



NÚMEROS IRRACIONAIS NA ESCOLARIDADE BÁSICA: UM OLHAR PELO VIÉS DOS EIXOS CONSTITUTIVOS DOS NÚMEROS REAIS

Wagner Marcelo Pommer

Universidade Federal de São Paulo- DCET

E-mail: <wagner.pommer@unifesp.br>.

Resumo

Na escolaridade básica, a abordagem dos números irracionais se baseia em um desenvolvimento operatório envolvendo aspectos exatos, finitos e determinísticos. O objetivo deste texto foi discutir aportes teóricos que permitam fundamentar propostas de ensino dos números irracionais na escolaridade básica. Neste mote, situamos que os pares discreto&contínuo; exato&aproximado; finito&infinito, eixos constitutivos extraídos da análise da evolução histórica e epistemológica dos números reais, propostos inicialmente em Machado (2009) e desenvolvidos em Pommer (2012), se constituem em referenciais teóricos para fundamentar uma abordagem problematizadora dos números irracionais. A exploração da polarização inerente a cada eixo e também internamente aos mesmos possibilita compor um mapa com vários caminhos para se trabalhar os números irracionais na escolaridade básica.

Palavras-chave: Números Irracionais; Eixos Constitutivos; Números Reais.

IRRATIONAL NUMBERS ON BASIC SCHOOL: A VIEW THROUGH REAL NUMBERS AXES CONSTITUENTS

Abstract

At basic education, the approach of irrational numbers is based upon operational development involving exact, finite and deterministic aspects. The aim of this paper was to discuss theoretical elements that allow to access teaching proposals involving irrational numbers at basic school. In this way, we situated that pairs discrete&continuous, exact&approximate, finite&infinite pairs, axes constituents extracted from analyses on real numbers historical and epistemological evolution, proposed initially at Machado (2009) and developed at Pommer (2012), constitute a theoretical pillar to ground a problematizing approach to irrational numbers. The exploration of the polarization inherent to each axis and also internally between them allows to compose a map with several paths to work the irrational numbers at basic education.

Keywords: Irrational numbers; Axes Constituents; Real Numbers.

NÚMEROS IRRACIONAIS EN LA ESCOLARIDAD BÁSICA: UNA MIRADA POR EL VIÉS DE LOS EJES CONSTITUTIVOS DE LOS NÚMEROS REALES

Resumen

En la escolaridad básica, el abordaje de los números irracionales se basa en un desarrollo operatorio que involucra aspectos exactos, finitos y determinados. El objetivo de este texto fue discutir aportes teóricos que permitan fundamentar propuestas de enseñanza de los números irracionales en la escolaridad básica. En este mote, situamos que los pares discreto y continuo; exacto y aproximado; finito e infinito, ejes constitutivos extraídos del análisis de la evolución histórica y epistemológica de los números reales, propuestos inicialmente en Machado (2009) y desarrollados en Pommer (2012), se constituyen en referencias teóricas para fundamentar un abordaje problematizada de los números irracionales. La exploración de la polarización inherente a cada eje y también internamente a los mismos posibilita componer un mapa con varios caminos para trabajar los números irracionales en la escolaridad básica.

Palabras clave: Números irracionales; Ejes constitutivos; Números reales.

Introdução

Na escolaridade básica o tema dos números se inicia por meio de uma abordagem ligada ao pragmático, apresentando este objeto matemático como um ente oriundo de registros pictóricos rudimentares, realizados pelos seres humanos em materiais como pedras ou ossos. A partir daí, os processos de contagem e medida evoluíram para a constituição dos algarismos e dos sistemas posicionais, configurando os números como elementos que obedecem a certas leis de combinação, de maneira pré-determinada e previsível, em processos operatórios característicos e próprios da Matemática Elementar.

Neste mote, o ensino atual optou pelo desenvolvimento dos números com ênfase em aspectos operatórios, exatos, determinísticos e finitos. Porém, esta tendência encobriu aspectos importantes e significativos envolvendo a epistemologia dos números reais.

Em particular, um importante documento, os PCN, descrito em Brasil (1998), afirmam que o trabalho com os números irracionais no ciclo básico é extremamente simplificado, usualmente centrado em cálculos operatórios com radicais (as raízes enésimas irracionais) e no número π .

Para compreender o contexto relacionado aos números irracionais, no ensino básico, é fundamental retomar alguns aspectos ocorridos no desenvolvimento histórico. Ao longo do percurso histórico o desenvolvimento dos números inteiros, racionais, irracionais e reais não foi construído de modo linear. O estudo histórico envolvendo o conhecimento matemático revela interconexões entre os conjuntos numéricos, permeadas pelas atividades comerciais e tributárias, assim como por atividades de natureza teórica¹ dos antigos povos.

¹ O termo que provém do grego *theoría*, que para este povo denotava o ato de contemplar, examinar, estudar ou depurar, de modo especulativo pela mente, contrapondo-se ao conhecimento empírico proveniente da observação e manipulação de objetos da realidade sensorial.

Os relatos de Boyer (1991) apontam que alguns números irracionais, como o PI, eram conhecidos por alguns povos antigos de modo implícito, impreciso e vago, vinculados ao empírico. Em contraposição, situado em um pólo teórico, o antigo povo grego relutou em aceitar que a relação entre a diagonal e o lado de um quadrado unitário poderia representar um número irracional, possibilidade que em um período bem posterior foi representada pelo símbolo $\sqrt{2}$.

Schrubring (2005) relembra que até o século XVIII os números irracionais permaneciam incompreendidos no corpo do desenvolvimento da Matemática. As dificuldades surgidas para compreender e sistematizar os números irracionais no percurso histórico se estendeu para o campo do ensino até os dias de hoje.

Em face disso, torna-se necessário compreender a natureza teórica dos números irracionais e como esta pode ser abordada no ensino básico. Para Chevallard (1999), o saber, elemento mediador do processo de ensino e aprendizagem², pode ser repensado na instituição escolar por meio do processo conhecido como transposição didática³.

Neste ponto, temos por hipótese que o estudo dos aspectos epistemológicos presentes nos números reais serve de apoio para embasar uma abordagem didática dos irracionais, no campo da Educação Matemática. Deste modo, o presente texto se propôs a discutir aportes teóricos que permitam fundamentar propostas de ensino dos números irracionais na escolaridade básica.

