DOI: http://dx.doi.org/10.17921/2176-5634.2018v11n2p130-144

Sobre o Ensino de Integrais Generalizadas (IG): um Contributo da Engenharia Didática

On the Teaching of Generalized Integrals (GI): a Didactical Engineering Contribution

Francisco Regis Vieira Alves[a]*; Marlene Alves Dias[b]; Maria Vanísia Mendonça de Lima[a]

[a]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Ensino de Ciências e Matemática. CE, Brasil.
[b]Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação Matemática. SP. Brasil.
*E-mail: fregis@gmx.fr
Submetido em: jan. 2018; Aceito em: abr. 2018

Resumo

O presente trabalho constitui os dados parciais de uma investigação envolvendo o tema Integrais Generalizadas (IG´s). Uma vez que as integrais generalizadas configuram um pre-réquisito para o estudo do processo de generalização da noção de integral, com o arrimo da Engenharia Didática (ED) o trabalho apresenta os dados preliminares a respeito das fases previstas pelo referido design de investigação em Didática da Matemática. Assim, num contexto de ensino de um curso de licenciatura em Matemática, no Instituto Federal de Educação do Estado do Ceará e com a participação de seis alunos, são abordados apenas os dados produzidos por três alunos, diante das situações dialéticas de ensino indicadas pela Teoria das Situações Didática (TSD). Ademais, ao assumir uma perspectiva afetada pela Transição Interna do Cálculo (TINC), os dados evidenciam o papel imprescindível da visualização estimulada pelo uso do software GeoGebra, tendo em vista a mobilização de conhecimentos tácitos e intuitivos que extrapolam os limites lógico-formalizantes e estruturais da teoria do Cálculo em uma variável real. Os dados produzidos pelos estudantes confirmam um entendimento dinâmico da noção de convergência. Por fim, o estudo visa proporcionar resultados para ulteriores pesquisas no contexto da TINC.
Palavras-chave: Integrais generalizadas. Engenharia Didática. Ensino. Visualização.

Abstract

The present work constitutes the partial data of research involving the topic Generalized Integrals (GI). Since generalized integrals are a prerequisite for the study of the generalization process of the notion of integral, with the support of the Didactic Engineering, the paper presents the preliminary data regarding the phases predicted by said research design in Didactics of Mathematics. Thus, in a teaching context of a degree course in Mathematics, in the Federal Institute of Education of the State of Ceará and with the participation of 6 students, it only addresses the data produced by three students, in view of the dialectical situations of teaching indicated by the Theory of Didactic Situations (TSD). In addition, assuming a perspective affected by the Internal Transition of Calculus (TINC), the data show the essential role of visualization stimulated by the use of software GeoGebra, in order to mobilize tacit and intuitive knowledge that extrapolates logical-formalizing limits and structural calculations of the theory of Calculus in a real variable. The data produced by the students confirm a dynamic understanding of the notion of convergence. Finally, the study aims to provide results for further research in the context of the TINC.
Keyword: *Generalized integrals, Didactical engineering, Teaching, Visualization.*

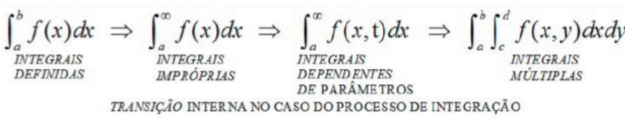
1 Introdução

Reconhecidamente, o período de estudos acadêmicos envolvendo os conteúdos de Matemática proporciona uma série de entraves e dificuldades aos estudantes. Alguns assuntos, diante da escassez de trabalhos e investigações no âmbito do seu ensino e da sua aprendizagem, merecem uma vigilância constante. Embora haja a grande quantidade de investigações, no campo da Educação Matemática, interessados no ensino do Cálculo, no primeiro ano de formação acadêmica, o que se contrapõe com o caráter de aparente oblívio relativo ao ensino do Cálculo em várias variáveis nos demais anos.

Diante desse contexto, trazemos os dados parciais relativos a um projeto de investigação com o tema envolvendo a noção de Integrais Generalizadas – (IG) desenvolvido em 2017. A pesquisa foi balizada/amparada pela metodologia de ensino nominada Engenharia Didática, de origem francófona. Apresentaremos, dessa forma, os resultados preliminares de uma investigação efetuada em um curso de licenciatura em Matemática no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia (IFCE/Fortaleza).

