ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

SOBRE A TEORIA DAS PROPORÇÕES, O MÉTODO DA EXAUSTÃO E OS INCOMENSURÁVEIS

ABOUT THE PROPORTION THEORY EXHAUSTION METHOD AND THE INCOMMENSURABLE

Marco Aurélio Kistemann Jr. - UNESP Rio Claro, SP
mathk@ig.com.br

RESUMO: Este artigo busca, inicialmente, mostrar o aprimoramento na utilização de Número e Forma desde as civilizações egípcias, babilônicas e gregas, apresentando a evolução dos processos operatórios. Em seguida, aborda o caráter mensurável das medidas e as limitações de se operar com os números racionais e suas consequências na sociedade Pitagórica. Tal abalo nos paradigmas pitagóricos revelará a riqueza dos segmentos incomensuráveis, por meio de demonstrações da relevância histórica e prática do Método da Exaustão e da Teoria das Proporções de Eudoxo, bem como um processo memorável de Dedekind para relacionar os números irracionais com os racionais.

PALAVRAS-CHAVE: Incomensurabilidade; Números irracionais; Geometria.

ABSTRACT: This essay wants, initially, to show the improvement in the Numbers and Form use since the Egyptians, Babylons and Greeks civilizations, showing the evolution in the operatories process. In the following, we get the measurable character of the measure and the limitations of the operation with the rational numbers and its consequences of the Pithagoric society. Such thing in the Pithagorics paradigms to develop the wealth in the incommensurable segments developing by the demonstrations and historic relevance and practice of the Exhaustion Method and the Proportions Theory of Eudoxo, as well as, a memorable process in the Dedekind to relating the irrational numbers with rational.

KEYWORDS: Incommensurability; Irrational numbers; Geometry.

Introdução

Este artigo apresenta num primeiro momento, de forma introdutória e geral, algumas características das civilizações egípcia e mesopotâmica (babilônios), busca também retratar possíveis fatos que possam ter auxiliado "matemáticos" gregos em suas formalizações e descobertas matemáticas.

O título do artigo explicita o que será abordado, entretanto, reconhecemos que outros autores poderiam dar um tratamento diferenciado ao tema enfatizando mais um aspecto em detrimento de outros. Inclusive, pode-se destacar aspectos que serviriam diretamente para uso na educação escolar com exemplos ou atividades que poderiam ser trabalhadas no ambiente de sala de aula. Entretanto, esse não é o escopo desse artigo. Interessa-nos apresentar uma sequência teórica que apresente os matemáticos/filósofos envolvidos, a Teoria das Proporções, o Método da Exaustão, os Incomensuráveis, como relacionar as teorias e os métodos geométrica e analiticamente para incrementar o arcabouço teórico e histórico do professor de Matemática.

Entendemos ser de suma importância tal fato, uma vez que reafirma a continuidade da história de um povo e suas influências em outras civilizações, sofre, em muitos casos, uma formalização com um rigor que civilizações passadas não necessitavam para sobreviver. Reiteramos que, em geral, os cursos oferecidos nas graduações secundarizam ou ignoram a História da Matemática e a História dos povos que investigaram e criaram a Matemática. O resultado são objetos matemáticos e teorias utilizadas pelos estudantes e professores sem que se conheça as circunstâncias de seu surgimento, seu contexto e os personagens das descobertas matemáticas, o que dá a impressão que a história constitui-se como mera alegoria do instrumento matemático.

A história dos povos antigos auxilia-nos a identificar o quanto o Número e a Forma são fundamentais para o progresso das ações humanas ao longo dos tempos. As primeiras

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008
© Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional São Paulo

tábuas aritméticas babilônicas surgidas exemplificam tal afirmação na medida em que possibilitam ao homem operacionalizar seus atos matemáticos elementares. Pode parecer pouco, mas tais fatos resultaram na gênese do conceito moderno generalizado de número, possibilidade de cálculo de áreas para as mais variadas atividades humanas e em decorrência o surgimento na sociedade grega dos principais teoremas da geometria.

É nessa sociedade que várias crenças serão abaladas, principalmente quando o homem começa a perceber as relações entre os números e suas representações geométricas. Paradigmas ligados à medida de segmentos darão lugar à impossibilidade de se afirmar com precisão o valor da medida de tais segmentos. Isso, severamente, abalará a sociedade pitagórica e todos os seus pressupostos teóricos, afetará as relações de poder na sociedade científica grega.

A Incomensurabilidade inaugurou uma discussão que perdurou por vários séculos, possibilitou a organização dos matemáticos para que por meio da Teoria das Proporções e do Método da Exaustão provas sistemáticas pudessem assegurar a existência de números, até então amaldiçoados pelos pitagóricos, os números irracionais.

Assim a história dos povos antigos relaciona-se diretamente com os temas abordados nesse artigo, na medida em que é nela que estão, ainda que disfarçadas ou encobertas pelo tempo, os alicerces que sustentarão as discussões e descobertas em torno de Número e Medida.

A seguir trataremos brevemente da sociedade grega, apresentaremos um quadro referente ao cotidiano grego e seus personagens principais para revelar sua importância no contexto da época (séc. IV a.C.) e a importância dada aos números, descritores da harmonia e beleza na estrutura filosófica e epistemológica dos pitagóricos. Abordaremos o surgimento da Incomensurabilidade e o aparecimento dos irracionais, com o objetivo de apresentar de forma imparcial as versões do quadrado e do pentágono regular.

Nos tópicos intitulados, *Método da Exaustão: O Princípio de Eudoxo-Arquimedes* e *A Teoria das Proporções de Eudoxo e a Inspiração de Dedekind*, apresentaremos uma idéia do que é o Método da Exaustão e demonstrações utilizando o método. Em seguida, apresentaremos a Teoria das Proporções formulada por Eudoxo e magistralmente apresentada por Euclides no Livro V dos seus Elementos. Finalizamos esta parte com a definição de Eudoxo e a de Dedekind.

No tópico final, apresentaremos, de forma sucinta, problemas modernos que desafiam a astúcia e a criatividade humana, faremos um paralelo com o que vem acontecendo ao longo dos milênios quando o Homem se depara com novos fatos, particularmente, na área de Ciências e Matemática.

O que nos dias de hoje parece-nos trivial, no século IV (a.C.) provocou uma avalanche, pois questionou todo um sistema de pensamento consolidado e estruturado, que tinha por base os números racionais e a teoria das proporções de Eudoxo. Até então, medir o que quer que fosse era suficiente desde que utilizasse razões e os números racionais.

A Irracionalidade vai cruzar o caminho dos pitagóricos e colocar em evidência a fragilidade de suas crenças, entre as quais a de máxima essência, que seria possível descrever tudo através de Números. A inicial dificuldade em crer e em lidar com grandezas não-comensuráveis e, posteriormente, a incapacidade em lidar com a raiz quadrada de dois levará os pitagóricos a rejeitar a existência dos números irracionais (POLCINO, 1999).

Valiosas pegadas no caminho: caminhando nas trilhas egípcias e babilônicas

Dados históricos atestam que um aprimoramento na utilização de Número e Forma inicia-se no Egito e Mesopotâmia (Babilônia incluindo Suméria e Acádia) com números e formas muito adiantados (AABOE, 1984).[1]

[1] Por meio de pesquisas em diversos compêndios de História da Matemática nacionais e internacionais, constatamos que as datas desse período não podem ser confirmadas com exatidão. Estes compêndios indicam, com um consenso, algo em torno de quatro mil anos antes de Cristo, considerando a mais remota para estudos egípcios em torno de 2800 anos e cerca de cinco mil anos da era cristã para os mesopotâmios; muitas dessa datas são apoiadas em provas astronômicas e calendários antigos.