Fundamentação Teórica

O tema dos números se reafirmou com o ENEM, Brasil (2009). Nos eixos cognitivos, a primeira competência para a área de Matemática e Tecnologias explicita a competência: “Construir significado para os números naturais, inteiros, racionais e reais” (BRASIL, 2009, p. 5). E diante desta prerrogativa surge a inquietação: como se situa o ensino dos números irracionais na escolaridade básica?

De acordo com os PCN, expostos em Brasil (1997), nos anos finais do ensino fundamental o trabalho dos números irracionais tem se limitado, quase que exclusivamente, ao cálculo com radicais. O trabalho com este tema, apesar de ter espaço no currículo do quarto ciclo, “[...] pouco tem contribuído para que os alunos desenvolvam seu conceito” (BRASIL, 1998, p. 102).

O referido documento aponta que uma das dificuldades de trabalho com os números irracionais se manifesta pela falta de modelos materiais, pois o tema remete a uma ideia não intuitiva

² Para os autores, o sistema de ensino pode ser modelado pelo sistema didático *stricto sensu*, onde as interações entre professor e alunos, os elementos humanos, são mediadas pelo saber, elemento não-humano.

³ Segundo Chevallard (1999), transposição didática é o conjunto das transformações que sofre um saber científico, para se constituir em objeto de ensino compreensível ao aprendiz.

para os alunos. Ainda, se destaca que é “[...] inadequado um tratamento formal do conceito de número irracional no quarto ciclo” (BRASIL, 1998, p. 102).

Apesar desta recomendação, Ripoll (2004) aponta que os livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental introduzem os números irracionais por meio de uma das seguintes definições: $I_1 = \{x/ x \text{ não é da forma } a/b, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ ⁴; $I_2 = \{x/ x \text{ é um número decimal infinito que não é dízima periódica}\}$.

Ripoll (2004) coloca que a apresentação dos manuais escolares que seguem a definição I_1 pressupõe a existência de outros números além dos números racionais. Esta posição é incoerente, pois o que se almeja é ampliar o conjunto dos números e não reduzir o entendimento dos irracionais, definindo-o pela negação dos números racionais.

No que concerne ao que é uma boa definição, Malba Tahan (1965) sintetiza alguns pontos importantes, discutindo as características por gênero e diferença.

- Uma definição deve estar em relação apenas com o objeto que define, servindo como elemento de simplificação da linguagem.
- Uma definição deve ser clara e concisa (deve eliminar ambigüidades);
- Uma definição não pode recorrer àquilo que pretende definir e as coisas às quais recorrer devem já ser conhecidas ou aceitas sem definição;
- A definição não deve ser negativa quando pode ser afirmativa (apud VIANNA; CURY, 2001, p. 9).

Situado no referencial de Malba Tahan (1965 apud Vianna e Cury, 2001), a questão que deveria ser colocada é: como os livros podem definir os irracionais a partir dos números reais, posto que este último ainda não tenha sido introduzido? Por que colocar uma definição no modo negativo? Em síntese, os manuais escolares situam um tipo de definição circular, como ocorre nos dicionários de língua natural, meio que não é apropriado para definir termos na área de Matemática.

Para Vianna e Cury (2001), a área da Matemática requer uma definição que não seja ambígua, mas que deve decorrer de noções primitivas ou axiomas, numa lógica de construção linear e sequencial, por meio de sucessivas deduções. Porém, a definição I_1 não se caracteriza neste tipo de construção do conhecimento matemático.

Quanto a definição I_2 , ao abordar somente alguns poucos exemplos de dízimas periódicas que representam números racionais, os manuais escolares criam um obstáculo didático⁵, pois é difícil se estabelecer quando uma dízima será não periódica sem se referir aos números irracionais.

Copi (1973 apud Vianna e Cury, 2001) aponta que definir algo envolve haver um conhecimento prévio, para poder escolher gêneros próximos e, posteriormente, apontar as diferenças. Esta observação dos autores reforça que, didaticamente, em alguns temas, não se deveria começar a

⁴ Há uma variação mais comum de I_1 : números irracionais são os números reais que não podem ser colocados na forma de uma fração de números inteiros.

⁵ Segundo Brousseau (1986) o obstáculo didático é relativo às escolhas realizadas por um Sistema Educativo, o que implica na formação de conhecimentos errôneos ou incompletos que prejudicam a aprendizagem.

trabalhar um conceito mediante a sua definição, como ocorre usualmente no tratamento dos números naturais, inteiros e racionais pelos livros didáticos. Então, por que, em se tratando dos números irracionais, devemos começar a trabalhá-los por meio da definição?

A introdução dos números irracionais na escolaridade básica requer princípios. Neste sentido, os “[...] números irracionais são parte de um sistema e ficam incompletos sem a conceituação dos números reais” (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995, p. 30).

A apresentação dos irracionais, um assunto teórico, na escolaridade básica, é um dos temas importantes que as escolas adiam, tomando como base a crença de que são difíceis demais. Bruner (1987) já alertava sobre esta posição, ponderando que aprender requer adquirir uma ideia geral, que pode depois ser desenvolvida em situações subseqüentes.

Os fundamentos de qualquer assunto podem, de alguma forma, ser ensinados a quem quer que seja, em qualquer idade. Embora essa proposição possa parecer de início surpreendente, sua intenção é sublinhar um ponto essencial: [...] as idéias básicas que se encontram no âmago de todas as ciências e da matemática, e os temas básicos que dão forma à vida e à literatura, são tão simples quanto poderosos. Ter essas idéias básicas ao seu dispor, e usá-las eficientemente, exige constante aprofundamento da compreensão que delas se tem, o que se pode conseguir aprendendo a utilizá-las em formas progressivamente mais complexas (BRUNER, 1987, p. 11-12).

O referido autor entende ideia fundamental como aquela que possui ampla aplicabilidade, favorece a compreensão da disciplina, viabilizando a construção do conhecimento por níveis ou patamares, o que permite diminuir a distância entre o conhecimento avançado e o elementar. Bruner (1987) apontava a falácia do ensino por meio da “[...] apresentação de explicações formais, baseada numa lógica muito distante da maneira de pensar da criança e, para ela, estéril em suas implicações. Muito do ensino da Matemática é dessa espécie” (BRUNER, 1987, p. 36).

Outra importante contribuição advém dos Parâmetros Curriculares Nacionais, conforme descrito em Brasil (1998), ao destacar que o desenvolvimento do conhecimento matemático ocorreu por meio de várias formas. O documento argumenta que uma análise de fontes da história revela que a Matemática se desenvolveu “[...] mediante um processo conflitivo entre muitos elementos contratantes: o concreto e o abstrato, o particular e o geral, o formal e o informal, o finito e o infinito, o discreto e o contínuo⁶. Curioso notar que tais conflitos encontram-se também no âmbito do ensino dessa disciplina” (BRASIL, 1997, p. 24).