Do ponto de vista notacional, no trato analítico de alguns conceitos e objetos matemáticos vinculados ao processo de integração, segundo Riemann (Berberian, 1979), deparamos, invariavelmente, as seguintes simbologias *standard* indicadas na figura abaixo. Na figura 1, nosso interesse de discussão diz respeito aos objetos simbolizados por $\int_a^\infty f(x)dx$ nominando-as por Integrais Generalizadas (IG) ou ainda integrais impróprias, quando lidamos com funções não necessariamente contínuas e/ou limitadas em determinados intervalos da reta real.

Figura 1 - Alves (2016) discute o processo de Transição Interna do Cálculo – TINC.



Fonte: Alves (2016).

Ademais, a Figura 1 aponta, de modo prosaico, um processo de transição que ocorre no âmbito acadêmico e que demarca um contato progressivo dos estudantes com simbologias intrinsecamente relacionadas com o processo de integração de funções em uma variável real ou em várias variáveis e que concorre para a imposição de uma série de mudanças e hábitos matemáticos nem sempre adquiridos, de modo imediato, por eles. Por outro lado, não podemos desconsiderar o contexto atual, envolvendo por exemplo o uso de *softwares* (e da tecnologia) com o objetivo de envidar esforços didáticos e metodológicos que viabilizem rotinas de abordagem diferenciadas aos estudantes.

Não obstante, afim de se obterem conhecimentos pormenorizados a respeito dos fenômenos de ensino/aprendizagem relacionados com o processo de transição indicados na figura 1, restringir-nos-emos ao caso da Integral Generalizada (IG) que, de modo corriqueiro, costuma ser pouco explorado, do ponto de vista da abordagem dos livros e compêndios especializados de Cálculo em uma e em várias variáveis, sobretudo no que concerne aos critérios de convergência/divergência, consultados aqui ao decurso da investigação (De Lima, 2017).

Isso posto, afim de referendar nossas escolhas e um progresso sistemático investigativo, nortearemos nosso olhar e as ações de pesquisa pela Engenharia Didática – ED de 1ª geração e, tendo em vista a aquisição de uma apreciação pormenorizada dos fenômenos de ensino e aprendizagem em sala de aula, como metodologia de ensino, assumiremos a Teoria das Situações Didáticas – TSD, com o escopo de modelizar e compreender a manifestação de determinados fenômenos originados das interações oriundas do triângulo clássico: professor – estudantes – conhecimento matemático.

Sem mais delongas, na seção subsequente, abordaremos de modo sucinto os elementos incorporados na investigação originada da ED e da TSD, com origem em um caráter de complementaridade recorrente na vertente francófona da Didática da Matemática (Houdebine, 1991; Laborde, 1997; Perrin-Glorian & Bellemain, 2016).

2 Transição Interna do Cálculo - TINC

No Brasil, assinalamos Alves (2011) que, em sua tese de doutorado, propugnou a manifestação de obstáculos, semelhantes aos registrados no caso de uma variável real, agora, em um outro contexto, a saber da teoria das funções em varias variáveis. De modo geral, Alves (2011) levou em consideração um extenso período de estudos compulsórios dos estudantes na academia que podem perdurar de dois até três anos. Formalmente, os estudantes mantêm contato com a teoria das funções em uma variável real e, algum tempo depois, com o estudo formal da teoria das funções em varias variáveis (Alves; Borges Neto & Dias, 2012; 2014a).

Dessa forma, os fenômenos relacionados com o ensino e aprendizagem no referido lapso temporal de estudos exigem vigilância constante e não podem ser desconsiderados os eventuais entraves proporcionados pela nova teoria, de modo semelhante ao extenso repertório de obstáculos relatados em investigações no Cálculo em uma variável real, objetivados desde os anos de 1980 (Cornu, 1981; Davis & Vinner, 1986; Furinghetti, F. & Paola, 1988; Tall & West, 1986; Robert, 1984; Rogalski, 1990; Tall, 1986).

Nessa perspectiva, Alves cunhou o termo *Transição Interna do Cálculo* – TINC para designar um conjunto de novas exigências, cuja natureza variada poderá incidir e condicionar os fenômenos de ensino e aprendizagem. Segundo a perspectiva do autor, determinados elementos, quer sejam de ordem metodológica, de ordem psicológica, epistemológica e histórica podem atuar no sentido de facilitar/impulsionar o acúmulo e a sistematização de saberes dos estudantes, ao decurso do contato com a teoria das funções em uma variável real passando para a teoria das funções em varias variáveis, em duas ou três variáveis (Alves, 2011). Ao passo que, precisam ser identificados outros elementos que podem funcionar como entraves, barreiras ou verdadeiros obstáculos epistemológicos em um movimento de transição no interior de um extenso repertório de disciplinas obrigatórias de Cálculo presentes em nossas instituições de Ensino Superior no Brasil.

