ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

CUBO DE RUBIK NA APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

RUBIK CUBE IN MATHEMATICS LEARNING

Sara Domenici – FAECA, SP
sara_domenici@hotmail.com

Claudineia Helena Recco –FAECA, SP
clau_recco@yahoo.com.br

RESUMO: Os alunos em sua maioria não gostam de matemática e, como conseqüência, os professores encontram grande dificuldade em cativá-los. O uso de jogos na metodologia de ensino auxilia o professor a complementar suas aulas, faz com que os alunos se interessem pelas mesmas, pois o jogo estimula o raciocínio, capacita o aluno na elaboração de novas estratégias, ajuda no desenvolvimento da agilidade mental e proporciona um aprendizado matemático de forma divertida e prazerosa. O objetivo do trabalho é mostrar os resultados alcançados com a utilização de jogos no ensino da Matemática. Realizou-se um projeto onde o mesmo foi aplicado no projeto escola da família. A partir da aplicação dos jogos notou-se que os alunos passaram a desenvolver sua capacidade, não só de resolver problemas, mas de encontrar várias maneiras de resolvê-los. Concluindo que os jogos facilitam a aprendizagem, pois desenvolvem a capacidade de pensar, refletir e compreender conceitos matemáticos com maior precisão.

PALAVRAS-CHAVE: Jogos educacionais; Jogos matemáticos; Jogos didáticos.

ABSTRACT: Students in their majority don't like mathematics and, as a consequence, teachers have great difficulty in capturing their attention. The use of games as a teaching methodology helps teachers to complement their classes, making students become interested in them, because games stimulate ratiocination, give students the capacity of elaborating new strategies, help in the mental agility development, and provide mathematical learning in an entertaining and pleasurable way. The goal of this work is to show the reached results through the use of games in mathematics teaching. The project took place at a project called Family School. Beginning from the game application it was noticed that students started to develop their capacity, not only by solving problems, but by finding many ways to solve them. We conclude that games facilitate the learning development of the capacity to think, to reflect and to understand mathematical concepts with larger precision.

KEYWORDS: Educational games; Mathematics games; Didactic games

Introdução

Através de jogos se desenvolvem muitas habilidades e conhecimentos, por isso podem ser mais um dos agentes transformadores da educação se bem utilizados e explorados. Os jogos na educação podem facilitar o processo de ensino - aprendizagem. São prazerosos, interessantes e desafiantes. Podem ser um ótimo recurso didático ou estratégia de ensino e um rico instrumento para a construção do conhecimento. Vêm ganhando espaço dentro das escolas, numa tentativa de trazer o lúdico para dentro da sala de aula. Três aspectos que podem justificar a incorporação do jogo nas aulas: o caráter lúdico, o desenvolvimento de técnicas intelectuais e a formação de relações sociais.

Ao longo da história o ser humano construiu seus conceitos matemáticos por meio da utilização de objetos concretos (pedras, sementes etc.) para contar seus pertences, limitar seu território e construir objetos de utilização pessoal (ARANÃO, 2004, p. 27).

Nenhum educador chegou para o homem primitivo e disse que eles iriam aprender a contar, com certeza isso não aconteceu. Os conceitos matemáticos foram construídos devagar até se chegar ao presente avanço tecnológico.

O mesmo que aconteceu ao homem no decorrer da história, acontece com a criança no decorrer de sua infância até atingir uma fase posterior, quando não necessitará tanto de materiais concretos para construir seu raciocínio matemático, pois já será capaz de abstrair conceitos por meio da interação social, produzir sucessivas transformações em suas estruturas cognitivas (ARANÃO, 2004, p. 27).

A teoria dos jogos tornou-se uma aplicação na lógica matemática dentro do processo de tomada de decisões, pode ser utilizada na economia, na política, na guerra, como nos jogos propriamente ditos, por conflitos de interesses determinando a melhor estratégia para cada jogador. Essa teoria tem a finalidade de prever os movimentos de todos os jogadores, sejam eles concorrentes ou aliados, podem, assim, os jogadores se posicionarem da melhor forma para obter o resultado desejado.

O objetivo da teoria dos jogos é entender a lógica na hora da decisão e ajudar a responder se é possível haver colaboração entre os jogadores, em quais circunstâncias o mais racional é não colaborar e quais estratégias devem ser adotadas para garantir a colaboração entre os jogadores (ABRANTES, 2004, p. 64).

A teoria dos jogos, por meio da Matemática, equaciona os conflitos, logo o foco são as estratégias utilizadas pelos jogadores, pode ser utilizada no ensino da matemática para auxiliar a desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento independente, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. Tal teoria foi encontrada através da busca de alternativas para aumentar a motivação na aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, a organização, a concentração, a atenção, o raciocínio lógico-dedutivo e o senso cooperativo, desenvolver a socialização e aumentar as interações do indivíduo com outras pessoas. E, dessa forma, foi logo estudada e posta em pratica por alguns professores (educadores).

> Através do brinquedo a criança aprende a agir numa esfera cognitivista, sendo livre para determinar suas próprias ações. Segundo ele, o brinquedo estimula a curiosidade e a autoconfiança, proporcionando desenvolvimento da linguagem, do pensamento, da concentração e da atenção (VYGOTSKY, 1989, p. 45).

O uso de jogos e curiosidades no ensino da Matemática faz com que os educando gostem de aprender a disciplina, mudem a rotina das aulas tradicionais aplicadas em classe, pois desperta o interesse do aluno envolvido. Jogar não é estudar nem trabalhar, porque jogando o aluno aprende, sobretudo, a conhecer e compreender o mundo social que o rodeia.

Os jogos são educativos e requerem um plano de ação que permita a aprendizagem de conceitos matemáticos e culturais em geral. Já que os jogos em sala de aula são importantes, é necessário que se crie um horário dentro do planejamento, de modo a permitir que o professor possa explorar todo o potencial dos jogos, processos de solução, registros e discussões sobre possíveis caminhos que poderão surgir (DAMAZIO, 1997, p. 18).

Todos os conjuntos de informação de uma árvore de jogo de informação perfeita são unitários. O que vale dizer que cada parte sabe em qual nó de um jogo seqüencial está. Caso contrário, o jogo é chamado de informação imperfeita. Os participantes que se lembram, a cada rodada, de todos os lances anteriores efetuados desde o início do jogo, possuem memória perfeita, enquanto nos jogos em que não é possível ter toda essa informação do passado, é chamada de memória imperfeita.

> Finalmente, um aspecto relevante nos jogos é o desfio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisa e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver (BRASIL, 1997, p. 49).