O referido documento propõe o ensino de Matemática em quatro blocos ou eixos temáticos: números&operações; espaço&forma; grandezas&medidas; tratamento da informação. Porém, não há referencias em como efetivar os diálogos entre estes blocos.

⁶ Na Matemática, uma grandeza é discreta quando remete a operação de contagem, o que recai no universo dos números inteiros. Em oposição, uma grandeza é contínua quando for passível de ser medida, o que recai no universo dos números racionais (Caraça, 1970).

Com relação aos números, os PCN, descrito em Brasil (1997), apontam que, nos anos finais do Ensino Fundamental, este tema deveria ser explorado em um movimento duplo: o viés instrumental aliado a resolução de problemas; como objeto de estudo em si mesmo, considerando as propriedades, as inter-relações entre os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Alguns princípios norteadores envolvendo o tema dos números irracionais foram apresentados nos livros *As Idéias Fundamentais da Matemática*, de Amoroso Costa (1981), cuja primeira edição remonta a 1929, e na obra *Conceitos Fundamentais da Matemática*, de Bento de Jesus Caraça (1970), com primeira edição de 1944.

Destacamos em ambos os autores a necessária discussão dos aspectos de contagem e medida, assim como das influências do infinito como ideias ou conceitos fundamentais para serem inclusas na problemática do ensino dos números irracionais na Matemática Elementar. Porém, os autores não se centraram em discutir os irracionais tomando como fonte a polaridade e tensão própria inerente a estes assuntos.

Diante destes aportes, situamos nossa hipótese ponderando que os pares discreto&contínuo; exato&aproximado; finito&infinito, presentes na análise da evolução epistemológica dos números reais, descritos em Machado (2009) e desenvolvidos em Pommer (2012), constituem-se em referenciais teóricos para fundamentar uma abordagem problematizadora dos números irracionais na escolaridade básica.

O eixo discreto&contínuo

O primeiro tratamento dos números irracionais surgiu na Grécia antiga, num momento que os historiadores do século XX denominaram de ‘Crise dos Incomensuráveis’. A denominação ‘Crise dos Incomensuráveis’ se situa mais como “[...] uma criação historiográfica do que como um relato fidedigno” (GONÇALVES; POSSANI, 2010, p. 21).

A escola pitagórica, em cerca de 400 a.C, percebeu a questão da incomensurabilidade, observando que a razão entre a medida da diagonal e a medida do lado do quadrado não poderia ser expressa por meio de uma razão de números inteiros. Na filosofia pitagórica, a hipotenusa era tida como “[...] indenominável pelos números, inexprimível com seu auxílio; a-logon, sem relação, sem palavra, diziam os gregos. Todo número [inteiro] poderia ser expresso por um comprimento, mas existiam comprimentos que não correspondiam a nenhum número. (KARLSON, 1961, p. 104).

Karlson (1961) nos revela que a crença na divindade dos números inteiros pela filosofia grega se conflitou com a constatação racional da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado do quadrado, de modo a que nunca “[...] o irracional teve na Grécia o valor de um número, e os gregos não possuíam símbolo para esta espécie de grandeza” (KARLSON, 1961, p. 104).

A cultura pitagórica confinou os números irracionais à representação geométrica: a relação entre a diagonal e o lado do quadrado não deveria ser expressa por um número, mas por meio de

elementos geométricos. Bekken (1994) retrata um trecho dos *Diálogos*, de Platão, onde Sócrates desenhou um quadrado de lado dois (figura 1a) e pede ao escravo de Menon que lhe mostre um quadrado com o dobro da área.

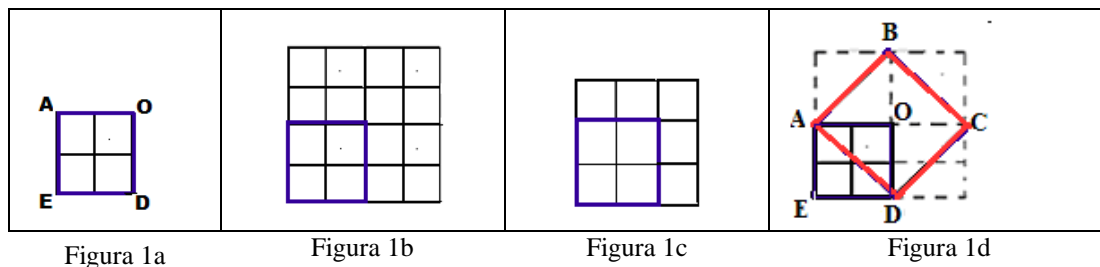


Figura 1: Representações dos diálogos, de Platão [Fonte: adaptado de Bekken (1994, p. 34-35)].

No relato de Platão, o escravo apresentou dois argumentos (representados na figura 1b e 1c) que não responderam a questão. Diante da insuficiência dos argumentos do escravo, Sócrates desenhou a solução, descrita na figura 1d, onde se indica que a área do quadrado ABCD é equivalente ao dobro da área do quadrado inicial AEDO.

Atualmente, podemos considerar o quadrado ABCD de lado desconhecido ‘x’ e área numericamente igual a 2, o que remete a se escrever a equação $x^2 = 2$, de modo a se obter $x = \sqrt{2}$, notação esta que era desconhecida pelos antigos gregos.

Pode-se estender a apresentação presente em Bekken (1994) para expor a representação geométrica do contínuo de $\sqrt{2}$, na reta real, uma mudança de registro de representação que permite introduzir nominalmente os números reais, modo ilustrado na figura 2.

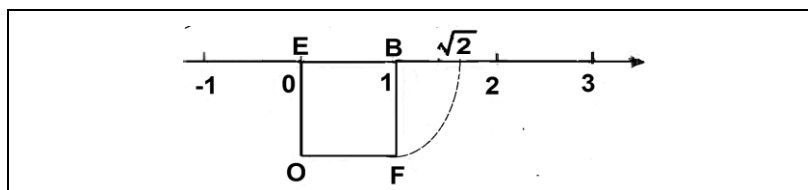


Figura 2: Representação de $\sqrt{2}$, na reta real [Fonte: Pommer (2012, p.60)].