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

A base da civilização egípcia e mesopotâmica foi a agricultura. A fabricação de um calendário seguro é de suma necessidade em uma economia agrícola de subsistência. Um calendário implica já uma sofisticação matemática de um povo, pois insere nas suas práticas uma precisão tanto astronômica quanto aritmética, formaliza os modos de observar os céus, os astros, possibilita assim certezas no que concerne a efetuar plantações e colheitas e sobre o que plantar. Desta maneira, especula-se que os habitantes da Mesopotâmia devem ter usufruído de uma aritmética elementar útil (BOYER, 1998).

Para os egípcios, os dados históricos mais remotos são um pouco mais detalhados. Por volta de 4241 a.C. os egípcios já adotavam um calendário com 12 meses de 30 dias e cinco dias de festividades para completar os 365 dias do ano. Esta data também se apóia num fenômeno astronômico pouco preciso, mas relevante, a inundação anual no Rio Nilo.

O comércio estimulou a invenção matemática na Suméria e na Antiga Mesopotâmia, porém, possivelmente, as necessidades de infra-estrutura e engenharia primitiva tiveram maior importância no desenvolvimento das matemáticas que o comércio. Seguros artefatos documentais mostram que a aritmética e as medições se desenvolveram na Babilônia a partir dos primeiros trabalhos dos sumérios[2]. Os babilônios foram os mais infatigáveis compiladores de tábuas aritméticas que se pode comprovar ao longo da história. As tábuas de quadrados convenientemente construídas serviam como tábuas de raízes quadradas e raízes cúbicas. Já utilizavam, nessa época, uma tábua que possibilitava calcular valores de n ao cubo adicionado do quadrado de n para n = 1, 2, 3,...30.

Por outro lado, a aritmética egípcia mostra ainda mais cabalmente suas laboriosas origens empíricas. Já em 3500 a.C., os egípcios manejavam com destreza números da ordem dos centos de milhar. Hieróglifos desta data aproximada registram a captura de 120000 prisioneiros, 400000 bois e 1422000 cabras. A aritmética egípcia seguia o sistema decimal, porém sem determinar o valor posicional do valor assinalado numericamente. A aritmética de 1650 a.C. já apresentava problemas relacionados com frações da forma (1/n) em que n é um número inteiro[3]. Os egípcios já no século XVII a.C. compreendiam o valor da prova na aritmética (KATZ, 1993).

Uma das grandes proezas da matemática babilônica foi a primeira alusão ao conceito moderno generalizado de número. Os números negativos aparecem ao lado dos números positivos em problemas cujo objetivo era solucionar equações simultâneas com duas incógnitas. Isso demonstra, segundo Boyer (1998), que os babilônios tinham alguma idéia dos números negativos como números. Diante de tal assertiva, questiona-se sem, no entanto, nenhuma resposta categórica ser dada: *Possuíam os babilônios alguma idéia do raciocínio dedutivo?* Até o momento não se confirmou nenhum registro babilônico de uma demonstração matemática.

O caráter empírico da álgebra babilônica incorre em regras corretas para calcular a área de qualquer retângulo, triângulo reto, isósceles, trapezóide com um lado perpendicular à base, toma o número pi como 3 de qualquer círculo. Conforme nos escreve Boyer (1998), nada pode ser afirmado sobre a álgebra egípcia, uma vez que esta estava muito defasada com relação aos trabalhos babilônicos. Entre 1850 e 1650 a.C. os egípcios resolviam equações numéricas fáceis de qualquer grau, através do método da falsa posição. Há indícios que sugerem que os egípcios compreendiam a proporção entre números.

No que diz respeito aos teoremas da geometria conhecidos pelos babilônios, destacamos três que mostram um

[2] Este povo afortunado inventou uma escrita eficiente, a cuneiforme, o que favoreceu o registro e o manuseio aritmético de seus trabalhos de medição. A astronomia e aritmética sumerianas eram extremamente avançadas para a época, sendo necessário ressaltar que uma espécie de álgebra evolui com uma rapidez incrível (NEUGEBAUER, 1957).

[3] No papiro de Rhind, de aproximadamente 1650 a.C., copiado pelo escriba Ahmes (A'h-mose) de uma obra mais antiga, as divisões se efetuavam por meio da *"frações unitárias",* sendo a técnica de expressar m/n como soma de frações unitárias, por exemplo, 2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776 (CAJORI, 1993).

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

adiantamento da matemática babilônica, cerca de dois mil anos antes da era cristã. O primeiro teorema versa sobre a existência de um ângulo reto inscrito em um semicírculo. O segundo é o que hoje conhecemos por Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo[4]. O terceiro teorema empírico importante dos babilônios em geometria é o vestígio registrado mais antigo que se coloca sobre as origens da análise matemática: os lados dos ângulos correspondentes de triângulos semelhantes são proporcionais. Este teorema implica a igualdade de razões. Com seus exemplos numéricos de quatro números em proporção, os babilônios deram o primeiro grande passo para o desenvolvimento de uma teoria grega da proporção, que perdura, praticamente, até os dias atuais sem grandes modificações (KATZ, 1993).

Grécia - uma base firme apoiada nas experiências egípcias e babilônicas

Os antigos gregos[5] (~600 a.C. – ~300 d.C.) separaram seus trabalhos sobre os números racionais em Logística e Aritmética. A Logística abarcava as técnicas do cálculo numérico tal como se praticava no comércio e nas áreas científicas, em particular na astronomia. A Aritmética, atual teoria dos números, ocupava-se das propriedades dos números[6].

Um ponto numérico relevante que diz respeito à aritmética praticada pelos gregos, em particular pelos pitágoricos, é a lei que define os intervalos musicais, tradicionalmente atribuída a Pitágoras de Samos[7]. A lei

[4] Até o ano de 1923 acreditava-se que os egípcios conheciam o Teorema de Pitágoras pelo menos no caso das tríades 3, 4 e 5, porque se dizia que os agrimensores egípcios teriam usado esta propriedade dos números para traçar os ângulos retos nas variadas construções. Na atualidade, afirma-se que, ainda que os egípcios possam ter usado os números com esse fim, não há comprovações documentais a favor do conhecimento da equação característica do Teorema de Pitágoras (CONTADOR, 2006).

[5] Os gregos consideravam que o “homem tende por natureza ao saber”, constituindo assim a matemática como um conhecimento puro e sem contradições (HEATH, 1956).

[6] Os gregos realizaram grandes feitos, em particular dois feitos valem ser recordados, sendo anterior a Diofanto. Euclides demonstrou os teoremas fundamentais sobre a divisibilidade aritmética, um dos quais deduzido por Gauss em 1801, o Teorema Fundamental da Aritmética, que diz que um número inteiro positivo é um produto de fatores primos a menos da ordem de seus fatores. Euclides demonstrou também que não existe nenhum primo maior que todos os demais. Se Euclides não foi o primeiro que descobriu esses teoremas, pelo menos transmitiu as demonstrações através de seus Elementos (HEATH, 1956).

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

relaciona as tonalidades das notas emitidas por cordas submetidas a tensões iguais com as longitudes das cordas. Segundo Mlodinow (2004), este experimento constitui-se como primeiro experimento físico-matemático, revelando uma interdependência inesperada entre os números, o espaço e a harmonia[8].

Os gregos, afastados dos misticismos e crenças duvidosas, foram os primeiros a dar o devido valor ao raciocínio dedutivo, buscavam a demonstração como forma de consolidar as estruturas matemáticas do número e da forma. É importante também salientar a conjectura ousada de que a natureza pode ser compreendida e estudada pelo homem através das matemáticas, acreditavam ser a Matemática a linguagem mais adequada para idealizar a complexidade da natureza e reduzi-la a uma sensibilidade compreensível.