Existe uma grande variedade de jogos educacionais, para ensinar conceitos que podem ser difíceis de serem assimilados, pelo fato de não existirem aplicações práticas mais imediatas. O cubo de Rubik, conhecido como cubo mágico, é um jogo que pelo fato de ser um pequeno objeto formado por nove quadrados coloridos em cada uma de suas 6 faces, cujo desafio proposto é colocar 9 quadrados de mesma cor em uma mesma face do cubo, necessita de dedicação e disciplina por parte do jogador. Para isso, o jogador deve realizar vários giros em suas partes móveis, que podem se movimentar tanto na horizontal quanto na vertical.

Nesse jogo existe um problema de organização, no qual o jogador deve ter uma clara definição da situação presente e da situação final desejada, para resolução pode executar uma seqüência de operações, ou pode simplesmente alcançar o objetivo por tentativa e erro.

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

Para verificar o desempenho do jogo cubo mágico no aprendizado do aluno no ensino da matemática realizou-se um projeto onde se ministrou aulas de matemática com o auxilio do cubo. A partir da aplicação dos jogos notou-se que os alunos passaram a desenvolver sua capacidade, não só de resolver problemas, mas de encontrar várias maneiras de resolvê-los.

Concluindo os jogos facilitam a aprendizagem já que desenvolvem a capacidade de pensar, refletir e compreender conceitos matemáticos com maior precisão.

1. Cubo de Rubik

Em 1974, preocupado em ilustrar o conceito da terceira dimensão aos seus alunos, Erno Rubik, professor do Departamento de Desenho de Interiores na Academia de Artes e Trabalhos Aplicados em Budapeste (Hungria), inventou o primeiro protótipo do Cubo de Rubik.

A primeira peça que Rubik criou foi em madeira e pintou cada uma das seis faces com cores distintas, sendo assim quando alguém girasse as faces do cubo, teria uma visualização melhor dos movimentos realizados. Após realizar alguns movimentos e ao tentar voltar o cubo na sua configuração original, Rubik percebeu ter criado um quebra-cabeça, pois demorou um mês para voltar o cubo na configuração original.

No início, Rubik nomeou o quebra-cabeça como Cubo Mágico, porém o nome foi alterado pela Ideal Toys para Cubo de Rubik (WIKIPÉDIA, 2008, p. 2).

2.1. Curiosidades sobre o Cubo de Rubik

Pode-se observar algumas curiosidades a respeito do cubo de Rubik, uma delas é que o cubo possui 43.252.003.274.489.856.000 (43 quintilhões) de combinação possíveis distintas. Se alguém pudesse realizar todas as combinações possíveis a uma velocidade de 10 combinações por segundo, demoraria 136.000 anos, supondo que nunca repetisse a mesma combinação.

O número total de todas as combinações possíveis que nos permite realizar com o cubo de Rubik são as seguintes:

- Pode-se combinar entre si, de qualquer forma, todos os vértices, o que dá lugar a possibilidades.
- Também se tem as combinações dos cubos das arestas e são 12 existindo assim 121 possibilidades.
- Sendo que tem 3 cores em cada cubo do vértice e sendo oito cubos tem-se 3^8 possibilidades, contudo apenas $1/3$ dessas possibilidades procedem.
- Sendo que se tem 2 cores e cada cubo das arestas tem 2^{12} possibilidades, contudo apenas 1/4 dessas possibilidades procedem (WIKIPÉDIA, 2008, p. 4 e 5).

2.2. Conhecendo o Cubo de Rubik

Antes de tentar resolver o cubo é interessante conhecê-lo. A figura 1 mostra o aspecto de um cubo na sua configuração original. Observa-se, na figura 1, que cada face tem um nome diferente, sendo que os mesmos estão descritos na tabela 1. Para não criar confusões com outras resoluções, é recomendado usar a nomenclatura inglesa.

Frente	(**F**)	*Front*
Costas	(**B**)	*Back*
Direita	(**R**)	*Right*
Esquerda	(**L**)	*Left*
Cima	(**U**)	*Up*
Baixo	(**D**)	*Down*

Quadro 1: Nome das faces do cubo
Fonte: Rino (2008, p. 8).

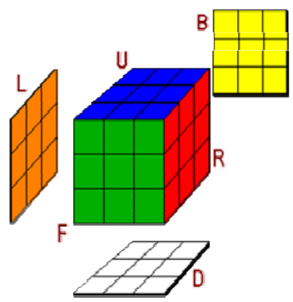

Figura 1: Cubo na configuração original
Fonte: Rino (2008, p. 8).

As cores de cada face são apenas ilustrativas, pois os lados são nomeados segundo a orientação que se tem em mãos. Se

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

girar o cubo em 180º (de ponta cabeça), UP passa a ser DOWN, e DOWN passa a ser UP. Portanto as faces do cubo não estão ligadas às cores, e não guardam o mesmo nome até o fim.

O cubo é formado por seis faces, sendo que cada uma é formada por nove quadradinhos, logo o cubo tem 54 quadradinhos. Cada quadradinho deste pertence a uma peça, cada peça tem seu nome, sua cor e sua posição correta. Existem três tipos de peças: a) Peça Fixa, b) Peça de Aresta e c) Peça de Canto. As peças que compõe o cubo estão descritas a baixo suas quantidades e suas funções (LIMA, 2007, p. 07).

Peça Fixa: Existem seis peças as quais não se movem, as faces giram em torno das peças. A peça fixa determina a cor de cada face e é formada por apenas um quadradinho cuja localização pode ser vista na figura 2.

Peça de Aresta: Existem doze peças as quais são formadas por dois quadradinhos e cada quadradinho tem uma cor, ou seja, cada peça de aresta tem duas cores distintas, a peça de aresta se localiza no meio da aresta da face do cubo, sendo que cada face tem quatro peças de aresta. E uma peça de aresta está presente em duas faces do cubo e sua localização pode ser vista na figura 3.

Peça de Canto: Existem oito peças as quais são formadas por três quadradinhos e cada quadradinho tem uma cor, ou seja, cada peça de canto tem três cores distintas. A peça de canto se localiza no canto do cubo cada face tem quatro peças de canto e uma peça de canto está presente em três faces cuja localização pode ser vista na figura 4.

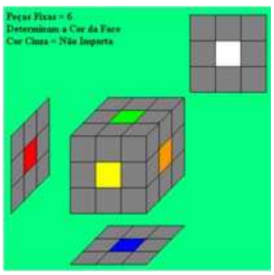

Figura 2: Localização das peças fixas no cubo
Fonte: Lima (2007, p. 10).

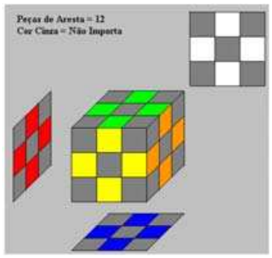

Figura 3: Localização das peças de aresta no cubo
Fonte: Lima (2007, p. 11).