A tensão presente na ‘Crise dos incomensuráveis’ separou a Matemática em dois mundos: a Geometria e a Aritmética. A descoberta da incomensurabilidade representou a primeira tentativa de ruptura entre o reino do discreto, oriundo da Aritmética e a Matemática do contínuo, incorporada pela Geometria.

O par discreto&contínuo se refere a duas ações fundamentais - contar e medir – operações “[...] cuja realização a vida de todos os dias exige com maior freqüência” (CARAÇA, 1970, p. 29).

Thom (2004) considera que a Matemática teve origem na Aritmética ou Teoria dos Números. O autor aponta o par discreto/contínuo como aporia fundadora das Matemáticas. Para o autor, o termo ‘aporia’, de origem grega, denota uma contradição de fundo, algo que inicialmente transparece sem

saída diante de um conflito ou questionamento entre opiniões opostas e inicialmente concludentes, mas que permite emergir uma solução transitória.

Neste mote, passamos a desenvolver alguns aspectos históricos e epistemológicos com relação à essência dos elementos constituintes do conjunto dos Números Reais, cujo entendimento permite viabilizar a retroação inerente ao par discreto&contínuo como um dos elementos estruturadores do universo dos números irracionais.

Diversos livros didáticos difundem a ideia que os números naturais surgiram através da necessidade do homem contar objetos em atividades de pastoreio. A correspondência é uma relação primitiva, da qual podem ser deduzidas as relações de maior, menor e igual quantidade entre dois conjuntos.

Caraça (1970) aponta que a operação de contagem faz corresponder, a partir do primeiro elemento de uma dada coleção, uma enunciação dos números naturais positivos. É denominada correspondência um-a-um ou unívoca. Em alguns casos a correspondência pode ser unívoca e sua recíproca também, como ocorre nos conjuntos A e B da figura 03.

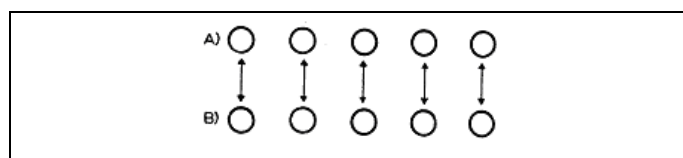


Figura 03: Relação biunívoca [Fonte: Caraça (1970, p. 8)].

Dados dois conjuntos numéricos finitos A e B, se o número de elementos de A for maior que o número de elementos de B, então se diz que A é prevalente⁷ em relação a B (figura 04).

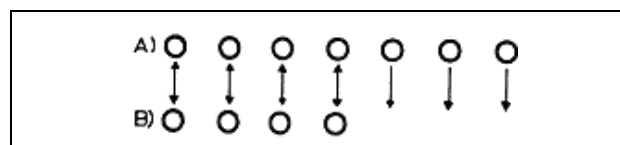


Figura 04: Prevalência [Fonte: Caraça (1970, p. 8)].

O caso mais comum é que duas coleções não contenham igual número de elementos. Assim, a noção de equivalência, que é possibilitada pela relação biunívoca presente na operação de contar, é insuficiente para introduzir a noção de número natural.

O estudo do antropólogo Thomas Crump (1993) revelou que os povos primitivos tanto contavam quanto mediam. O autor destaca um exemplo característico, explicitando que os povos antigos utilizavam cordas com nós ou passos para medir distâncias, processo de natureza contínua, realizada por meio da contagem de nós ou de passos, uma grandeza de origem discreta.

O desdobramento da natureza discreta articulada com o contínuo permitiu a passagem dos números naturais para os racionais não-negativos. No plano histórico, as frações emergiram a partir

⁷ A origem etimologia remonta ao latim *praevalentia*, vernáculo que significa ‘ter maior valor’.

de situações empíricas⁸ que envolviam a repartição de partes não necessariamente iguais em relação à determinada quantidade.

Centurion (1994) aponta que o ensino usual introduz os números racionais, de forma pragmática, por meio de grandezas contínuas (comprimento, área ou volume), repartindo o todo em ‘n’ partes iguais, destacando ou colorindo ‘m’ partes, por contagem, indicando-se a fração própria pela anunciação da relação entre dois inteiros, da forma m/n .

Pode-se aproveitar este modo de ação para introduzir os números irracionais, por meio da incomensurabilidade entre dois segmentos. Neste viés, Hariki (1993) propõe o seguinte problema: São dados dois segmentos AB e CD tais que AB tem maior medida que CD . É possível medir AB , utilizando CD como unidade?

Uma resposta positiva significa que o segmento CD caberia um número inteiro de vezes em AB , o que recai no trabalho com os números naturais.

Porém, se a resposta for negativa, Hariki (1993) destaca uma nova questão: é possível subdividir o segmento CD em um número finito de partes iguais de modo que estas partes menores pudessem ser colocadas um número inteiro de vezes no segmento AB ?

A figura 05 representa dois segmentos AB e CD , de comprimentos a e b , onde é possível se escolher uma unidade u colocada ‘m’ vezes no segmento AB e ‘n’ vezes no segmento CD , de modo

a se obter o número racional $\frac{AB}{CD} = \frac{a}{b} = \frac{m * u}{n * u} = \frac{m}{n}$.

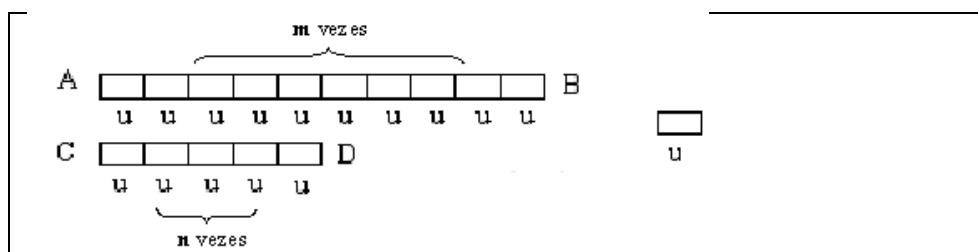


Figura 05: Representação de segmentos comensuráveis [Fonte: Pommer (2012, p. 15)].

Ocorrendo uma resposta negativa à nova questão proposta por Hariki (1993) teríamos o caso dos segmentos *incomensuráveis*. Este viés da incomensurabilidade permitiria apresentar o número irracional como medida da impossibilidade da subdivisão de dois segmentos por meio de uma mesma unidade comum.

Esta apresentação evitaria o problema de circularidade presente na definição usual de livros didáticos no ciclo básico: os números irracionais são os números reais que ‘não’ podem ser expressos na forma a/b , onde a e b são inteiros e $b \neq 0$.