Acredita-se que os pitagóricos já tinham ciência da impossibilidade de se medir a diagonal de um quadrado em relação a seu lado (ou do pentágono regular), através do processo da subtração recíproca ou sucessiva (antanairesis). A versão aritmética deste processo de medição é descrita por Euclides em seus "Elementos", atualmente conhecida como algoritmo de Euclides para divisão inteira. Tal descoberta possivelmente contribuiu para o declínio da escola pitagórica e afirmou a oposição entre conceitos de extensão contínua (*megethos*) que poderia ser dividido ao meio *ad infinitum*, e de número (*arithmos*) que não poderia em Aristóteles[9]·.

A tradição segundo a qual Pitágoras fez da matemática grega uma "ciência livre" (*paidéia*)

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

um- a- um entre os comprimentos dos segmentos de reta e os números racionais[12].

Do ponto de vista lógico, configura-se a seguinte questão: se existe somente divisibilidade finita (de extensões no espaço e no tempo) não há incomensurabilidade, mas uma medida mínima para tudo e a tese atomista é reforçada, enquanto a divisibilidade infinita torna possível o irracional, ou seja, a existência de segmentos incomensuráveis por métodos geométricos (EVES, 1976). Esta última hipótese é empregada por Eudoxo, junto com o princípio da continuidade de Platão, no seu "Método de Exaustão" (*dapanan*), descrito no quinto livro dos "Elementos" de Euclides e precursor da idéia de limite que encontramos com o surgimento da Matemática moderna, no cálculo infinitesimal de Leibniz e no cálculo das fluxões de Newton.

Proezas são atribuídas à tradição grega, em particular ao contexto do século IV a.C. e à sociedade comandada por Pitágoras de Samos, considerada como uma das primeiras sociedades científicas cooperativas. O nascimento e a maturidade das matemáticas gregas abarcam aproximadamente dez séculos, cobrem desde o ano 600 a.C. até o ano de 400 d.C. O período mais antigo 640-550 foi o de Tales de Mileto (624-550 a.C.), da escola jônica e Pitágoras de Samos (569-500 a.C.). Suas proezas mais notáveis são: a fundação das matemáticas como um sistema dedutivo e o propósito de matematizar os fenômenos naturais.

Platão (427 – 347 a.C.) ressalta a importância da Matemática para a formação do espírito a fim de depreendê-lo das coisas sensíveis, mutáveis, sobre as quais o conhecimento é impossível. Somente as idéias, imutáveis e eternas, podiam realmente ser conhecidas. Em seus diálogos, abundam exemplos e analogias utilizando conceitos e resultados matemáticos, especialmente geométricos. Embora não tenha sido um matemático, no círculo de discípulos de Platão, em sua academia, havia vários matemáticos de primeira grandeza, como Teeteto (~417 a.C. – ~ 369 a.C.) e Eudoxo de Cnido (408 a.C. – 355 a.C.). Platão, provavelmente, deveu muito da Matemática que sabia a Árquitas de Tarento (428 a.C. - 350 a.C.), seguidor ardoroso das idéias pitagóricas, que viam na Matemática a chave para a leitura e compreensão do mundo.

A Incomensurabilidade deixa assim de ser problemática ou importante para o Estagirita, sendo mencionada pelo legado de sua obra apenas no texto de Teofrasto *De lineis insecabilitus*, incluído no *Corpus Aristotelicum,* em um argumento contra "átomos lineares". A diagonal do quadrado de lado unitário, outras raízes de números primos estudadas por Teodoro de Cirene, e a razão áurea adquirem, com Eudoxo, status de *grandeza irracional* (GRANGER, 2002).

Em oposição estrita a tal concepção da continuidade de segmentos geométricos está o da análise clássica. O segmento para Aristóteles, não se compõe de pontos, embora um número sem fim de pontos estejam nele "em potência", no sentido de só poderem se tornar atuais por operações matemáticas construtivas, como a divisão.

Ao contrário de Platão, que atribuiu aos objetos matemáticos existência real, intermediária entre as idéias e coisas sensíveis, Aristóteles os caracterizou como abstrações (*aphairesis*). Na análise clássica, baseada em teorias dos conjuntos que se seguiram à teoria de Cantor, o segmento é um conjunto infinito de pontos, oferecidos à observação quando nele se aplica a divisão ou outra construção matemática.

Qualquer que tenha sido a razão disso, a Matemática grega se desenvolveu consideravelmente. Todo um corpo de conhecimentos, tanto geométricos quanto aritméticos, está presente nos Elementos de Euclides[13], escritos em torno de 300 a.C., a obra matemática grega mais antiga que nos chegou completa. Além disso, há muitos resultados matemáticos dos gregos que nos

[12] Anaximandro concebe o princípio fundamental do Universo como ordenado numericamente. Esta opinião precede a tese pitagórica sobre o conceito de "ilimitado" (DANTZIG, 1970).

[13] Euclides aperfeiçoou o método axiomático desenvolvido por Eudoxo de Cnido (408 – 355 a.C.), matemático, astrônomo, filósofo, médico e legislador, contemporâneo de Platão, que descobriu que o movimento dos planetas pode ser explicado como a combinação de rotações uniformes de esferas concêntricas em torno de eixos inclinados (BARON, 1985). É bem provável que a maior parte do mérito do livro V de Euclides deva ser atribuído a Eudoxo, sua importância é significativa à medida que seus resultados se aplicam tanto a grandezas numéricas quanto geométricas (GARBI, 1997).

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

chegaram por outras vias, ou de que temos simplesmente referências. Posteriormente a Euclides, conhecemos mais algumas obras, como as Cônicas de Apolônio, das quais sobreviveram sete dos oito livros originais, quatro em grego e três em árabe, a coleção matemática de Pappus de Alexandria (290 – 350 d.C.) e vários trabalhos de Arquimedes.

Acreditamos que muito da Matemática grega se deva às tentativas de resolver os três problemas clássicos da Geometria, a duplicação do cubo, a quadratura do círculo e a trissecção do ângulo. Além disso, é inegável, como reconhecido hoje, a influência da matemática teórica grega no conteúdo dos Elementos.

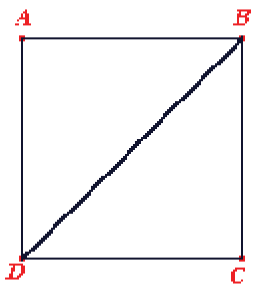
No século V a.C., os sofistas gregos foram de significativa importância para o desenvolvimento de todo o pensamento matemático. Por meio dos paradoxos sobre a divisibilidade infinita, Zenão de Eléa (495-435 a.C.) observa-se as primeiras dúvidas que questionarão a razão e a visão dedutiva matemática da época (BOYER, 1998). Eudoxo de Cnido[14] (408-355 a.C.), discípulo e amigo de Platão, refuta, em tempo algumas objeções colocadas pelos sofistas, o que se constituiu fator extremamente relevante para o futuro das matemáticas.

Para os pitagóricos, toda grandeza (comprimento, área, volume) podia ser associada a um número inteiro ou a uma razão entre dois números inteiros. Admitiam que os números racionais eram suficientes para comparar segmentos de reta. A partir de dois segmentos quaisquer, supunham que existia um segmento u que "cabia" um número inteiro de vezes num deles e um número inteiro de vezes no outro.

Nesse caso, os segmentos são comensuráveis. Em notação moderna, dizer que os dois segmentos AB e CD são comensuráveis significa dizer que existe um segmento u e dois naturais m e n tais que AB= nu e CD= mu. Num dado momento da história, descobriu-se a existência de grandezas incomensuráveis.

Esta descoberta marcou profundamente o desenvolvimento da Matemática grega. Vitruvius (séc. I a.C.), na sua obra *Dez livros de arquitetura*, o mais antigo texto sobre a história da matemática que chegou até os nossos tempos em sua versão original, atribui a Pitágoras e a seus discípulos a descoberta de grandezas incomensuráveis. Mais tarde, Proclus (420-485 d.C.) no prólogo do livro *Os comentários sobre o primeiro livro dos Elementos de Euclides* atribui também tal descoberta à escola pitagórica.