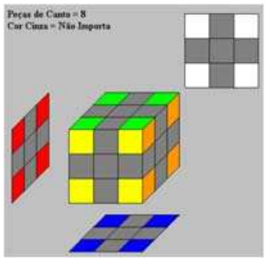

Figura 4: localização das peças de canto no cubo
Fonte: Lima (2007, p. 13).

Durante o movimento do cubo, as peças de canto e as peças de aresta se movimentam e sempre param na posição de outra peça do mesmo tipo, ou seja, a peça de canto sempre pára na posição de outra peça de canto e a peça de aresta sempre para na posição de outra peça de aresta. As peças fixas nunca trocam de posição. Com isso é possível saber onde cada peça está e onde deveria estar. As peças de canto e as peças de aresta também são indivisíveis, ou seja, durante o movimento do cubo cada quadradinho se movimenta junto. Não é possível, por exemplo, a peça de canto 1 estar na posição da peça de canto 3 ou na posição da peça de canto 4 ao mesmo tempo, lembrando que cada peça só pode estar na posição de outra peça de canto uma vez a cada movimento, isso torna necessário explicar para compreender o movimento do cubo (LIMA, 2007, p. 08).

2.2.1. Montagem do Cubo

Mostrou-se no tópico 2.2 que o cubo contém 6 peças fixas, 12 peças do arestas e 8 peças de cantos, no total 26 peças, e cada tipo de peça só se encaixa em um único local, o local do seu tipo de peça.

A combinação de montagem será deduzida partindo da suposição que o cubo foi desmontado e montado novamente, montando-se uma peça de cada vez. Para resolver este problema tem-se que analisar cada peça

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

separadamente podendo assim deduzir a fórmula de maneira intuitiva, usa-se o princípio fundamental de contagem que se aprende junto com análise combinatória.

A análise começa por analisar as peças fixas, lembrando que existem seis dessas peças e que cada uma possui uma única cor. Para as peças denominadas "peças fixas", existem seis locais onde se pode colocá-las. Após escolher um dos locais e colocar a primeira peça, passa-se para a análise da quantidade de lugares para se colocar a segunda peça, nota-se que sobraram cinco locais para a mesma ser colocada e assim sucessivamente até se colocar as seis peças existentes. Seguindo este raciocínio, pode-se deduzir a fórmula matemática (LIMA, 2007, p. 14).

Primeiro, representa-se o raciocínio das quantidades de lugares para cada peça que é feito da seguinte maneira:

$$\begin{array}{l} \underbrace{6}_{\substack{\text{numero de lugares}\\ \text{para a peça 1}}} \mid \underbrace{5}_{\substack{\text{numero de lugares}\\ \text{para a peça 2}}} \mid \underbrace{4}_{\substack{\text{numero de lugares}\\ \text{para a peça 3}}} \mid \\ \underbrace{3}_{\substack{\text{numero de lugares}\\ \text{para a peça 4}}} \mid \underbrace{2}_{\substack{\text{numero de lugares}\\ \text{para a peça 5}}} \mid \underbrace{1}_{\substack{\text{numero de lugares}\\ \text{para a peça 6}}} \end{array} \qquad (1)$$

Após a representação acima se pode deduzir o número de possibilidades de montá-las, para as seis peças fixas tem-se:

$$6! = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720. \qquad (2)$$

A peça fixa só tem uma cor, então, é necessário se preocupar apenas com o lugar onde a peça será colocada.

Analisando a peça de aresta, é preciso lembrar que existem doze peças dessas e cada uma tem duas cores. Seguindo o raciocínio anterior, para colocar a primeira peça existem doze locais disponíveis, escolhe-se um dentre os 12 locais e coloca-se a peça de aresta. Porém a peça tem duas cores, então para cada local existem duas combinações a mais, para a segunda peça existem onze locais a serem escolhidos, escolhe-se um e coloca-se a peça.

A dedução da fórmula é feito através da representação desse raciocínio. Como no caso anterior, primeiro se representa o raciocínio para os 12 lugares da peças de aresta como segue:

$$\underbrace{12}_{\substack{\text{numero de lugares}\\ \text{para a peça 1}}} \mid \underbrace{11}_{\substack{\text{numero de lugares}\\ \text{para a peça 2}}} \mid\cdots\mid \underbrace{1}_{\substack{\text{numero de lugares}\\ \text{para a peça 12}}} . \qquad (3)$$

Feita essa representação, deduz-se a fórmula do número de possibilidades de montá-las como segue:

$$12! = 12\times11\times10\times...3\times2\times1 = 479.001.600. \qquad (4)$$

Porém, cada peça de aresta tem duas cores. O que significa que cada local onde se coloca a peça de aresta existem mais duas combinações. Representação do raciocínio:

$$\begin{array}{l} 12\times2\mid11\times2\mid10\times2\mid9\times2\mid8\times2\mid7\times2\mid \\ 6\times2\mid5\times2\mid4\times2\mid3\times2\mid2\times2\mid1\times2. \end{array} \qquad (5)$$

O termo "x2" significa que cada peça de aresta possui 2 cores para cada posição a ser colocada, gerando a seguinte fórmula:

$$\begin{array}{l} 2^{12} = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 \\ \times2\times2 = 4.096 \end{array} . \qquad (6)$$

Unindo as fórmulas (4) e (6), tem-se o número de possibilidades em que se podem montar as peças de aresta do cubo mágico que é:

$$2^{12}\times12! = 1.961.990.553.600. \qquad (7)$$

Após terminar a análise das peças de arestas, pode-se fazer a análise das peças de canto, que são em número de oito peças e cada peça possui três cores diferentes, seguindo o raciocínio feito para as peças de aresta para a primeira peça de canto, existem oito locais disponíveis dos quais se escolhe um e posiciona-se a primeira peça, porém a peça tem três cores diferentes o que ocasiona três combinações a mais, o mesmo vale para a segunda peça, para a terceira e assim sucessivamente até posicionar as oito peças, cuja representação do raciocínio é:

$$\begin{array}{l} \underbrace{8}_{\substack{\text{númerode lugares}\\ \text{parapeça1}}} \mid \underbrace{7}_{\substack{\text{númerode lugares}\\ \text{parapeça2}}} \mid \underbrace{6}_{\substack{\text{númerode lugares}\\ \text{parapeça3}}} \mid \\ \cdots\mid \underbrace{1}_{\substack{\text{númerode lugares}\\ \text{parapeça8}}} \end{array} . \qquad (8)$$

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

O raciocínio descrito em (8) dá a seguinte fórmula:

$$8! = 8 \times 7 ... \times 3 \times 2 \times 1 = 40.320 \ . \quad (9)$$

Porem, cada peça de canto tem três cores, isso significa que para cada local onde a peça é colocada, existem três combinações a mais, representadas por:

$$8{\times}3|7{\times}3|6{\times}3|5{\times}3|4{\times}3|3{\times}3|2{\times}3|1{\times}3. \quad (10)$$