⁸ Adjetivo proveniente do latim *empiricu* e do grego *empeirikós*, remetendo a situações oriundas da experiência ou da observação sobre certa realidade ou fenômeno.

Caraça (1970) já argumentava que a essência dos números reais implicaria na abordagem do ‘problema da medida’, de modo a se administrar a tensão entre o discreto e o contínuo, no âmbito do ensino. Vale destacar que esta abordagem permite desdobrar a denominada ‘Crise dos Incomensuráveis’, na época dos pitagóricos, relatada em alguns livros didáticos, mas pouco explorada no contexto escolar.

O eixo exato&aproximado

Outra abordagem fundamental para a compreensão dos números irracionais se refere ao eixo exato&aproximado. Os antigos babilônios, egípcios e hindus não faziam distinção entre o exato e aproximado em relação aos cálculos numéricos das atividades pragmáticas usuais.

Os PCN, Brasil (1997), comentam sobre a apresentação das raízes quadradas e cúbicas por meio da calculadora eletrônica, indicando o resultado com várias casas decimais no visor. Mas, o referido documento não discute se este tipo de abordagem intuitiva permite ao aluno entender se as raízes quadradas e cúbicas representam um novo campo numérico. Ainda, os PCN, conforme Brasil (1997), não tratam do ‘Problema da Medida’, que remete a ideia da incomensurabilidade.

Porém, o problema da medida envolve “[...] três aspectos distintos: a escolha da unidade; a comparação com a unidade; a expressão do resultado dessa comparação por um número” (CARAÇA, 1970, p. 30).

Quanto ao segundo aspecto, Cerri (2006) relembra que o conceito de medir representa uma operação frente a uma comparação entre duas grandezas de uma mesma espécie. Esta operação requer que inicialmente se discuta os aspectos que envolvem a escolha de certo padrão ou unidade de medida, que permite responder quantas vezes o padrão poderia caber na grandeza a ser estudada.

O primeiro e o terceiro aspectos indicam que a escolha de uma unidade de medida está conectada a aspectos de praticidade e economia. Para Caraça (1970), seria inconveniente utilizar “[...] a légua como unidade de comprimento de tecidos para vestuário, assim como o milímetro como unidade de distâncias geográficas. E como se traduz essa exigência de comodidade? Nisto – que a expressão numérica da medição não dê números maus de enunciar e dos quais se não faça, portanto, uma ideia clara” (p. 30).

Neste ponto, retomamos o problema proposto por Hariki (1993): São dados dois segmentos AB e CD tais que AB tem medida maior do que CD . É possível medir AB , utilizando CD como unidade? A resposta negativa a esta questão propicia a introdução aos números racionais, representando uma primeira evolução do que podemos denominar de ‘arte de medir’.

O ato de medir é uma atividade pragmática que corresponde ao ato de aproximar um número, um dado ou registro de entrada, quer seja racional ou irracional, e onde o registro de saída deve ser expresso necessariamente por um número racional, na forma decimal e finita. Este fato deriva do

limite físico do padrão estabelecido ou da escala adotada, assim como no modo de representar a medida resultante.

Neste mote, um possível modo de apresentação dos números irracionais na escolaridade básica se torna viável, em situações práticas e científicas, por meio do desenvolvimento da noção de aproximação.

No âmbito dos números reais, Beskin (1987) considera uma boa aproximação aquela onde a substituição numérica pode ser sempre melhorada, de acordo com o desejo do operador ou em conformidade com as condições de contorno de uma dada situação.

Um importante contexto atual onde a aproximação de números se faz necessária são os computadores. Neste atual meio tecnológico, as memórias possuem grande espaço de armazenamento, porém sempre terão uma capacidade finita de armazenamento de dados. Quem deseje entrar com dados no sistema operacional de um computador deverá utilizar um código binário, ou seja, estará operando com um número racional, do tipo finito. Ao se trabalhar com um número irracional no computador (seja para introduzir dados ou para efetuar cálculos) o acesso, necessariamente, será realizado por meio de uma operação de truncamento, ou seja, através da aproximação de um número racional com uma finita quantidade de casas decimais.

Lima (1985) e Bonomi (2008) destacam a restrição inerente aos próprios computadores, pois as operações matemática estão restritas à capacidade finita das memórias, denotando a limitação dos meios materiais e empíricos para a exatidão da Matemática.

As calculadoras e planilhas eletrônicas são instrumentos motivadores que permitem cálculos mais rápidos, possibilitando caminhos para se construir o significado dos números irracionais. Nesse sentido, os cálculos deste tipo permitem “[...] enriquecer a compreensão conceitual, desde que sua utilização passe pela crítica, abandonando a crença inabalável de que as máquinas não erram e seus resultados são corretos e inquestionáveis” (BONOMI, 2008, p. 1).

Historicamente, Boyer (1991) aponta que os antigos babilônios utilizavam um método interativo para o cálculo de raízes quadradas⁹. Seja, por exemplo, determinar $\sqrt{7}$. Considerando um retângulo de arestas 1 e 7 unidades, $\sqrt{7}$ representaria um segmento de comprimento situado no intervalo $2 < \sqrt{7} < 3$, pois $2 < \sqrt{7} < 3$.

⁹ Para os babilônios, este cálculo remetia a se descobrir qual o lado de um quadrado de área numericamente igual a 7, o que atualmente poderia ser representado por $x^2 = 7$.

O processo iterativo requer a determinação do valor médio $x = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2) = \frac{1}{2} \cdot (2 + 3) = 2,5$, como uma das arestas. A outra aresta é obtida pela razão entre a área e o lado, ou seja: $\frac{7}{2,5} = 2,8$. Assim, obtém-se um novo intervalo encaixante¹⁰ $2,5 < \sqrt{7} < 2,8$.

Uma nova aproximação pode ser realizada, obtendo-se $\sqrt{7} \cong \frac{(2,5 + 2,8)}{2} = 2,65$ (ver tabela 01). Na tabela 01 são expostos alguns resultados iniciais, obtidos por meio de calculadora científica.