Dessa forma, a partir de uma perspectiva epistemológica[1], outros elementos de ordem metodológica, psicológica, epistemológica ou histórica podem atuar no sentido de dificultar, retardar, impedir e, mesmo, causar letargias e lentidões ao conhecimento a ser adquirido e internalizado pelo estudante. De modo prosaico, Alves (2011) nomeou os primeiros elementos ou conjunto como os *elementos de transição*, enquanto, o segundo grupo se relaciona e consubstancia os *elementos de ruptura*.

Em caráter introdutório, acentuaremos preliminarmente dois elementos comentados por Alves (2011) que podem, em decorrência da mediação ou ação metodológica assumida pelo mestre, atuar como *elementos de ruptura*. Com efeito, reconhecemos quase como um conhecimento matemático legítimo determinados argumentos explicativos (e metafóricos) no contexto de ensino do Cálculo em uma variável real. Assim, na figura abaixo, ao lado esquerdo, Tall (2009, p 5) recorda certos gestos dinâmicos capazes de transmitir o significado matemático da noção de (derivada

1 Introduzido por G. Barchelard em 1938, no campo da Didática da Matemática, a ideia original é adaptada por Brousseau, em 1976. Assim, o mesmo descreve as noções de obstáculos no ensino de Matemática de ordem ontogenética, de ordem didática e, por fim, epistemológica.

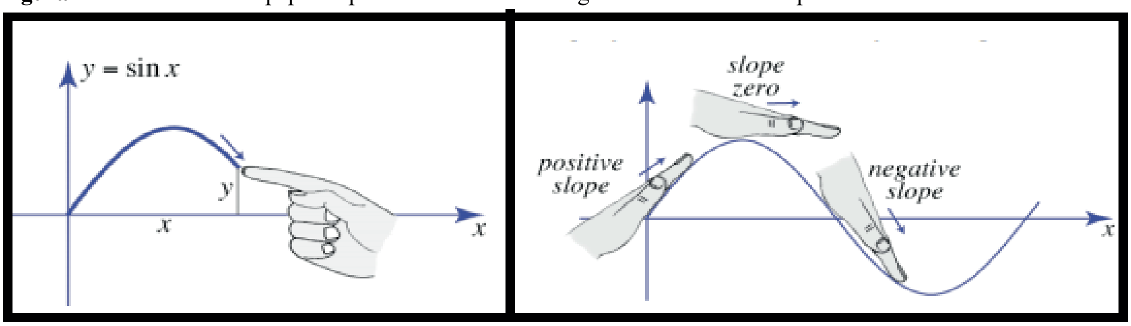
e) declividade de uma curva, como ainda comportamento de uma reta tangente ao seu gráfico no plano (Figura 2).

Por outro lado, ao lado direito, Tall (2009, p. 6) acentua uma espécie de sensação física aliada a ideia de comportamento da declividade ao longo do gráfico, pois um estudante pode compreender e apreender uma ação gestual dinâmica correspondente ao comportamento de crescimento, declividade nula e, logo em seguida, decrescimento. Observamos na figura 2, um cenário que proporciona a compreensão, por intermédio da percepção e da visualização tácita de relações estabelecidas entre o sujeito e o objeto.

Em relação a tal intenção metodológica particular, Tall (2009, p. 10) assinala que "isto produz uma versátil abordagem para o cálculo combinando a personificação e simbolismo em que a noção de limite surge naturalmente no processo, não formalmente no início do processo, em que os estudantes manifestam dificuldades neste tópico". A discussão de Tall pode ser demarcada no contexto da teoria do Pensamento Matemático Avançado (Tall, 2002). O aspecto diferenciado de sua perspectiva reside no fato de conceber um *corpus* teórico capaz de explicar os fenômenos de ensino e aprendizagem condicionados por objetos matemáticos pertencentes ao contexto de teorias abstratas.

No cenário discutido abaixo, depreendemos de modo claro seu interesse pelos fenômenos de limite e derivada. Aqui, no entendimento de Tall & Vinner (1981), por exemplo, a tecnologia aliada a um apelo metafórico/intuitivo e também heurístico pode proporcionar um rico cenário de aprendizagem e a mobilização de saberes intuitivos dos estudantes que ultrapassam os saberes logicizados e formalizados, peculiares aos modelos matemáticos formais (Bridoux, 2012, Choquet, 1960).

Figura 2 - Tall evidencia o papel imprescindível de recurso gestuais e metafóricos para o ensino do Cálculo.



Fonte: Tall (2009).