Essa descoberta destruiu a crença de que o universo era governado por números inteiros. Alguns historiadores associam o aparecimento de grandezas incomensuráveis com a aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo em que a hipotenusa é a diagonal de um quadrado e os catetos são os lados do quadrado.



Aristóteles refere-se a uma demonstração onde se supõe que a diagonal e o lado são comensuráveis para se chegar num absurdo com a conclusão que um mesmo inteiro é par e ímpar. O raciocínio, por absurdo que seja, foi provavelmente concebido no meio da escola pitagórica.

Vamos supor que o lado AB e a diagonal DB sejam segmentos comensuráveis. Logo existem um segmento u e dois inteiros m e n tais que AB = mu e DB = nu. Portanto o segmento AB mede m e o segmento DB mede n. Pelo teorema de Pitágoras, $n^2 = m^2 + m^2$, ou seja, $n^2 = 2m^2$. Portanto, $(n/m)^2=2$. Seja a/b uma fração irredutível tal que n/m=a/b. Como $(a/b)^2=2$ então $a^2=2b^2$. Portanto a^2 é par e conseqüentemente a é par. Como a/b é irredutível, b deve ser ímpar. Como a é par, existe um inteiro k tal que a=2k. Como

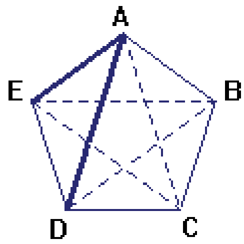
[14] Teoria das Proporções de Eudoxo: "A razão p/q é a mesma que a razão x/y, quando sendo m e n números inteiros positivos quaisquer, mx é maior igual ou menor que ny e que mp seja maior igual ou menor que mq. Se as razões p/q e x/y são iguais, diz-se que p, q, x e y são proporcionais". A teoria é exposta nos Elementos de Euclides no livro V. A teoria eudoxiana das proporções validou indiretamente a regra empírica dos egípcios para o volume do tronco de uma pirâmide e completou o trabalho dos pitagóricos com números inteiros. Certificou também o método da exaustão e o uso do cálculo integral na determinação de comprimentos, áreas e volumes (HEATH, 1981).

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

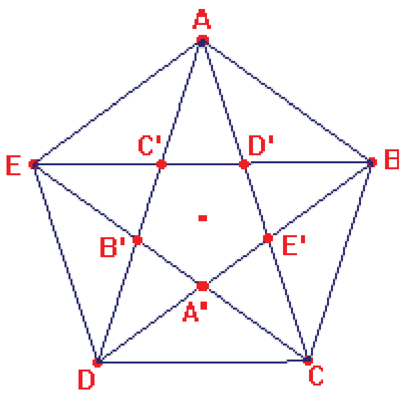
$a^2=2b^2$ então $4k^2=2b^2$. Logo b^2 é par. Conclui-se que b também é par. Absurdo, pois b é ímpar.

O artigo de Von Fritz *A descoberta da incomensurabilidade por Hipasus de Metapontum* introduziu uma nova dimensão ao problema. Ele desloca radicalmente a questão da incomensurabilidade para a divisão de um segmento em média e extrema razão e observa que apesar de Proclus atribuir a Pitágoras a descoberta dos incomensuráveis, todos os outros textos se referem a Hipasus de Metapontum, nascido por volta de 500 a.C. De acordo com Von Fritz essa descoberta pode ter sido feita por volta de 450 a.C e está relacionada com as faces pentagonais de um dodecaedro regular e com o pentagrama (emblema dos pitagóricos).

Uma possibilidade de justificar que o lado do pentágono regular e o lado do pentagrama são incomensuráveis é a seguinte:



Vamos supor que o lado AE e a diagonal AD do pentágono regular ABCDE sejam comensuráveis. Logo existe um segmento u e inteiros positivos m e n tais que AE = mu e AD = nu com n > m, pois AD é maior que AE. As diagonais do pentágono regular ABCDE determinam um novo pentágono regular A'B'C'D'E'.



Como AD - AE = B'E'com AD = nu e AE = mu então B'E'= (n-m)u. Como AE-B'E'=A'B', conclui-se que A'B'= mu-(nu - mu) = (2m-n).u. Logo se houver um segmento u que seja submúltiplo comum da diagonal AD e do lado AE do pentágono regular inicial então o mesmo segmento u será submúltiplo dos segmentos E'B' e A'B', ou seja, da diagonal e do lado do novo pentágono regular A'B'C'D'E'.

O mesmo argumento que permitiu passar do pentágono inicial ABCDE ao pentágono A'B'C'D'E' pode ser repetido para se chegar a um outro pentágono menor ainda.

Após um número finito de repetições teremos um pentágono de lado a_n e diagonal d_n comensuráveis com relação ao segmento u e com $a_n < u$, o que é uma contradição. Logo o lado e a diagonal do pentágono inicial são incomensuráveis.

"Método da Exaustão": o princípio de Eudoxo-Arquimedes

Credita-se a Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) o chamado Método da Exaustão que eliminava o infinito da Matemática grega. Esse método permite comparar áreas e volumes e segundo afirma Arquimedes, no prefácio de seu livro *Sobre a esfera e o cilindro*, foi utilizado por Euclides no livro XII.

A partir dessas novas idéias na geometria que a reabilitaram, a concepção atomista (que preconizava a existência dos indivisíveis) é adotada para números e a concepção continuísta (que imaginava o espaço, o tempo e a matéria como divisíveis infinitamente) para grandezas. Os números são considerados finitamente divisíveis e as grandezas infinitamente divisíveis.

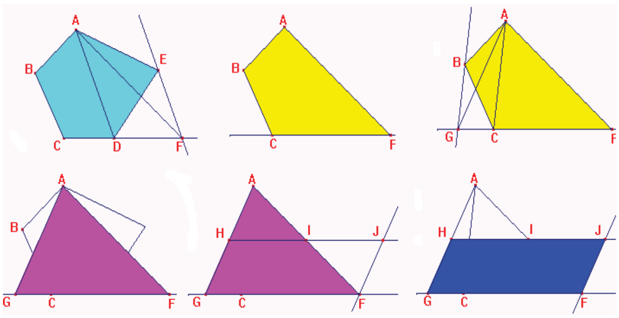
O Método da Exaustão é também conhecido por *Princípio de Eudoxo-Arquimedes*, por ter na sua base a teoria das proporções apresentada por Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) e por Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) ter sido o matemático que maior visibilidade lhe deu.

A seguir apresentamos uma idéia do que é o *Método da Exaustão*, nome dado no século XVII por Gregório de S.Vicente, e apresentamos a Teoria das Proporções formulada por Eudoxo e magistralmente apresentada por Euclides no *Livro V* dos seus *Elementos*.

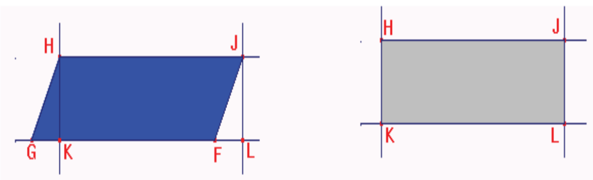
Munidos do Método de Exaustão, podemos demonstrar, por exemplo, que *a* *razão entre dois círculos é a razão entre os dois quadrados cujos lados são os diâmetros desses círculos*.

Explicitando o "Método da Exaustão"

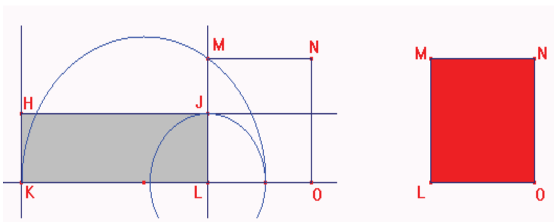
Os gregos sabiam comparar figuras poligonais. Todo polígono podia ser transformado num quadrado de mesma área. Essa operação era chamada de quadratura. Fazer a quadratura de uma figura plana significava construir um quadrado equivalente à figura dada. O exemplo abaixo mostra um pentágono ABCDE transformado num quadrilátero equivalente ABCF que, por sua vez, é transformado num triângulo equivalente AGF. A partir dos pontos médios H e I dos lados do triângulo obtém-se o paralelogramo equivalente GFJH.



