados apresentados e de que forma eles são obtidos. Por outro lado, na transição dos conteúdos propostos do 3º bimestre para o 4º bimestre, não há indícios de abordagem sobre o que diferencia um gráfico matemático de um gráfico estatístico. Em termos curriculares, este período letivo é fértil para esta abordagem. Apoiamos em Cazorla (2002, p.45) que esclarece

Os gráficos estatísticos diferem dos gráficos das funções matemáticas. Enquanto as funções matemáticas e seus respectivos gráficos modelam funções determinísticas, do tipo  $Y = F(X)$ , ou seja, dado um valor para X pode-se conhecer exatamente o valor de Y. Ao contrário, os gráficos estatísticos modelam funções não determinísticas, do tipo  $Y = F(X) + \epsilon$ , onde  $\epsilon$  representa o erro aleatório e é formado pelo componente aleatório, devido ao processo de amostragem; pelo erro explicado pela ausência de variáveis que podem estar interferindo no comportamento da primeira e pelos erros de medida dos instrumentos.

O objetivo principal do gráfico estatístico, segundo Cazorla (2002), é comunicar ao leitor sobre um conjunto de dados de uma maneira mais eficiente, pois para transmitir a quantidade de informações que um gráfico apresenta seria necessário um texto muito grande. Assim, o gráfico “é a forma mais efetiva de descrever, explorar e resumir um conjunto de dados” (CAZORLA, 2002, p.47). De acordo com a referida autora, “um bom gráfico tem como uma de suas características fazer com que a mensagem que visa transmitir seja rapidamente aprendida, mas isso não é o bastante: a mensagem precisa se retida na memória” (CAZORLA, 2002, p.53).

Em nossa proposta de ensino, consideramos profícuo aprofundar o tema ‘descarte do óleo de cozinha’ via projeto de ensino, o qual inclui a representação gráfica estatística como um dos dispositivos de comunicação das informações produzidas. Inicialmente, sugerimos para o professor que pretende conhecer os pontos fortes e fracos em trabalhar com a metodologia de projetos de ensino, especificamente de estatística, a leitura e reflexão do texto de Carvalho (2009).

Se partir do pressuposto que estudantes submetidos à familiarização e compreensão da Modelagem e Modelação descrita até aqui, potencialmente estão envolvidos com o tema em questão. Isto é importante, pois segundo Carvalho (2009, p.86), “temos sido levados a defender que, se o problema a ser tratado estatisticamente ou o tema do projeto não forem realmente do aluno, ele estará desenvolvendo uma tarefa cujo sentido é exclusivamente escolar”.

O objetivo para concretizar a realização desse projeto de ensino é propor uma pesquisa estatística, a qual implica na participação dos alunos em todo o processo de tratamento dos dados coletados na amostra, partindo da construção da questão de investigação; passando pela forma e coleta de dados; tabulação e representação dos dados, sua interpretação e resultados e, por fim, a comunicação sobre todas as fases da atividade de investigação.

## **Conclusão**

Produzimos um texto que vinculou o percurso vivenciado na transição da Modelagem para a Modelação Matemática, envolvendo dois momentos justapostos da formação inicial do primeiro autor: a IC e o TCC.

Em termos curriculares, mais especificamente a matemática da terceira série do Ensino Médio, trouxemos possibilidades pedagógicas de produzir significados para o estudo de taxa de variação em função, cuja abordagem já é feita na primeira série deste segmento escolar. No que diz respeito ao trabalho com gráfico, é comum a mudança do estudo matemático para o estatístico sem o tratamento adequado desses objetos que possuem naturezas distintas. Para contornar essa situação, oferecemos orientações via projeto de ensino, como metodologia alternativa de trabalho docente para o estudo de diferentes representações gráficas com características próprias.

Em termos de pesquisa em modelagem matemática buscamos mostrar o quão é importante o pesquisador analisar os dados obtidos nesse processo para que seja possível viabilizar uma proposta de ensino de modelagem aplicada ao ensino (modelação). Por conta do cenário escolhido para a produção deste texto não apresentamos o ambiente de aprendizagem do aluno frente à modelação. Porém, em termos de pesquisa, a produção de dados frente ao ambiente de aprendizagem demanda análise dos mesmos, a qual poderá potencializar a revisão da modelagem matemática a partir da relação professor-aluno-conteúdo.

## Referências

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BONOTTO, Danusa de Lara; SCHELLER, Morgana; BIEMBENGUT, Maria Salett. A pulverização do Girassol: o processo de modelagem e modelação. **Anais do VI Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática**, 2014, Curitiba, 2014, 18p.

\_\_\_\_\_. Professores de Matemática em Ação: Ideias de Modelagem Matemática a Partir do Tangram. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 46, p. 82-91, 2015.

CARVALHO, Dione Luchesi. Trabalho com projetos no ensino e na aprendizagem de estatística: benefícios, problemas, limitações... **Educação Matemática em Revista**, Porto Alegre, ano 10, v.1, n.10, pp.83-93, 2009.

CAZORLA, Irene Mauricio. **A relação entre a habilidade viso-pictórica e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos**. 2002. 315p. Tese (Doutorado em Educação). Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2002.

COSTA, Daniela Alves da; LOPES, Gilmeire Rulim; LOPES, José Roberto. Reutilização do óleo de fritura como uma alternativa de amenizar a poluição do solo. **Revista Monografias Ambientais**, Santa Maria, v.14, pp.243-253, 2015.

NUNES, Carla de Azevedo Paes; MELLO, Maria Hermínia de Paula Leite. Método de Ford-Walford aplicado ao modelo generalizado de Von Bertalanffy. **Cadernos do IME – Série Matemática**, São Paulo, n. 11, pp. 24-34, 2017.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias – Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio**. Coordenação de área: Nilson José Machado. 1ª ed. atual. São Paulo, SEE, 2012. 72p.

SELONG, Lisiane Milan. Modelação matemática no ensino médio: elaboração de planta baixa e construção da maquete. **Anais do V Jornada Nacional de Educação Matemática**, 2014, Passo Fundo, 2014, 10p.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. 20. ed. 1996. São Paulo: Cortez, 1996. 272p.

SOARES, Maria Rosana. **Um estado da arte das pesquisas acadêmicas sobre modelagem em educação matemática (de 1979 a 2015) nas áreas de educação e de ensino da Capes**: as dimensões

fundamentadas e as direções históricas. Tese (Doutorado em educação matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2017.

**Recebido em 24/07/2018**

**Aceito em 16/11/2018**

### **Sobre os autores**

#### **Fábio Henrique Barbosa**

Professor Coordenador do Núcleo Pedagógico (PCNP) da Diretoria de Ensino do município de Sorocaba - SP.

#### **Paulo César Oliveira**

Professor associado na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) e docente no curso de Licenciatura em Matemática no campus de Sorocaba.