O termo "x3" significa que cada peça de aresta possui 3 cores para cada posição a ser colocada, gerando a seguinte fórmula:

$$3^8 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 6561. \quad (11)$$

Unindo as fórmulas (9) e (11), têm-se o número de possibilidades em que se podem montar as peças de canto do cubo mágico que é:

$$3^8 \times 8! = 264.539.520. \quad (12)$$

Seguindo o raciocínio descrito acima para o cubo mágico completo, o número de possibilidades em que se podem montar todas as peças é igual às possibilidades de montagem das peças fixas equação (2) vezes às possibilidades de montagem das peças de aresta equação (7) vezes as possibilidades de montagem das peças de canto equação (12).

$$\begin{array}{l} 6! \times 2^{12} \times 12! \times 3^8 \times 8! = \\ 373.697.308.291.592.355.840.000 \end{array} . \quad (13)$$

A demonstração da combinação de montagem do cubo mágico foi dada para que se possa entender como se chega a uma combinação de movimento do cubo mágico, e é esta combinação que realmente importa, observando que é difícil entender sua dedução (LIMA, 2007, p. 17).

2.2.2. Movimento do Cubo

A quantidade de combinação de movimento do cubo foi deduzida partindo da suposição de que o cubo está montado com as cores corretas podendo assim mostrar quantas combinações é possível obter com o movimento do cubo, sem desmontar as peças. Para iniciar a análise de combinação de movimentos do cubo, é necessário conhecer os possíveis movimentos do mesmo.

Os possíveis movimentos do cubo são girar as suas seis faces: (a) no sentido horário (da esquerda para direita); (b) no sentido anti-horário (da direita para esquerda). Existem 4 tipos de movimentos para cada face do cubo, os quais podem ser visto na quadro 2.

No sentido dos ponteiros do relógio.	( )	Clockwise
No sentido oposto aos ponteiros do relógio.	(')	counter-clockwise
Meia volta	(2)	
n rotações clockwise	(n)	

Quadro 2: Tipos de movimentos do Cubo

As peças de canto e as peças de aresta são as peças necessárias para se chegar à combinação de movimento. Já as peças fixas não influenciam, pois não se deslocam. Sendo assim começa por analisar as peças de canto.

Estudou-se no tópico 2.2.1 que o número de possibilidades que se tem para montar as peças de canto do cubo mágico é $3^8 \times 8!$ (equação 12).

Se com apenas os movimentos do cubo forem colocadas seis peças de canto nos locais corretos, ao se colocar as peças de números sete e oito, automaticamente as mesmas se encaixarão no canto correto, não permitindo que as peças sejam deslocadas.

É impossível mudar uma peça de canto sem alterar as demais peças. O fato de cada peça conter três cores distintas causa um problema na dedução da fórmula, para resolver este problema divide-se o número de possibilidades de combinação de cores por três que é o número de cores de cada peça, o que fornece o novo resultado (LIMA, 2007, p.20):

$$3^8 / 3 = 3^7 . \quad (14)$$

Sabe que o número de possibilidades de posição dos cantos são 8!, e fazendo a junção com a equação 14, tem-se a seguinte fórmula (LIMA, 2007, p.20):

$$3^7 \times 8! = 88.179.840. \quad (15)$$

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

Estudou-se no tópico 2.2.1 que o número de possibilidades em que se pode montar as peças de aresta do cubo mágico é $2^{12} \times 12!$.

Uma vez colocadas as nove peças de aresta no local correto, usando apenas os movimentos do cubo, quando se coloca a peça de número dez, conseqüentemente as peças de número onze e doze ficam numa posição fixa.

De forma análoga às peças de canto, as peças de aresta também apresentam o problema ocasionado pelo número de cores que são em número de duas cores distintas. Para solucionar este problema, divide-se o número de possibilidades de combinação de cores por dois, que é o número de cores de cada peça, o que fornece o novo resultado (LIMA, 2007, p.21):

$$2^{12}/2 = 2^{11}. \qquad (16)$$

Além do problema ocasionado pelo número cores, as peças de arestas apresentam um segundo problema ocasionado pela posição das peças, que também precisa ser corrigido, esta correção é feita dividindo 12! por 2, isto é, divide-se o número de possibilidades de posição pelo número peças que tem posição fixa, isto é:

$$\frac{12!}{2}. \qquad (17)$$

Fazendo a junção das fórmulas dadas pelas equações 15 e 16, tem-se que o número de combinações de movimento das peças de aresta é:

$$2^{11} \times \frac{12!}{2} = 490.497.638.400. \qquad (18)$$

Quando se movimenta as peças de canto, as peças de aresta se movimentam ao mesmo tempo, tornando a recíproca verdadeira. É impossível movimentar uma peça sem que a outra se movimente. Logo, o número da combinação de movimentos do cubo é o número de combinação de movimento das peças de canto vezes o número de combinação de movimento das peças de aresta, isto é:

$$3^7 \times 8! \times 2^{11} \times \frac{12!}{2} = 43.252.003.274.489.856.000 \qquad (19)$$

Portanto, com apenas os movimentos do cubo mágico, pode-se obter mais de 43 quintilhões de combinações de movimento. Quando o cubo está desorganizado, é possível organizá-lo com uma destas combinações (LIMA, 2007, p.21).

3. Solução do Cubo de Rubik

Mostra-se no início do item 2.2, *Conhecendo o Cubo de Rubik*, que as faces do cubo são representadas pelas letras F (Front), B (Back), R (Right), L (Left), U (Up) e D (Down), explica o que é peça de canto, peça de aresta e peça fixa e como as mesmas funcionam.

No tópico 2.2.2, *Movimento do Cubo,* mostraram-se os tipos de movimento possíveis para o cubo.

Neste momento é necessário mostrar que cada cubinho que compõe o cubo tem um nome, para tal observa-se na figura 5 que bastam os nomes dos lados para nomear os cubinhos:

a) os cubinhos de aresta estão em 2 lados, por isso herdam os nomes desses lados (cubinho UF),

b) os cubinhos de esquina estão em 3 lados, logo o seu nome e composto por 3 letras (cubinho FRD).

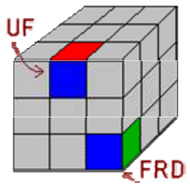

Figura 5: Posições dos cubinhos
Fonte: Rino (2008, p. 2).

Para encontrar a solução do cubo será utilizado o método de resolução por camada. O método é iniciado escolhendo uma das cores do cubo. Para uma explicação mais detalhada, escolhe-se a cor branca, por ser uma das cores que mais se destaca. Nesse passo, o objetivo é formar uma cruz num dos lados do cubo.

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

Observe na figura 6 que as cores dos lados adjacentes devem corresponder a cor dos cubinhos que formam a cruz.