O paralelogramo é em seguida transformado no retângulo equivalente KLJH.

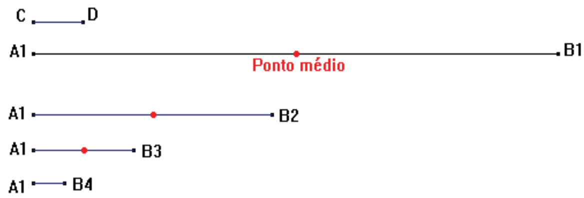


E finalmente o retângulo é transformado no quadrado equivalente LONM.



Eudoxo sugeriu uma abordagem que permitia comparar figuras curvas com figuras poligonais. No coração desse método, está a proposição I do livro X de Euclides chamada mais tarde de Método da Exaustão: dadas duas grandezas de mesma espécie, se retirarmos da maior uma parte maior que sua metade e do resto retirarmos uma parte maior que sua metade e assim por diante, obteremos após um número finito de etapas uma grandeza menor que as duas grandezas consideradas.

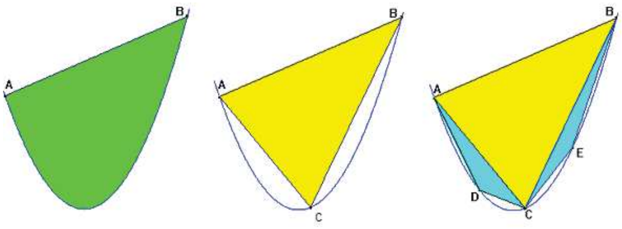
Na figura abaixo, temos como grandezas dois segmentos CD e A1B1. Se da maior A1B1 retirarmos uma parte maior que a sua metade, obteremos A1B2. Se continuarmos o processo retirando da maior A1B2 uma parte maior que sua metade, obteremos A1B3. Se retirarmos de A1B3 uma parte maior que a sua metade, chegaremos a uma grandeza A1B4 que é menor que as duas grandezas consideradas e que são CD e A1B1.



Por exemplo, podemos utilizar o Método da Exaustão para comparar a área A de um segmento parabólico com uma outra área B, descobrindo inicialmente uma superfície equivalente ao segmento parabólico. Em seguida, prova-se que as duas superfícies A e B têm áreas iguais procedendo da seguinte maneira: supõe-se que A>B, obtém-se a diferença (A-B) e aplicando o Método da Exaustão deve-se chegar a um absurdo. Em seguida, procede-se da mesma maneira supondo que A<B, obtendo a diferença (B-A) que deve levar a uma segunda contradição. Conclui-se finalmente que A=B.

Arquimedes descobriu, inicialmente, que a área do segmento de parábola é equivalente a 4/3 da área do triângulo ABC. Podemos construir uma sucessão de polígonos com um número crescente de lados até exaurir a área do segmento parabólico (figura a seguir). Em seguida, pelo Método da Exaustão, Arquimedes provou por duplo absurdo que as duas áreas eram iguais.

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008



O "Método da Exaustão" com a proposição I do livro *A medida do círculo* de Arquimedes

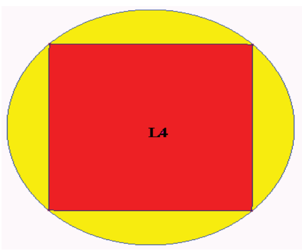
Apresentaremos a demonstração utilizando a notação moderna. Um círculo é equivalente (igual em área) a um triângulo retângulo no qual um dos lados do ângulo reto é igual ao raio do círculo e o outro igual ao comprimento da sua circunferência

Para mostrar que a área do círculo é igual à área do triângulo, utilizaremos na primeira parte da demonstração polígonos regulares inscritos com número crescente de lados e chegaremos num absurdo e na segunda parte utilizaremos polígonos regulares circunscritos com número crescente de lados para chegar num segundo absurdo. Indiquemos por A a área do círculo e T a área do triângulo. Temos três possibilidades: (i)A>T, (ii)A<T e (iii) A=T.

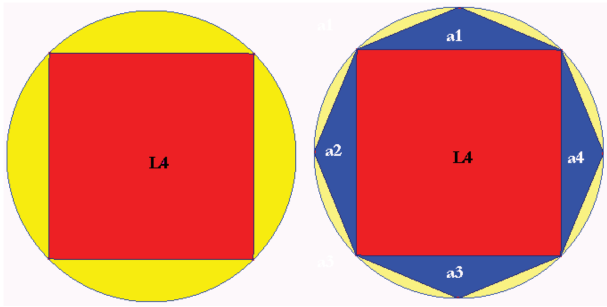
Suponhamos, inicialmente, que A > T, logo a diferença (A-T) corresponde a uma área.

Aplicando o Método da Exaustão às grandezas A e (A-T) retiramos da maior que é A, um quadrado cuja área é L4 (a área L4 é maior que a metade da área A do círculo).

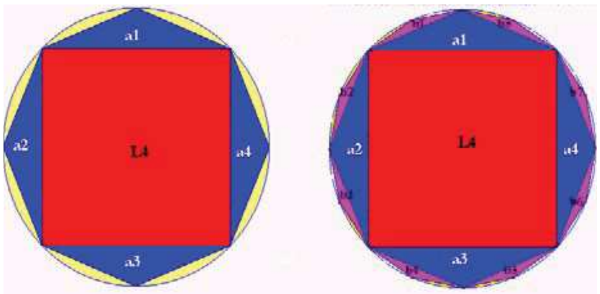
Retirando o quadrado de área L4, sobra (A - L4), na qual L4 é a área de um polígono regular de 4 lados.



Retirando do que sobra (A - L4) uma parte maior que sua metade (a1+a2+a3+a4), sobrará:
(A- L4)- (a1+a2+a3+a4)=
A - (a1+a2+a3+a4+L4)=
A - L8, na qual L8 é a área de um polígono regular de 8 lados.



Retirando do que sobra (A - L8), uma parte maior que sua metade b1+b2+b3+b4+b5+b6+b7+b8. Sobra: (A- L8)(b1+b2+b3+b4+b5+b6+b7+b8)=A - (b1+b2+b3+b4+b5+b6+b7+b8+a1+a2+a3+a4 +L4)= A - L16, na qual L16 é a área de um polígono regular de 16 lados.



Após um número finito de etapas, obteremos um polígono regular de área Ln tal que (A-Ln) é menor que as duas grandezas A e (A-T) consideradas. Logo (A-Ln) < (A-T), donde T<Ln.

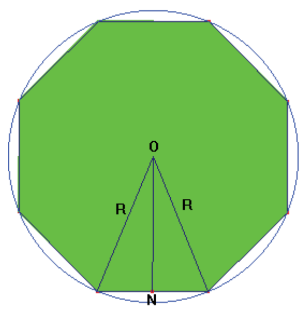
Considere um polígono regular de área Ln inscrito no círculo de área A

O apótema ON é menor que R

O perímetro do polígono regular é menor que o comprimento C da circunferência.

(ON). perímetro do polígono <(R.C)

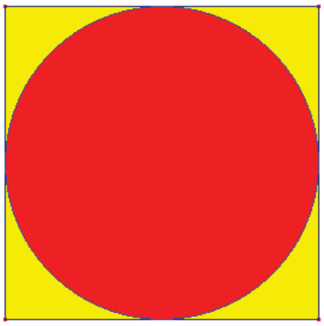
(ON).perímetro do polígono/2 < R.C/2. Mas (ON). perímetro/2=Área Ln do polígono e (R.C)/2 é igual à área do triângulo T. Logo Ln < T (Absurdo).