Por outro lado, ainda em um âmbito de consideração da TINC, declaramos nosso interesse pelo ensino de integrais dependentes de parâmetros, denotadas por $\int_a^{\infty} f(x,n)dx, n \in IR$ e que, na perspectiva de Alves (2011), em consonância com a abordagem estruturada para os estudantes, poderão atuar como um elemento de transição. A esse propósito, uma ideia recorrentemente assumidas pelos autores de livros de Cálculo em varias variáveis, quando explicam a noção de derivada parcial diz respeito na aplicação do processo de derivação para uma variável, na medida em que as demais variáveis são tratadas como constantes no processo. Ora, a mesma ideia pode ser explorada quando lidamos com simbologías do tipo $\int_b^{\infty}\int_a^{\infty} f(x,y)dxdy$. Nesse caso, assinalamos que uma integral dependente de um parâmetro, como indicamos há pouco, constitui um caso particular da integral dupla acima. Isso posto, com origem no ponto de vista deflagrado pelo TINC, na seção subsequente, abordaremos um quadro técnico conceitual investigativo capaz de proporcionar uma percepção modelizadora de fenômenos originados no contexto do ensino de Integrais Generalizadas – (IG).

2 Engenharia Didática – ED

Como consequência da organização científica e a sinergia implementada na França, sobretudo no final dos anos 60 e, com maior proeminência, entre as décadas de 80 e 90, constatamos a demarcação e a evolução dos conhecimentos, graças a um processo cumulativo de escritos científicos e da pesquisa em Didática da Matemática (Brousseau, 1986; 1988; 1994; 1998). Tal vertente de estudos adquiriu um substrato científico em decorrência, originalmente, do interesse em torno dos fenômenos relacionados com o ensino e a aprendizagem em Matemática, em seus diversos níveis (Artigue, 1990; 1996; Bloch, 2006; Boschet & Robert, 1983; Douady, 1995a; 1995b; Margolinas, 2005).

Recordamos que "o termo da Engenharia Didática designa um conjunto de sequências de classes concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente por um professor-engenheiro, com o fim de realizar um projeto de aprendizagem para uma população determinada de alunos" (Douady, 1995b, p. 62). Não obstante, cabe explicarmos o emprego de determinados termos ou "metáforas" no excerto anterior.

Com efeito, os autores da vertente francesa costumam apoiar a descrição e a intenção de realizar um processo investigativo balizado pela Engenharia Didática – (ED), com o escopo de realizar um projeto científico preciso e pormenorizado (Douady, 1995a; 1995b; 2008). Assim, de modo prosaico, todo o projeto ou a preparação devem ser pensados nos momentos de planejamento que antecedem a aula, propriamente dita, nos momentos de experimentação da aula, em que todo o aparato teórico conceitual é colocado em movimento. Finalmente, uma depuração dos dados e informações coligidas após ter sido encerrado o fenômeno aula, de sorte que, o conjunto das ações planejadas, envolvendo o trinômio aluno – professor – conhecimento matemático, devem concorrer para o acúmulo de conhecimentos didáticos-metodológicos sobre assuntos específicos, conhecimentos precisos e particulares. De modo simplificado, Artigue (1996, p.243) esclarece:

> Trata-se de etiquetar, de certa forma, uma forma de trabalho didático, comparável ao do engenheiro, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre diversos conhecimentos científicos de seu domínio, aceita a se submeter a um controle do tipo científico e, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar com objetos mais depurados da ciência.

A constatação da ED como metodologia de pesquisa caracteriza-se como um esquema experimental baseado num conjunto de experimentações e realizações didáticas em sala de aula. Artigue (1996, p. 247) indica as seguintes etapas clássicas: concepção, realização, observação e a análise de sequências de ensino. Mas, do ponto de vista da ação experimental e do tempo investigativo, Artigue distingue ainda: (1) fase de análises preliminares; (2) fase de concepção e análise *a priori* das situações didáticas; (3) experimentação e, por fim, (4) análise *a posteriori* e validação (interna e externa) de todo aparato teórico construído tendo como fim a obtenção de conhecimentos científicos sobre o ensino de um assunto. Antes, porém, elegemos a seguinte questão investigativa: Como descrever uma abordagem de ensino para a noção de IG cuja natureza proporcione o estímulo da visualização e o entendimento dinâmico do processo de integração?

Afim de perseguirmos determinar elementos capazes de responder ao questionamento anterior, indicaremos os seguintes objetivos específicos: (a) descrever situações didáticas envolvendo a noção de IG´s, com o amparo da TSD; (b) descrever um cenário de aprendizagem (Alves, 2016) com o uso do *software GeoGebra* afim de proporcionar a mobilização de um entendimento intuitivo da noção de convergência e divergências de integrais IG´s. Com vistas determinar um repertório de conhecimentos que permitam a resposta ao questionamento anterior os dois objetivos apontados, no próximo segmento, abordaremos as etapas de uma ED.