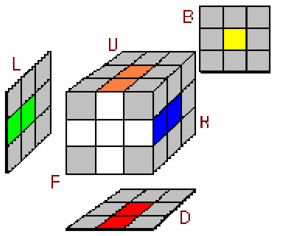

Figura 6: Configuração em que o cubo deve ficar após realizar o primeiro passo
Fonte: Baseado em Rino (2008, p. 2).

Para montar o primeiro passo, não é necessário utilizar fórmulas, pois essa é a parte mais fácil do processo de resolução do cubo. Realizar o primeiro passo da resolução do cubo sem fórmulas serve como treinamento do raciocínio lógico. Caso não consiga, segue a montagem da cruz passo a passo (primeiro passo da resolução do cubo).

1. Se a cor F está do lado B do cubinho, cubinho, aplica-se $\mathbf{U^2}$ e se a cor F está do lado R do cubinho, aplica-se **R'U,** como mostra a figura 7.

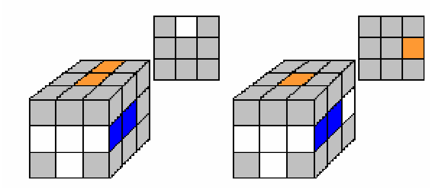

Figura 7: Configuração em que podem se encontrar durante a montagem da cruz
Fonte: Baseando em Rino (2008, p. 3).

2. Se a cor F está do lado R do cubinho, aplica-se **U** até que a posição desejada para o cubinho seja UF e se a cor F esta do lado U aplicar $\mathbf{F^n}$ até que a posição desejada para o cubinho seja FR; aplica-se $\mathbf{R'\ F^{-n}}$, como mostra a figura 8.

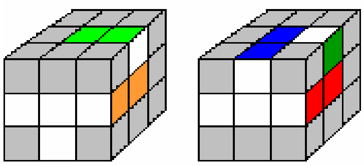

Figura 8: Configuração em que podem se encontrar os cubinhos durante a montagem da cruz
Fonte: Baseado em Rino (2008, p. 4).

3. Se o cubinho UF esta no lugar correto, porém em posição invertida, aplica-se **U' + F R' F',** e se o cubinho FR esta no lugar do cubinho FU, aplica-se **U' F' U F,** como se pode ver na figura 9.

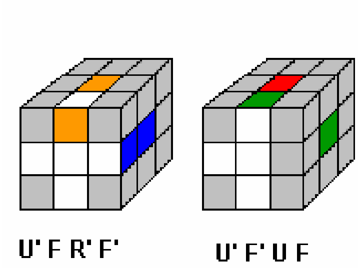

Figura 9: Configuração em que podem se encontrar os cubinhos durante a montagem da cruz
Fonte: Baseando em Rino (2008, p. 4).

No segundo passo, o objetivo é completar os cubinhos de canto. Será necessário completar apenas 3 cantos, pois o canto que sobra será usado como canto pivô.

Oriente o cubo de forma que a cor branca fique na face U, conseqüentemente a cor amarela ficará na face D, como se pode ver na figura 10.

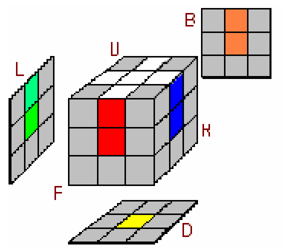

Figura 10: Posição que se deve ficar o cubo durante a montagem dos cantos
Fonte: Baseado em Lima (2008, p. 28).

Se o cubinho FUR encontra-se na camada D, deve orientá-lo até que a posição desejada seja **FDR**.

4. Se a cor U está do lado F do cubinho, aplica-se **D'R'DU,** como exemplifica a figura 11.

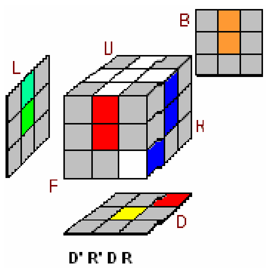

Figura 11: Configuração em que podem se encontrar os cubinhos durante a montagem dos cantos
Fonte: Baseado em Lima (2008, p. 28).

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

5. Se a cor U está do lado R do cubinho, aplica-se **R' D' R,** como mostra a figura 12.

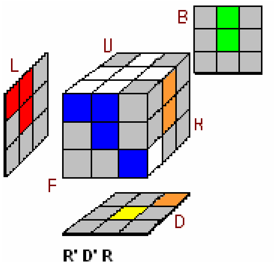

Figura 12: Configuração em que podem se encontrar os cubinhos durante a montagem dos cantos.
Fonte: Baseado em Lima (2008, p. 28).

Se a cor U está do lado R do cubinho, aplica-se **R'D'R+R'D'R,** como mostra a figura 13.

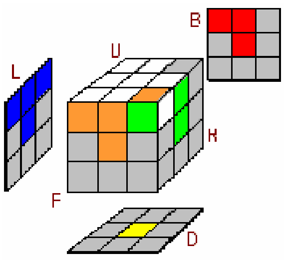

Figura 13: Configuração em que podem se encontrar os cubinhos durante a montagem dos cantos.
Fonte: Baseado em Lima (2008, p. 33).

6. Se a cor U está do lado F do cubinho, aplica-se **R' D R + D' R' D R,** como exemplifica a figura 14.

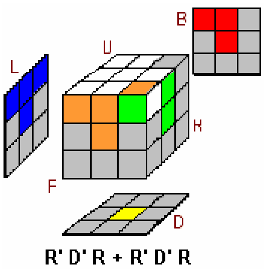

Figura 14: Configuração em que pode se encontrar os cubinhos durante a montagem dos cantos
Fonte: Baseado em Lima (2008, p. 33).

7. Se a cor U está na face D do cubinho, aplica-se **D R D' R' + D' R' D R,** como se pode ver na figura 15.

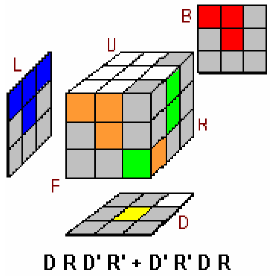

Figura 15: Configuração em que podem se encontrar os cubinhos durante a montagem dos cantos
Fonte: Baseado em Lima (2008, p. 33).

A figura 16 mostra a configuração do cubo, após realizar o segundo passo.

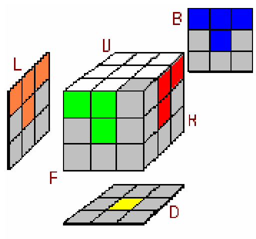

Figura 16: Configuração em que o cubo deve obter após realizar o segundo passo.
Fonte: Baseado em Lima, (2008, P. 33).