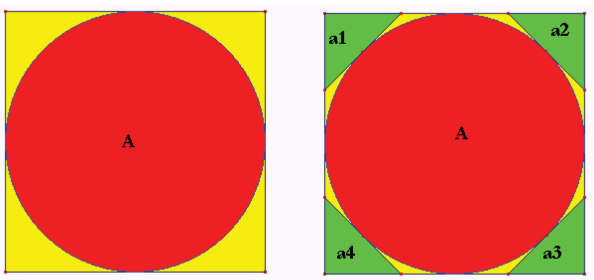
ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

Vamos supor A<T (Logo T-A corresponde a uma área). Seja L4 a área do quadrado circunscrito ao círculo. Aplicando o Método da Exaustão às grandezas L4 e (T-A).

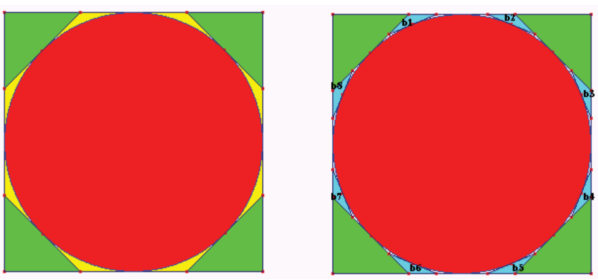
Retirando da maior grandeza, um quadrado circunscrito de área L4 uma parte maior que a sua metade, sobra: L4 – A.



Retiraremos do que sobra L4 - A, uma parte maior que a sua metade a1+a2+a3+a4, sobrará: (L4 - A) - (L4 - L8) = L8 – A (L8 é a área de um polígono regular de 8 lados).



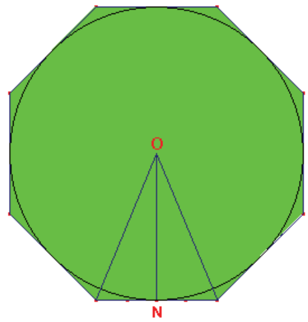
Retirando do que sobra L8 - A, uma parte maior que a sua metade (b1+b2+b3+b4+b5+b6+b7+b8). Sobrará: (L8 - A) - (L8 - L16) = L16 – A.



Após um número finito de etapas, obteremos um polígono regular de área Ln tal que (Ln-A) é menor que as duas grandezas.
Logo (Ln – A) < T-A.
Donde Ln < T.

Consideremos um polígono regular de área Ln circunscrito ao círculo de área A e ON = R. O perímetro do polígono é maior que o comprimento C da circunferência. Logo,
(ON). perímetro do polígono > (R.C).

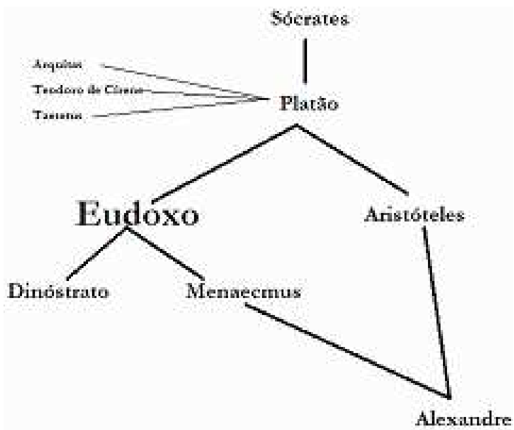
Dividindo por dois os dois membros teremos:
(ON. perímetro do polígono/2) > (R.C/2). Mas (ON. perímetro do polígono/2) =Ln e (RC/2)=T.
Logo Ln > T. Um absurdo, pois vimos que Ln < T.



Como A>T levou a um absurdo e A<T levou a um outro absurdo, conclui-se que A=T.

Teoria das Proporções de Eudoxo

Eudoxo de Cnido foi discípulo de Platão e o primeiro a resolver completamente o problema das grandezas incomensuráveis, construiu uma Teoria das Proporções que se aplica tanto a grandezas comensuráveis quanto a incomensuráveis. Essa teoria se encontra exposta no livro V de Euclides.



Atribui-se também a Eudoxo o chamado *Método da Exaustão* que eliminava o

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

infinito da Matemática grega. Esse método permite comparar áreas e volumes e segundo afirma Arquimedes, no prefácio de seu livro *Sobre a esfera e o cilindro*, foi utilizado por Euclides no *Livro XII*.

A partir dessas novas idéias na geometria que a reabilitaram, a concepção atomista (que preconizava a existência dos indivisíveis) é adotada para números e a concepção continuísta (que imaginava o espaço, o tempo e a matéria como divisíveis infinitamente) para grandezas. Os números são considerados finitamente divisíveis e as grandezas infinitamente divisíveis.

Eudoxo apresentou a sua *Teoria das Proporções* como modo de ultrapassar a "crise" surgida na matemática grega quando da descoberta dos incomensuráveis, que deitava por terra a teoria das proporções dos pitagóricos (EVES, 1976).

Assim, Euclides, com a definição 3 do *Livro V*, define razão dizendo que "*Uma razão é uma espécie de relação a respeito do tamanho entre duas grandezas do mesmo tipo*". Continuando, apresenta a definição 4: "*Diz-se que têm uma razão as grandezas que são capazes, quando multiplicadas, de se exceder uma à outra*".

Repare que a primeira definição apresentada aqui nada define, entretanto, a segunda caracteriza, de forma inequívoca, duas grandezas homogêneas, isto é, do mesmo tipo (dois comprimentos, duas áreas ou dois volumes). É na definição 5, do *Livro V*, que assenta a *Teoria das Proporções*: Diz-se que: grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando, dados quaisquer equimúltiplos da primeira e da terceira e dados quaisquer equimúltiplos da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos simultaneamente excedem, são simultaneamente iguais ou ficam simultaneamente aquém dos últimos. Esta definição é consolidada na definição 6, do mesmo livro: "*Grandezas que têm a mesma razão dizem-se proporcionais*".

Atualmente, quando dizemos que os segmentos AD, DB, AE e EC são tais que $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ estamos tratando com as medidas dos segmentos AD, DB, AE e EC e portanto com números reais.

Eudoxo encontrou um modo de definir a igualdade de duas razões. Antes de apresentar a definição de Eudoxo vamos utilizar a linguagem moderna para visualizar a idéia de Eudoxo.

Na igualdade $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ temos dois casos a considerar: AD e DB são comensuráveis ou incomensuráveis. Se AD e DB são comensuráveis, isto é, se $\frac{AD}{DB}$ é racional, então existem inteiros positivos m e n tais que $\frac{AD}{DB}=\frac{m}{n}$ = e $\frac{AE}{EC}=\frac{m}{n}$. Podemos, portanto, escrever as igualdades na forma de um enunciado que envolve números inteiros: se m.DB= n.AD então m.EC = n. AE.Podemos escrever as duas implicações na forma de um enunciado que envolve números inteiros: se m.DB < n.AD então m.EC < n.AE e se m.DB > n.AD então m.EC > n.AE.

Eudoxo evitou a discussão sobre a natureza dos irracionais e sobre a validade dos processos infinitos e definiu a igualdade entre duas razões de uma maneira engenhosa. Esta definição se encontra no *Livro V* (definição 6) dos *Elementos* de Euclides e fixa o critério de razões idênticas. Diz-se que quatro grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta se, quando eqüimúltiplos quaisquer são tomados da primeira e da terceira e eqüimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros eqüimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que, os últimos eqüimúltiplos considerados em ordem correspondentes.