Tabela 01: Cálculo de $\sqrt{7}$ pelo processo iterativo [Fonte: o autor]			
aresta 1	aresta 2	área	aproximação
2	3	7	---
2,5	2,8	7	---
2,65	$\frac{7}{2,65} = 2,642$	7,0013	2,6
2,642	$\frac{7}{2,642} = 2,649$	6,998658	2,64
2,6455	$\frac{7}{2,6455} = 2,6460$	6,999993	2,64
2,6458	$\frac{7}{2,6458} = 2,6457$	6,999993	2,645
⋮	⋮	⋮	⋮

Na tabela 01 foi feita uma aproximação até a 3ª casa decimal. Porém, esta pode ser continuamente melhorada, utilizando-se planilhas eletrônicas, até quantas casas decimais forem desejadas, o que remete a essência da operação da aproximação.

Outro contexto motivador pode se situar na ‘Corrida ao π ’, que consiste na determinação do maior número de casas decimais de PI. Este contexto chama a atenção para o uso de um número irracional, por sua natureza teórica.

Struik (1992) aponta conexões da operação de aproximação, com relação ao número PI e processos infinitos¹¹, em expressões obtidas por Viète¹² (1592), Wallis (1593) e Euler (século XVIII), indicadas no quadro 01.

Quadro 01: Expressões de Viète e Wallis para o cálculo de PI [Fonte: adaptado de Pommer (2012, p.164-168)].	
$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots$ (Viète)	$\frac{2}{\pi} = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{5.7}{6.6} \dots \frac{(2n-1)(2n+1)}{2n.2n} \dots$ (Wallis).
$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$ (Euler)	

¹⁰ Nos intervalos encaixantes o comprimento de cada intervalo subsequente se torna cada vez menor, ou seja, podem ser feitos menores do que qualquer número real escolhido arbitrariamente pequeno. Ainda, em toda sequência de intervalos encaixantes sempre existe um número que pertence a todos os intervalos.

¹¹ Segundo Maor (2008), Viète empregou pela primeira vez uma fórmula para descrever um processo infinito. Ainda, é de Viète a notação de reticências para indicar um processo contínuo, levado ao infinito.

¹² Segundo Boyer (1991), Viète foi um dos primeiros a utilizar a palavra análise e foi um dos primeiros analistas no sentido moderno, ou seja, alguém que pesquisa sobre processos infinitos.

Pommer (2012) realizou estudo com planilhas eletrônicas para obter aproximações sucessivas de PI, a partir das expressões do quadro 01. Para este intento, o autor elaborou uma sequência obtida por truncamento dos termos de cada expressão. Os resultados das planilhas revelam a lenta convergência destas sequências, que são amenizadas pelo recurso tecnológico.

Leviathan (2004) fez pesquisas com números irracionais, tendo concluído que o uso de séries e sequências convergentes, aliado a métodos de ilustração computadorizados, permitem um caminho alternativo para o aluno superar dificuldades com o tema dos números irracionais.

O recurso as planilhas se constitui em um meio didático para explorar a importância teórica dos números irracionais no mundo pragmático: os números irracionais são ferramenta indispensável para se testar as máquinas e programas computacionais. Deste modo, o que seriam dos computadores sem os números irracionais?

O eixo finito&infinito

Os eixos discreto&contínuo e exato&aproximado resvalam na questão do infinito, que é uma ideia tratada de modo intuitivo na escolaridade básica. Porém, é necessário resgatar tais conexões, pois há conflito entre o senso comum e o conceito matemático.

Os povos antigos utilizavam o termo ‘infinito’ para situar contextos envolvendo um inconcebível número de elementos ou um número de ordem muito elevada. Este é um exemplo do uso inadequado do senso comum que erroneamente atribui características finitas ao infinito, posto “[...] que o finito e o infinito são de naturezas diferentes e não se pode aplicar as leis de um ao outro” (MARQUES, 1993, p. 28-29).

Aristóteles, no séc. III a.C. introduziu a ideia de infinito potencial, concebido como um processo de crescimento em sequências não finitas. Hilbert (1925) aponta que o infinito, na forma potencial, se refere ao ato de contar. A ordenação do conjunto dos Números Naturais possibilita o enunciar um sucessor, um aspecto recursivo, de natureza discreta, que permite experimentar o infinito na forma potencial.

A concepção aristotélica perdurou por séculos, por ser muito intuitiva, visto que se refere a “[...] alguma coisa que está se tornado, resultando, se produzindo, isto é, lidamos com o denominado infinito potencial. Mas o infinito propriamente dito não é isso” (HILBERT, 1925, p.7).

Este matemático destaca que o estudo de Georg Cantor, no século XIX, com relação aos conjuntos infinitos promoveu a introdução ao infinito real ou atual¹³, visto como totalidade completa. O infinito atual:

¹³ O infinito atual considera os conjuntos infinitos como conjuntos completos, ideia sistematizada na Matemática por Georg Cantor (1845-1918).

[...] se manifesta, quando, por exemplo, consideramos a própria totalidade dos números 1, 2, 3, 4, ... como uma unidade acabada ou quando encaramos os pontos de um segmento como uma totalidade acabada de coisas. Esse tipo de infinito é denominado como infinito atual (HILBERT, 1925, p.7).

Um caso de destaque pode se situar na Progressão Geométrica (4, 2, 1; 1/2; 1/4; 1/8; ...), um assunto tratado aritmeticamente e até algebricamente na escolaridade básica. Podemos transformar o registro de representação numérico da sequência para a forma de descrição geométrica, utilizando-se sucessivos retângulos, que pode ser visualizada na figura 06.

Estamos considerando o primeiro termo como a área do quadrado ABCD ($2^2 = 4$ unidades de área), o segundo termo como a área do quadrado EFGH ($(\sqrt{2})^2 = 2$), e, assim, sucessivamente, onde cada termo representa a área obtida pela divisão ao meio dos lados dos quadrados, a partir da figura inicial ABCD.

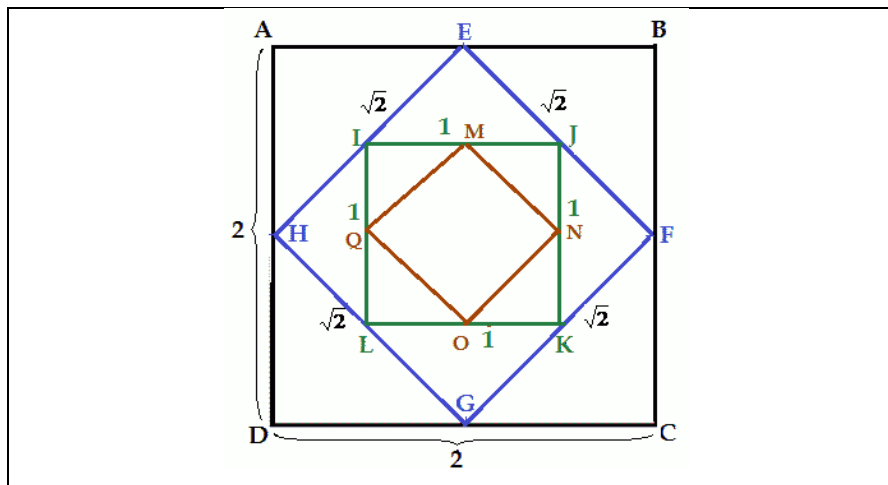


Figura 06: Representação geométrica da P.G (4, 2, 1; 1/2; 1/4; ...) [Fonte: o autor].