No terceiro passo, o objetivo é colocar os três cubinhos de arestas da camada central no lugar correto. O cubinho que sobra vai ser chamado aresta pivô, e ficará por cima do canto pivô. Oriente o cubo de forma que a cor branca fique na face D do cubo, como conseqüência a parte amarela ficará na face U. Se o cubinho se encontra na camada superior (U), oriente o cubo de forma que a posição desejada seja **FR,** agora rode a camada inferior (D) de modo que o canto pivô fique em **FRD** (embaixo do espaço que se quer ocupar)**.**

8. Se a cor R está do lado U do cubinho, roda-se a camada superior até que o cubinho esteja em UR e aplica-se **F' U F,** como se pode ver na figura 17.

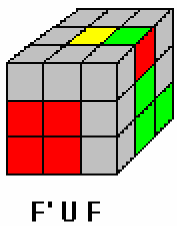

Figura 17: Configuração em que podem se encontrar os cubinhos durante a montagem das arestas da camada central
Fonte: Baseado em Rino (2008, p. 6).

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

9. Se a cor F está do lado U do cubinho, roda-se a camada superior até que o cubinho esteja em UF, e aplica-se **R U' R'**, como exemplifica a figura 18.

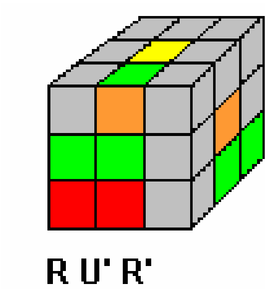

Figura 18: Configuração em que podem se encontrar os cubinhos durante a montagem das arestas da camada central
Fonte: Baseado em Rino (2008, p. 6).

10. Se o cubinho se encontra na camada do meio, oriente-o de forma que o cubinho que quer enviar para o espaço desejado fique na posição FR. Depois movimente a camada inferior até que o canto pivô fique na posição FRD, (de baixo do cubinho),

No quarto passo, o objetivo é formar uma cruz na camada superior (U) e preencher a aresta pivô. A aresta pivô pode ser preenchida no final. Supondo-se que o cubinho esteja na aresta pivô (FR):

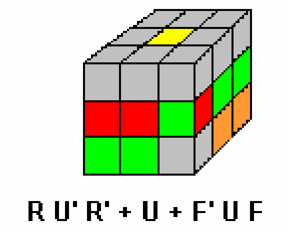

Figura 19: Configuração em que podem se encontrar os cubinhos durante a montagem das arestas da camada central
Fonte: Baseado em Rino (2008, p. 6).

11. Se a cor U está do lado F do cubinho, roda-se a camada superior até que a posição desejada esteja em UR, e aplica-se **R U^n R'**, como se exemplifica na figura 20.

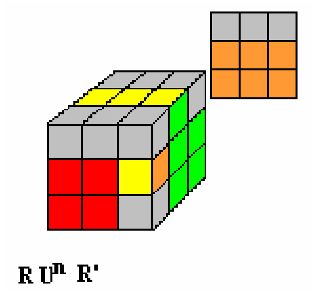

Figura 20: Configuração em que podem se encontrar os cubinhos durante a montagem da cruz na camada superior
Fonte: Baseado em Rino (2008, p. 7).

12. Se a cor U está do lado R do cubinho, roda-se a camada superior até que a posição desejada esteja em UF e aplica-se **F' U^n F**, como se exemplifica na figura 21.

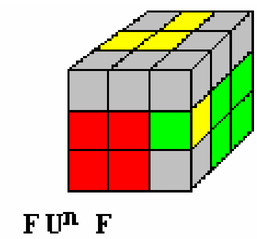

Figura 21: Configuração em que podem se encontrar os cubinhos durante a montagem da cruz na camada superior.
Fonte: Baseado em Rino (2008, p. 7).

Se o cubinho se encontra na camada superior, terá que movê-lo para aresta pivô.

13. Se a cor U esta na face U, roda-se a camada superior até que a posição desejada seja **UF** e aplica-se **R U' R' + U + R U' R',** como se exemplifica na figura 22.

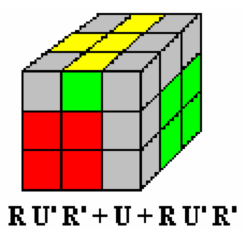

Figura 22: Configuração em que podem se encontrar os cubinhos durante a montagem da cruz na camada superior
Fonte: Baseado em Rino (2008, p. 7).

Para as peças de arestas estarem todas na posição correta, falta colocar as peças UF e a aresta pivô.

14. Se os cubinhos estão no sítio certo, mas mal orientados, aplicar-se **RU'RUF'UFU'.**

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

15. Se os cubinhos estão no sítio errado, contudo bem orientados (os seus lados F são da mesma cor), aplicar-se **U'F'FU'F'U'FU'**.

16. Se os cubinhos estão no sítio errado, e mal orientados, aplicar-se **RUR'URUR'U^2.**

A figura 23 mostra os três casos 15, 16 e 17 anteriores.

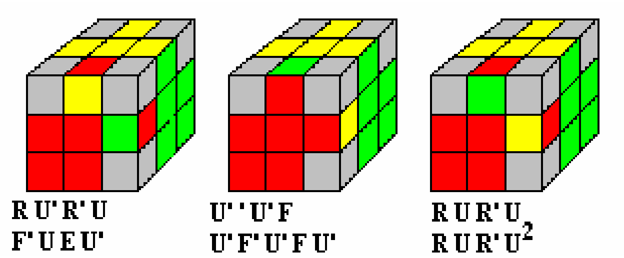

Figura 23: Configuração em que podem se encontrar os cubinhos durante a montagem da cruz na camada superior
Fonte: Baseado em Rino (2008, p. 6).

No quinto passo, o objetivo é montar os cantos, primeiro deve colocar os cantos no sito certo, não é necessário que os cubinhos fiquem corretamente orientados (o cubinho pode estar no lugar certo, mas com as cores invertida). Oriente o cubo de forma que o canto pivô fique na posição **RBD.**

17. Rode a camada superior até que o cubinho a ser orientado fique na posição UFL, aplica **L D^2 L'**, o que troca o cubinho UFL com o pivô, em seguida rode a camada superior, até que o espaço certo para o cubinho fique em UFL. Aplique **L D^2 L'** para trocar o cubinho que está no canto pivô com UFL.

18. Repita a passagem 18, até que todos os cubinhos fiquem na posição desejada, como se exemplifica na figura 24.

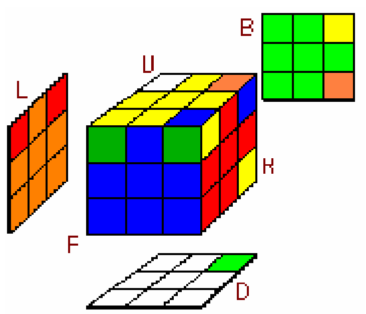

Figura 24: Configuração em que podem se encontrar os cubinhos durante a montagem dos cantos na camada superior.
Fonte: Baseado em Rino (2008, p. 8).