Utilizando a linguagem moderna e considerando como grandezas os segmentos AD, DB, AE, e EC (comensuráveis ou não), para Eudoxo, dizer que $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ significava dizer que para todo m e n inteiros positivos, as condições a seguir eram verificadas:

(i) Se m.DB < n.AD então m.EC<n.AE
(ii) Se m.DB > n.AD então m.EC > n.AE
(iii) Se m.DB = n.AD então m.EC=n.AE

Mais tarde, essa definição válida para grandezas quaisquer foi fonte de inspiração para a criação dos números reais.

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

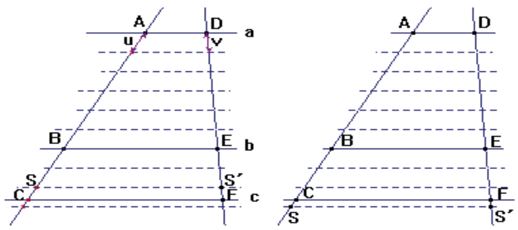
Como exemplo da utilização dessa definição, podemos a partir do Teorema de Tales apresentar uma demonstração (para grandezas comensuráveis e grandezas incomensuráveis) pela *Teoria das Proporções de Eudoxo*.

Supondo a//b e b//c, vamos provar que AB/BC = DE/EF.

Sejam n e m dois números naturais qualquer. Vamos dividir AB em n partes iguais. Logo existe um segmento u tal que AB= n.u

Marcando m vezes u em BC, e sendo S a extremidade do último segmento contido em BC, temos 3 casos possíveis:

1º Caso: S está entre B e C
2º Caso: C está entre B e S
3º Caso: C = S (nesse caso AB e BC são comensuráveis)



1º Caso: Supondo que S entre B e C

Logo BS= mu. De cada ponto de divisão de AB e BC tracemos paralelas às retas a,b e c. Essas retas interceptarão DE e EF em pontos que dividirão DE em n partes iguais a v e ES´ em m partes iguais a v. Logo DE= nv e ES´= mv. De AB= nu vem que mAB= mnu e de BS= mu vem que nBS= nmu. Como BS<BC então mAB=nBS < nBC. Portanto, mAB < nBC.De DE= nv vem que mDE= mnv e de ES´= mv vem que nES´= nmv. Como ES´< EF então mDE = nES´ < nEF. Portanto mDE < nEF. Concluímos então que: mAB < nBC $\Rightarrow$ mDE < nEF .

2°Caso: Supondo agora, C entre B e S

De AB=nu vem que mAB= mnu. De BS= mv vem que nBS= nmv. Como BS > BC então mAB=nBS>nBC. Portanto mAB > nBC.De DE= nv vem que mDE= mnv e de ES´= mv então nES´=nmv. Como ES´ > EF então mDE = nES´ > nEF. Portanto mDE > nEF. Conclui-se então que mAB > nBC $\Rightarrow$ mDE > nEF .

3°Caso: Suponhamos por fim que C = S (nesse caso AB e BC são comensuráveis)

De AB= nu vem que mAB = mnu e de BS= mv vem que nBS= nmv. Logo mAB=nBS. De DE= nv vem que mDE= mnv e de EF= mv vem que nEF= nmv. Logo mDE=nEF. Concluímos então que:
mAB=nBS$\Rightarrow$ mDE = nEF.

A Teoria das Proporções de Eudoxo e a inspiração de Dedekind

Em 1872, o matemático alemão Richard Dedekind (1831-1916)[15] encontrou um processo aceitável para relacionar os números irracionais com os racionais, denominando de "linha numerada real" ao novo modelo de continuidade, por alusão ao hábito que os matemáticos traziam desde o século XVI de chamar números reais ao conjunto dos racionais irracionais (MIGUEL, 2005).

Desde a crise provocada pela descoberta das grandezas incomensuráveis na Antiga Grécia, os matemáticos levaram vinte séculos para construir um objeto matemático cujo quadrado é 2. Sabiam que nenhum número racional ao quadrado dava 2, sabiam que a diagonal de um quadrado de lado unitário podia ser construída com régua e compasso e que portanto existia, mas não sabiam como definir e operar com esses novos números. Foi somente no século XIX

[15] Cortes de Dedekind - Em 1858, interessou-se por uma questão que afligia os matemáticos há muito tempo: a necessidade de se estabelecer uma correspondência definitiva entre os números e a reta, baseando completamente o conjunto dos números reais. A idéia de Dedekind consistia em representar cada número real como uma divisão, um corte nos números racionais. Isto é, todo número real *r* divide os números racionais em duas partes distintas, os maiores e os menores que ele. Esse esquema de classificação, chamado de corte, partição, separação, ou seção de Dedekind, afirma que*: "Se todos os pontos de uma reta estão em duas classes tal que todo ponto da primeira classe encontra-se à esquerda de todo ponto da segunda classe, então existe um e somente um ponto que produz esta divisão".*O que de outra forma seria*: "Se o sistema de todos os números reais é separado em duas classes e tal que todo número m é menor que todo número n, então existe um e somente um número real pelo qual esta separação é produzida".* Suas idéias foram publicadas em 1872 no trabalho *Stetigkeit und Irrationale Zahen* (Continuidade e Números Irracionais) (DAVIS & HERSH, 1995).

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

que a façanha de dar uma definição consistente para esses objetos matemáticos se concretizou.

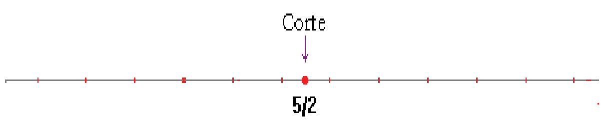
Galileu e Leibniz julgavam que a "continuidade" de pontos sobre uma reta era conseqüência de sua densidade, isto é, do fato que entre dois pontos quaisquer existe sempre um terceiro. Mas só isto não bastava para caracterizar esses objetos, pois os números racionais também têm essa propriedade e não formam um *"continuum"*. Se representarmos todos os números racionais sobre uma reta, não teremos preenchido totalmente os pontos da reta; restarão inúmeros "espaços vagos".

Dedekind (1831-1916) se voltou para a questão do preenchimento dos "espaços vagos" da reta desde 1858 quando dava aulas de cálculo. Refletindo sobre a questão, Dedekind se perguntou: O que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais? Dedekind foi buscar a inspiração na teoria das proporções de Eudoxo (IV a.C). Dedekind chegou à conclusão que a essência da continuidade de um segmento de reta estava na separação dos números racionais em duas classes. *"Por essa observação trivial, o segredo da continuidade será revelado"* escreveu Dedekind. Grosso modo, a sua idéia era a seguinte:

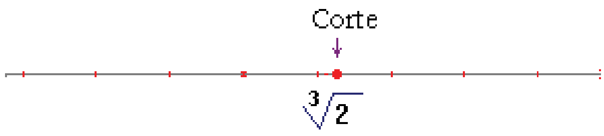
> Cortando uma reta em duas partes podemos separar os números racionais em duas classes A e B onde todo número da primeira classe A é menor que todo número da segunda classe B. Dessa forma, cada corte produz um e um só número real. Se A tem um maior elemento ou se B tem um menor elemento, o corte define um número real racional; mas se A não tem um maior elemento e B não tem um menor elemento, então o corte define um número real irracional (CARAÇA, 1978, p. 135).

Portanto, por meio dos cortes de Dedekind, amplia-se o conjunto Q introduzindo os números irracionais.

Por exemplo, os conjuntos
$A=\{x\in Q/x<5/2\}$
e $B=\{x\in Q/x\geq 5/2\}$
determinam o corte que define o número real 5/2. Observe que nesse caso, B tendo menor elemento, o corte define um número real racional.



Os conjuntos $A=\{x\in Q/\ x^3 < 2\}$ e $B=\{x\in Q/\ x^3 > 2\}$ determinam o corte que define o número real que usualmente denotamos por $\sqrt[3]{2}$. Observe que, nesse caso, A não tendo um maior elemento e B não tendo menor elemento, o corte define um número real irracional.