A Progressão Geométrica decrescente, de razão 1/2, apresenta uma soma de infinitos termos dada por: $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$.

Intuitivamente, a soma dos infinitos termos da série (4, 2, 1; 1/2; 1/4; 1/8; ...) converge para o valor $S = 8$, numa aparente forma potencial. Porém, na concepção do infinito atual, a soma da área é exatamente 8.

Ao invés de considerarmos as sequências das áreas do quadrado da figura 06, passamos a escrever a sequência dada pelas arestas dos respectivos quadrados: (2, $\sqrt{2}$, 1...). Esta sequência de infinitos termos representa também uma Progressão Geométrica, de primeiro termo 2 e razão $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ou ainda $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Esta sequência converge para o valor:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{2-\sqrt{2}} = \frac{4}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{4(2+\sqrt{2})}{2} = 2(2+\sqrt{2}).$$

Weierstrass, um matemático do século XIX, concebeu o ramo da Análise fundamentando-se no conceito de número. Rezende (2003) relata que Weierstrass elaborou uma definição de número irracional pela identificação do número real com a própria seqüência que converge para ele. Assim, no prototípico exemplo de $\sqrt{2}$, Weierstrass define este número irracional não mais pelo limite da seqüência formada pelas sucessivas aproximações (1; 1,4; 1,41; 1,414; ...), mas como sendo a própria seqüência que converge para $\sqrt{2}$, em uma concepção de totalidade inerente ao conceito de infinito atual.

Retomando os trabalhos desenvolvidos pelos antigos gregos em geral e, em particular, nos Elementos de Euclides (300 a.C.), observa-se a recusa em se considerar os irracionais como números. Esta concepção de número irracional está presente no trabalho de Arquimedes, de Siracusa, em cerca de 240 a.C.

Boyer (1991) relata que o estagirita realizou uma aproximação racional do número PI por meio de números racionais, no livro *Sobre as medidas do Círculo*. Boyer (1991) relata que Arquimedes obteve $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$ como intervalo de valor para PI.

Para tal empreitada, Arquimedes determinou o perímetro de duas seqüências convergentes de polígonos - o inscrito e o circunscrito - a uma dada circunferência. Arquimedes iniciou o processo por meio do hexágono regular inscrito e circunscrito a uma circunferência de raio r, calculando o perímetro dos polígonos obtidos ao se dobrar sucessivamente o número de lados. A figura 07 ilustra o início do processo de inscrição do hexágono regular na circunferência de raio r.

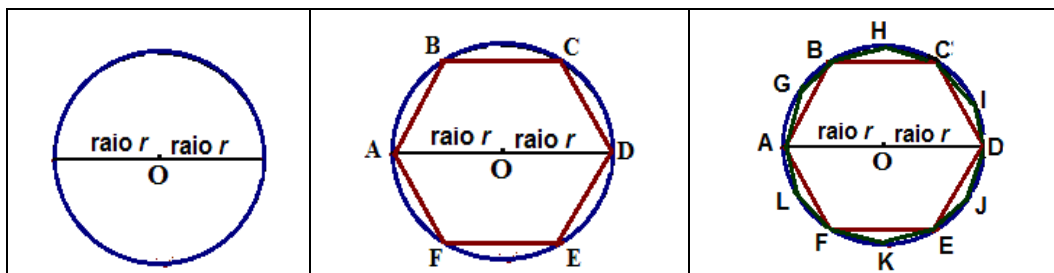


Figura 07: Algumas etapas da inscrição do hexágono regular [Fonte: Pommer (2012, p. 161)].

E o valor de PI fica confinado por meio da expressão:

$$\frac{\text{Perímetro do polígono inscrito}}{2 \cdot \text{raio da circunferência}} < \pi < \frac{\text{Perímetro do polígono circunscrito}}{2 \cdot \text{raio da circunferência}}$$

Adotando-se para o raio da circunferência o valor $r = \frac{1}{2}$, tal relação fica:

$$\text{Perímetro do polígono inscrito} < \pi < \text{Perímetro do polígono circunscrito}$$

Figura 08: Relações do valor de PI [Fonte: Pommer (2012, p.161)]

Arquimedes nunca mencionou o termo ‘infinito’ nos seus trabalhos. Porém, o processo recursivo presente nesta técnica de Arquimedes com relação ao número irracional π , foi considerada por Costa (1981) como precursora da origem da noção moderna de número irracional, este definido como o limite de uma sequência de números racionais quando ‘n’ tende ao infinito.

Esta concepção arquimediana resultou que, atualmente:

[...] não é possível pensar nos números irracionais como entidades individuais, mas apenas em sua relação com os racionais. Um irracional é definido através da sequência de racionais que constituem suas aproximações, por falta ou por excesso, ou ainda, mais modernamente, através dos conjuntos de números racionais que o sucedem ou o antecedem (MACHADO, 1994, p. 12).

Conclusões

Vale destacar que na perspectiva de repensar o movimento do saber, proposto pela transposição didática, conforme Chevallard (1999) é possível de se efetivar em relação ao tema dos números irracionais na escolaridade básica.

A intenção deste texto foi propor referenciais teóricos para que o tema dos números irracionais possa ser viabilizado em situações de sala de aula que envolvam a área de Matemática em uma perspectiva mais significativa em termos conceituais.

O discurso presente na narrativa fundamentada na epistemologia nos eixos constituintes dos números reais – discreto&contínuo; exato&aproximado; finito&infinito – permite expor as tensões presentes a cada um destes pares, que são complementares por natureza.

Otte (1993) coloca a complementaridade como sendo a capacidade que cada um dos entes polares se diferenciar e abranger o outro. Neste sentido, nenhum dos dois elementos pode ser determinado sem o outro, mas, em certos momentos, ambos os pólos assumem um papel distinto.