Falta apenas orientar os cubinhos para que fiquem todos na posição desejada. Nesse passo, é necessário escolher dois cubinhos, um que necessite de uma rotação no sentido dos ponteiros do relógio, e outro no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

Observe os cubinhos do canto da face **F** na figura 25, um necessita de rotação no sentido dos ponteiros do relógio e outro no sentido contrário.

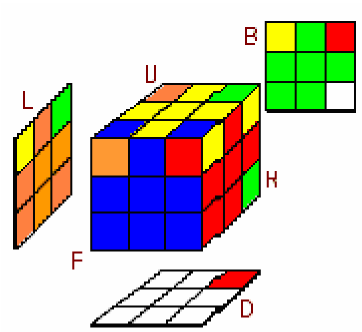

Figura 25: Configuração em que podem se encontrar os cubinhos após colocar os cubinho de canto no local correto
Fonte: Baseado em Rino (2008, p. 8).

19. Se necessitar de rotação no sentido dos ponteiros do relógio, aplica-se **L D^2 L' F' D^2 F.**

20. Se necessitar de rotação no sentido oposto aos dos ponteiros do relógio, aplica-se **F' D^2 F L D^2 L'**.

A figura 26 mostra como pode ficar o cubo após aplicar a primeira parte da fórmula. Observe que o cubo ficou todo baralhado, causando a impressão de que alguma coisa deu errada, isso é normal, pois ainda falta a segunda parte da fórmula.

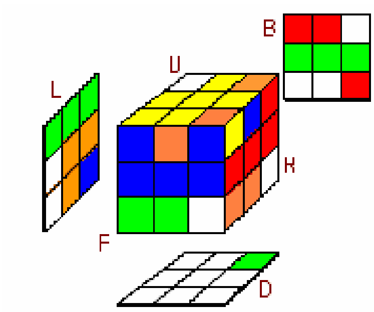

Figura 26: Configuração em que podem se encontrar os cubinhos após aplicar a primeira parte da fórmula
Fonte: Baseado em Rino (2008, p. 8).

Gire a face U até que o próximo cubinho a ser arrumado fique em **LFU**, aplicar a segunda parte da fórmula.

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

Para finalizar, restam apenas três cantos para ocuparem a posição correta e para chegar a essa posição aplicam-se as passagens 19 e 20 até que o cubo fique com a configuração inicial como mostra a figura 27.

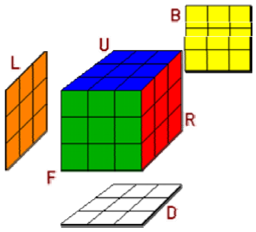

Figura 27: Configuração inicial do cubo.
Fonte: Rino (2008, p. 8).

4. Projeto Brincando com a Matemática

O projeto *Brincando com a Matemática* originou-se para cumprir as horas de estágio de regência estabelecidas pela Faculdade de Ciências e Arte Dom Bosco, para o curso de licenciatura em Matemática, pelas alunas Sara Domenici e Carina Brabo da Silva.

Durante as horas de estágios em que as alunas desenvolviam regências tiveram a idéia de desenvolver o projeto, pois se observou uma grande dificuldade e falta de interesse por parte dos alunos do ensino fundamental pela disciplina de Matemática. Essa falta de interesse mostrou a necessidade de formar um grupo de estudo junto aos alunos para auxiliá-los no aprendizado da Matemática.

O projeto foi aplicado aos sábados, ocasionando alguns obstáculos, sabe-se que para o professor é difícil manter os alunos motivados e com interesse pela disciplina em horário normal de aula, porém fazer com que os mesmos fossem à escola aos sábados também seria uma tarefa ainda mais difícil, pois, para os alunos, ir à escola no final de semana representava um tempo a menos para brincar. Assim surgiu a idéia do projeto *Brincando com a Matemática*, pois se o aluno gosta de brincar, por que não brincar com a Matemática? Unindo o útil ao agradável.

Após o surgimento da idéia, veio a fase de elaboração e divulgação do projeto pelas alunas responsáveis, a divulgação foi feita nas salas de aula do Ensino Fundamental. O projeto teve início no dia 02 de junho de 2007, na Escola Estadual Álvaro Duarte de Almeida, no programa Escola da Família[1], na cidade de Cosmorama – SP, com duração de 6 meses.

O projeto *Brincando com a Matemática* teve como objetivo tirar as dúvidas dos alunos na disciplina de Matemática. Ao iniciar o projeto, notou-se uma grande dificuldade por parte dos alunos com relação aos conteúdos aplicados pelos professores durante a semana. O fato que causou maior polêmica durante a aplicação dos jogos foi os alunos do ensino fundamental não terem conhecimento da tabuada, sendo esta a base para o aprendizado da disciplina, pois isso causa dificuldades no aprendizado das quatro operações básicas que regem a Matemática. Devido a esse fato, a primeira etapa a ser trabalhada foi a tabuada, por ser um dos alicerces da Matemática. Para a realização do projeto, foram aplicados alguns jogos como a tabuada na árvore, jogo da velha, Cubo de Rubik, entre outros. As aulas eram divididas em três partes, como descritas a seguir:

- 1ª parte: aplicavam-se os jogos de tabuada;
- 2ª parte: fazia-se uma revisão do conteúdo trabalhado pelo professor durante a semana, para então aplicar os jogos didáticos envolvendo tais conteúdos;
- 3ª parte: aplicavam-se alguns jogos de raciocínio lógico e alguns desafios para estímulos dos alunos, como mostram as figuras 29 a 33.

Durante a aplicação dos jogos em particular na aplicação do Cubo de Rubik ou cubo mágico, a estagiária demonstra o processo de solução do cubo, o mesmo pode ser visto nas figuras 28, 29e 30.

[1] O Programa Escola da Família foi criado no dia 23 de agosto de 2003 pela Secretaria de Estado da Educação do Estado de São Paulo. O programa proporciona a abertura de escolas da Rede Estadual de Ensino aos finais de semana com o objetivo de criar uma cultura de paz, despertar potencialidade e ampliar os horizontes culturais de seus participantes.

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

Figura 28: Explicação passo a passo da solução do Cubo de Rubik
Fonte: Própria (2007).

Figura 29: Demonstração da solução do Cubo de Rubik
Fonte: Própria (2007).

Figura 30: Comparação dos casos de solução
Fonte: Própria (2007)

Nas figuras 31 e 32, podem ser vistos alguns alunos desenvolvendo o processo de solução do Cubo de Rubik com o auxílio da estagiária. No final de cada aula, era apresentado um novo desafio para a aula seguinte, o que despertava a curiosidade dos alunos com intuito de que os mesmos retornassem à escola no sábado seguinte.