Do mesmo modo, os conjuntos
$A=Q_{-}\cup\{x\in Q_{+}/x^2<2\}$
e $B=\{x\in Q_{+}/x^2>2\}$
determinam o corte que define o número real irracional indicado por $\sqrt{2}$.Com esta definição, Dedekind criou os números reais, eliminou os "espaços vagos" de Q e estabeleceu uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e os números reais.

No começo do século vinte, uma modificação do corte de Dedekind foi proposta por Bertrand Russell (1872-1970). Ele notou que como qualquer das duas classes A e B é univocamente determinada pela outra, uma só bastava para a determinação de um número real. A partir daí, não sendo necessário considerar as duas classes de cada corte, começou-se a trabalhar somente com a classe da esquerda ou somente com a classe da direita. Assim, um número real passa a ser definido somente por uma das classes.

Relacionando a definição de Eudoxo com a de Dedekind, podemos dizer que duas razões são iguais segundo Eudoxo, se, e somente se, elas definem cortes iguais segundo Dedekind.

Dedekind em um ensaio denominado *Continuidade e Números Irracionais*, aparecido em 1872, atesta que:

- Existem mais pontos na linha reta do que números racionais;
- O conjunto dos números racionais não é adequado para aplicarmos aritmeticamente a continuidade da reta;
- É absolutamente necessário criar novos números para que o domínio numérico seja tão completo quanto a reta,

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

isto é, para que possua a mesma continuidade da reta.

A partir destas observações, Dedekind diz:

> Por muito tempo pensei em vão sobre isso, mas finalmente achei o que buscava. Consiste no seguinte: se todos os pontos de uma reta são divididos em duas classes, de modo que, qualquer ponto de primeira fique à esquerda de qualquer ponto da segunda classe, então, existe apenas um ponto que separa os pontos em duas classes. Não creio estar enganado em pensar que todos aceitarão imediatamente a verdade dessa afirmação. Além disso, a maioria de meus leitores ficará desapontada ao saber que através dessa observação banal será revelado o segredo da continuidade. Fico satisfeito por todos acharem o princípio acima óbvio, pois sou totalmente incapaz de prova de que ele é correto, nem creio que alguém tenha esse poder (CARAÇA, 1978, p.140).

O conceito de continuidade também foi desenvolvido por Cavalieri (1597-1647) através dos indivisíveis. Cavalieri, discípulo de Galileu, desenvolveu as idéias sobre os indivisíveis para métodos geométricos e publicou o seu tratado: *Geometria Indivisilibus* em 1635. Com esse trabalho transformou o uso da reta e de superfícies *indivisíveis* em um conjunto poderoso de técnicas para comparar áreas e volumes. Em linguagem moderna seus indivisíveis seriam dito da seguinte forma: um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido. Uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou "indivisíveis" e o volume pode ser considerado como composto de secções que são volumes indivisíveis ou quase atômicos.

Também no sentido do desenvolvimento do conceito de continuidade, temos as contribuições de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), que proporcionou uma evolução na construção dos números reais. Cauchy definiu o Infinitésimo como uma quantidade variável que se torna infinitamente pequena quando seu valor numérico decresce infinitamente de modo a convergir para o limite zero".

O infinitésimo está relacionado com o conceito de limite. Embora a definição formal de limite, utilizada pelos livros didáticos, apresente como pressuposto o conjunto dos números reais perfeitamente definidos, na história o processo não obedeceu a essa lógica. A definição de limite de Cauchy acrescentou elementos que auxiliaram a formalização final dos números reais dada por Dedekind.

É de suma relevância ressaltar que algumas décadas depois, outro matemático alemão, Georg Cantor (1845-1918)[16], fez uma descoberta que iria acabar de vez com os preconceitos em relação à aceitação da linha numerada real. Com essa descoberta confirmou-se que, embora haja uma infinidade de números racionais, como suspeitavam os gregos, há ainda mais números irracionais, confirmando ser a linha numerada real, de algum modo, *"mais contínua"* do que a racional.

Considerações finais

Os problemas em aberto e, posteriormente, solucionados na Matemática nos revelam o quanto essa área de conhecimento ainda tem de mistério e caráter desafiador. Mesmo com tecnologias avançadas, em várias áreas do conhecimento, ainda enfrentamos muitos obstáculos no campo do saber matemático. Há dois mil e quinhentos anos atrás aproximadamente, um jovem seguidor de Pitágoras de Samos "provou" que a raiz quadrada de dois não era um número racional, isto é, não podia ser expressa como uma fração.

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

Os gregos conheciam o problema do infinito e seus significados para a Matemática. E a Filosofia, assim como a profundidade filosófica com que o trataram, pode ser percebida na discussão que lhe dedica Aristóteles em "Física", um tratado clássico de valor perene nessa questão. Talvez Aristóteles tenha sido privilegiado por ter podido refletir mais vivamente sobre o primeiro impacto sofrido pelo intelecto humano frente aos desafios que tal questão encerra, através do legado pitagórico. Mas nem os gregos, nem os pensadores modernos, recuaram diante das várias faces com que a questão se nos apresentou (VLASTOS, 1987).

Desde os pitagóricos até os contemporâneos e sucedâneos de Cantor na investigação dos fundamentos de Matemática, tentou-se decifrá-las. Os gregos desenvolveram a Teoria das Proporções e o Método Axiomático, e o esforço intelectual de grandes pensadores do século XX nos oferece um arsenal de impressionante complexidade na lógica matemática, na teoria axiomática dos conjuntos, na teoria das categorias, na teoria da prova, como também na filosofia da linguagem.

Referências

AABOE, A. **Episódios da história antiga da matemática**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1984.

BARON, M. E. **A matemática grega.** Brasília: Editora Universidade de Brasília (UnB), 1985.

BOYER, C.B. **História da matemática**. São Paulo: Edgar Blucher, 1998.

CAJORI, F. A. **History of mathematical notations**. Vols I e II, Dover Publications, 1993.

CARAÇA, B. de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática.** Lisboa: Gradiva, 1978.

CASTELNUOVO, E. **Geometria intuitiva**. Barcelona: Editorial Labor, 1996.

CONTADOR, P. R. M. **Matemática,** uma breve história. São Paulo: Editora da Física, 2006.

DANTZIG, T. **Número,** a linguagem da ciência. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência matemática**. Rio de Janeiro, 1986.

EUCLIDE. **Les éléments.** Volume 3, Livre X. Presses Universitaires de France, 1998.

EUCLIDE. **Les éléments.** Livre V et X. Presses Universitaires de France, 1998.

EUCLIDES .**O primeiro livro dos elementos de Euclides.** Natal: Editora SBHMat, 2001.

EVES, H.W. **An introduction to the history of mathematics.** Fourth ed. U.S.A, 1976.

FRITZ, K.V. The discovery of incomensurability by Hippasus of Metapontum. In: **Annals of Mathematics**, v. 46, n. 2, April, 1945.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. São Paulo: Makron Books, 1997.

GRANGER,G.G. **O irracional.** São Paulo: Editora Unesp, 2002.

HEATH, T.L. **The thirteen books of Euclid´s elements**. New York: Dover, 1956.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics -** an introduction. New York: Dover, 1993.

MIGUEL, A. **História da matemática em atividades didáticas:** números irracionais. Natal: Editora da UFRN, 2005.

MLODINOW, L. **A janela de Euclides:** a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

NEUGEBAUER, O. **The exact sciences in antiquity.** 2º ed. Providence: Brown University Press, 1957.

POLCINO, F.C. **A geometria na antiguidade clássica**. São Paulo: FTD,1999.

RUSSELL, B. **Introdução à filosofia matemática**. Rio de Janeiro: Zahar Editora, 2006.

RUTHEFORD, W. **Pitágoras**. São Paulo: Mercuryo, 1984.

VLASTOS, G. **O universo de Platão**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1987.

Marco Aurélio Kistemann Jr é Doutorando em Educação Matemática.