Estas conexões podem ser exploradas se inseridas num mapeamento envolvendo uma escala propícia e orientada por referenciais norteadores. Para Machado (2009), mapear é um recurso que permite a escolha de um discurso organizador em relação a certo conhecimento, de acordo com a escala ou abrangência que se deseje utilizar.

Pela exposição realizada, o ato de significar os números irracionais na escolaridade básica perpassa a possibilidade de organizar uma narrativa orientadora em um movimento de restabelecimento de relações epistemológicas constituídas ao longo do processo histórico, esta guiada pela confluência dos eixos constituintes dos números reais: discreto/contínuo; exato/aproximado/estimado e finito/infinito.

Um ponto relevante na narrativa orientadora na apresentação e desenvolvimento dos números irracionais é o pareamento entre da linguagem aritmética, algébrica e gráfica com o uso da palavra. Conforme expõe Vygotsky (1998), os conceitos emergem em situações que demandam a articulação entre pensamento e linguagem, imbuídos numa ação situada no movimento e confluência de conhecimentos científicos.

Referências

- BEKKEN, Otto B. **Equações de Ahmes até Abel**. Tradução de José Paulo Quinhões Carneiro. Universidade de Santa Úrsula: GEPEM, 1994.
- BESKIN, Nikolaï Mikhaïlovich. **Frações Contínuas**. Tradução de Pedro Lima. Moscou: Editora Mir, 1987.
- BONOMI, Maria Cristina. **Os números irracionais e as calculadoras**. In: Seminários de Ensino de Matemática. **Anais ...** São Paulo: FEUSP, 2008.
- BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 9. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1991.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: SEMT/MEC, 1997.
- _____. **Parâmetros Curriculares Nacionais: 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- _____. **Matriz de Referência para o ENEM**. Brasília: MEC, 2009.
- BROLEZZI, Antonio Carlos. **A Tensão entre o Discreto e Contínuo na História da Matemática e no Ensino da Matemática**. 1996. 91f. Tese (Doutorado em Educação), Universidade de São Paulo, São Paulo.
- BROUSSEAU, Guy. Fundamentos y Métodos de la Didactica de las Matemáticas. **Recherches en Didactique de Mathématiques**. v.7, n.2, 1986, p. 33-115.
- BRUNER, Seymour Jerome. **O Processo da Educação**. 8. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1987.
- CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 5. ed. Portugal: Lisboa, 1970.
- CENTURION, Marília. **Números e Operações**. São Paulo: Scipione, 1994.
- CERRI, Cristina. **Desvendando os Números Reais**. São Paulo: IME-USP, 2006.
- CHEVALLARD, Yves. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 2, 1.999, p. 221-266.
- COSTA, Manoel Amoroso. **As Idéias Fundamentais da Matemática e Outros Ensaio**s. 3. ed. São Paulo: EDUSP, 1981.
- CRUMP, Thomas. **La Antropología de los números**. Madri: Alianza, 1993.
- FISCHBEIN, Efraim; JEHIAM, Ruth; COHEN, Dorit. The Concept of Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers. **Educational Studies in Mathematics**. v. 29, n. 1, jul. 1995, p. 29-44. Disponível em: <www.jstor.org/stable/3482830>. Acesso em 12 dez. 2017.
- GONÇALVES, Carlos Henrique Barbosa; POSSANI, Claudio. Revisitando a Descoberta dos Incomensuráveis da Grécia Antiga. **Matemática Universitária**, n. 47, 2010, p. 16-24.

- HARIKI, Seiji. Sobre Frações Próprias, Impróprias e Aparentes. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo: IME-USP, n. 23, 1993, p. 19-22.
- HILBERT, David. Sobre o Infinito. Tradução de Marcelo Papini. In: Encontro de Matemáticos. **Anais ...** Münster: Sociedade de Matemática de Westfalen, 1925, p. 1-11.
- KARLSON, Paul. **A Magia dos Números**. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1961.
- LEVIATHAN, Talma. Introducing real numbers: when and how? In: Proceedings of ICME 10, **Anais ...** 2004, p. 1-13.
- LIMA, Elon Lages. Deve-se usar máquina calculadora na escola? **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo: IME-USP, n. 7, 1985, p. 20-22.
- MACHADO, Nilson José. Sobre alguns desequilíbrios na apresentação da Matemática básica: discreto/contínuo, finito/infinito, exato/aproximado, determinístico/aleatório. In: Seminário de Educação Estatística. **Anais ...** São Paulo: IME-USP, abr. 2009.
- _____. **Matemática e Realidade**. 3 ed. São Paulo: Editora Cortez, 1994.
- MARQUES, José Francisco C. **Introdução à Teoria dos Números**. Piracicaba: UNIMEP, 1993.
- MAOR, Eli. **e: A História de um Número**. 5. ed. Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro: Editora Record, 2008.
- MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **O Ensino de Matemática no Primeiro Grau**. 7. ed. São Paulo: Editora Atual, 1986.
- OTTE, Michael. **O Formal, o Social e o Subjetivo: Uma Introdução à Filosofia e à Didática da Matemática**. São Paulo: Editora Unesp, 1993, Cap. 10, p. 219-236.
- POMMER, Wagner Marcelo. **A Construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico: Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais**. 2012. 235f. Tese (Faculdade de Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo.
- RIPOLL, Cydara Cavedon. A Construção dos Números Reais nos Ensinos Fundamental e Médio. In: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, **Anais ...** Salvador, 2004.
- REZENDE, Wanderley Moura. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. 2003. 450f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo.
- SCHUBRING, Gert. **Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century**. France and Germany: Springer, 2005.
- STRUIK, DIRK JAN. **História Concisa das Matemáticas**. 2. ed. Tradução de João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1992.
- THOM, René. **A Aporia Fundadora das Matemáticas**. Enciclopédia Einaudi. Porto: Imprensa Nacional/Casa da Moeda, v. 43, 2004, p. 650-664.
- TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. **Didática da Matemática: Como Dois e Dois: A Construção da Matemática**. São Paulo: Editora FTD, 1997.

VIANNA, Carlos Roberto; CURY, Helena Noronha. Ângulos: uma “História” escolar. **Revista História&Educação Matemática**, v.1, n.1, jan.-jun. 2001, p. 23-37.

VYGOTSKY, Lev S. **Pensamento e linguagem**. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

Recebido em 01/10/2017

Aceito em 13/12/2017

Sobre o autor

Doutor em Educação pela Universidade de São Paulo. Professor Adjunto da Graduação e Pós-Graduação da Universidade Federal de São Paulo.