Figura 31: Alunos participantes do projeto, desenvolvendo o processo de resolução do Cubo de Rubik
Fonte: Própria (2007).

Figura 32: Auxiliando o aluno na resolução do Cubo de Rubik
Fonte: Própria (2007).

5. Resultados

O projeto teve duração de seis meses, o que foi suficiente para que as alunas notassem diferença nos alunos, pois com os jogos no ensino-aprendizado da Matemática os alunos ficaram mais críticos, com o raciocínio lógico treinado e aprenderam a importância das regras, já que todos os jogos têm regras, inclusive o jogo da vida.

O crescimento dos alunos pôde ser notado pelos professores, pela diretora da escola e pelos pais dos alunos, o que levou o projeto ao conhecimento da delegacia de ensino de Votuporanga (delegacia de ensino à qual a escola pertence). Os pais dos alunos notaram um grande interesse por parte dos alunos em aprender Matemática e inclusive em participar do projeto, que era realizado aos sábados.

Dentre a aplicação dos jogos se destaca o Cubo de Rubik, que ficou sob a responsabilidade da aluna Sara. Com o auxílio

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

do cubo de Rubik, os alunos tiverem um crescimento significante no desenvolvimento do raciocínio ao trabalhar com fórmulas matemáticas, não apenas decorando-as, mas entendendo como deduzi-las, usá-las e seu funcionamento. O cubo é um brinquedo que requer inteligência, habilidades, e muito raciocínio, e isso o faz interessante, um desafio para os alunos.

Durante a aplicação do projeto, todos os alunos se comportavam de forma favorável e aceitaram o projeto não só pelo fato de estarem brincando, mas pelo fato de perderem o medo de trabalhar e aprender a Matemática. Após o término do projeto, obteve-se o depoimento de um dos alunos, Diego Minucelli Garcia, que afirma que:

> O projeto *Brincando com a Matemática* foi muito estimulante, principalmente no período pré-vestibular. Onde consegui me controlar diante de tanta pressão que é muito difícil. Com o auxílio dos exercícios propiciados pelos jogos, conseguia me concentrar no momento em que fazia uma prova sendo elaborada com questões nas questões diversificadas e além de obter tranqüilidade suficiente para respondê-las, já que uma boa concentração remete à calma. Fico contente ao lembrar o quanto os exercícios feitos no projeto foram úteis durante o período do vestibular. Raciocínio lógico e concentração, que eram fatores os quais não dispunha, foram supridos pelo projeto. Se hoje passei no vestibular, parte desse merecimento devo ao projeto *Brincando com a Matemática*.

Além do Aluno Diego, outros alunos também se lembraram de como tiveram sua visão a respeito da Matemática modificada após a participação do projeto. As mudanças não só ocorreram dentro da sala de aula, mas na vida pessoal dos alunos: auxiliou alguns dos alunos a se policiarem no controle pessoal assim como na concentração, a manter a calma e até auxiliou na aprovação no vestibular como mostra o depoimento descrito.

Considerações finais

Pela análise do desenvolvimento do projeto *Brincando com a Matemática,* pode-se concluir que jogos educativos além de serem divertidos, dão destaque ao lúdico, quando usados pedagogicamente, auxiliam os educandos na criação e familiarização de conhecimentos.

A teoria dos jogos com regras trata da determinação de estratégias, custos e benefícios e de situações de equilíbrio dos jogadores. A utilização do jogo na aula de Matemática, também pode permitir uma abordagem informal de conceitos matemáticos. O jogo pode ser um ótimo recurso didático ou estratégia de ensino para os educadores e pode ser um rico instrumento para a construção do conhecimento.

O jogo é uma forma com a qual a criança pode manejar experiências, criar situações para dominar a realidade e prová-la. A brincadeira com jogos se coloca num patamar importantíssimo para a felicidade e realização da criança, no presente e no futuro. A criança explora o mundo, constrói o seu saber, aprende a respeitar o outro, desenvolve o sentimento em grupo, ativa a imaginação e se auto-realiza.

Os jogos educativos podem facilitar o processo de ensino-aprendizagem e ainda serem prazerosos, interessantes e desafiantes. Destacam-se os jogos como um recurso a mais a ser construído e explorado com os alunos, pois age positivamente no processo de ensino e aprendizagem. Os jogos, utilizados de forma adequada e com mediação por parte dos educadores, podem ser mais um agente transformador, enriquecer as aulas de forma divertida e animada, porque brincar pode levar a aprender e é muito mais prazeroso.

O intuito desse trabalho foi mostrar a importância dos jogos durante as aulas, tornando-as mais agradáveis, o que pode levar o aluno a enfrentar situações conflitantes no cotidiano com maior raciocínio e crítica. Destacou-se, em particular, o Cubo de Rubik, mais popularmente conhecido no Brasil como Cubo Mágico, um brinquedo que desafia a lógica e a velocidade das reações humanas, desenvolve o raciocínio lógico rápido. O projeto não teve atuação apenas no período de estágio das alunas, mas também após e na vida particular dos alunos, pois os auxiliou a manter o controle pessoal, a concentração, a calma, o que trouxe grandes benefícios para sua vida escolar e particular.

ISSN 1676-8868
Revista de Educação Matemática – vol. 11, n. 13, 2008

Referências

ARANÃO, IVANA V. D. **A Matemática através de Brincadeira e Jogos**. Campinas: Papirus, 1996, p. 64.

ABRANTES, Maria Luísa**. A Teoria dos Jogos e os Oligopólios.** Luanda, 2004, p. 120. Disponível em: <http://www.caaei.org/anexos/33.pdf>. Acesso em: 21 set. 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**. Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998, p.148.

DAMAZIO, Ademir. Cognição matemática em sala de aula: uma abordagem histórico-cultural. **Revista Educação**, v. 22, n. 1, 1997, p.160.

LIMA, A. A. L. **Cubo mágico**: a solução computacional. 2007. Disponível em: <http:// geocities.yahoo.com.br/adriano_antonio_lima>. Acesso em: 16 de novembro de 2008.

RINO, B. **Solução do Cubro Rubik** (A.B.A. CUBO MAGICO). Disponível em: <http://www. insertsolutions.com/rubik/rubik.pdf >. Acesso em: 16 nov. 2008.

TAHAN, M. **O homem que calculava**. Rio de Janeiro: Record, 1968, p.190.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente.** São Paulo: Martins Fontes, 1989, p.191.

WIKIPÉDIA. **Cubo de Rubik.** Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Cubo_de_Rubik&oldid=12687365>. Acesso em: 30 set. 2008.

Claudineia Helena Recco é Professora da Fac. Ed. Ciências e Artes Dom Bosco de Monte Aprazível – FAECA; Graduada em Matemática pela UNESP - SJRP, Mestre em Matemática Aplicada pela UNESP - SJRP e doutoranda em Engenharia Mecânica pela UNICAMP