3Análises Preliminares

A terminologia Engenharia Didática – ED foi usada para designar/envolver um *modus operandi* de investigação ou ainda como “uma metodologia para a análise de situações didáticas” (Robinet, 1983, p. 2). Dessa forma, com amparo numa mediação afetada por seus fundamentos e pela tradição do uso, em caráter de complementaridade (Perrin-Glorin & Bellemain, 2016), em outras teorias que devem respaldar o momento ulterior da experimentação, acentuaremos as características a serem evidenciadas nas fases dialéticas previstas pela TSD, bem como uma mediação afetada/modificada por um conjunto de práticas de ensino e de aprendizagem discutidas sob a perspectiva da Didática da Matemática (Artigue, 2012; Brousseau, 1978; 1986; 1988; 1998; Margolinas, 1995).

De modo sistemático, conforme Artigue (1995, p. 249-250), nesta etapa consideramos: (i) uma análise epistemológica dos conteúdos visados no ensino de IG´s; (ii) análise dos entraves no campo de ensino em que pretendemos realizar uma ação didática; (iii) exame das concepções e os conhecimentos prévios dos alunos e, por fim, análise do ensino atual (inspeção dos compêndios especializados e livros de Cálculo adotados) e seus efeitos no que tange o ensino de IG´s. Todos estes elementos têm em consideração os objetivos desta investigação.

Relativamente ao item (i), realizamos a consulta de vários compêndios especializados que discutem o tema integrais impróprias ou Integrais Generalizadas – (IG) e as Integrais Dependentes de Parâmetros, que denotamos por $\int_a^{\infty} f(x,n)dx, n \in IR$ (De Lima, 2017). Decerto que o processo de integração considerado diz respeito ao processo de integração segundo Riemann, cuja definição pode ser vislumbrada logo em seguida.

Definição 1: Seja $f:(a,b] \to IR$ uma função ilimitada. Supondo que a função f seja contínua. A integral imprópria ou integral generalizada $\int_a^b f(x)dx$ é definida como $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$. (Lima, 2006, p. 142).

Seguindo um estilo *standard* em Matemática, Lima (2006, p. 142) comenta que o maior problema consiste em saber se a integral acima converge ou não. Não obstante, acrescentamos um importante problema da intepretação geométrica e intuitiva correspondente ao processo, em cada caso indicado por Lima (2006).

Ademais, cabe acentuar que, do ponto de vista matemático, a noção de IG´s funciona como pré-requisito para o entendimento da noção de IDP´s, sobretudo, quando nos interessamos pelo seu caráter de convergência e divergência. No que se refere ao item (ii), tendo em vista que nossa apreciação mostra-se afetada pela perspectiva da TINC, acentuamos a tônica hegemônica adotada pelos autores de livros no sentido de acentuar o caráter analítico procedural relacionados com as noções de IG e de IDP, de modo semelhante ao tratamento dos outros objetos do Cálculo (Lima & Alves, 2016).

Por fim, o exame das concepções prévias dos estudantes participantes do estudo se restringiu aos dados obtidos no estudo da noção de integração e devem ser apresentados mais adiante. Antes, porém, diante das considerações anteriores, elegeremos a seguinte hipótese de trabalho: o uso do *software Geogebra* funcionará como elemento estimulador do debate científico entre o grupo e a confrontação, visualização e a discussão de elementos intuitivos e heurísticos atinentes ao processo de Integrais Generalizadas – (IG).

Diante da hipótese anterior, assumiremos o papel imprescindível da visualização tendo em vista o entendimento tácito e intuitivo da noção de convergência ou divergência de IG´s, mediante o uso da tecnologia (Artigue, 2008; 2013).

4 Análise *a Priori*

A presente etapa, seguindo o procedimento *standard* das investigações dessa vertente, busca responder às questões levantadas e validar, refutar ou modificar a hipótese indicada há pouco. Por intermédio de um apelo mnemônico, Brum & Schuhmacker (2013) indicam os elementos essenciais da fase atual, uma vez que, "o pesquisador deve elaborar e analisar uma sequência de situações-problema" (Almouloud, 2007, p. 174). Ademais, "as situações-problema devem ser concebidas de modo a permitir ao aluno agir, se expressar, refletir e evoluir por iniciativa própria, adquirindo assim novos conhecimentos" (Almouloud, 2007, p. 174). Por fim, na etapa da *análise a priori*, de acordo com as características de cada situação proposta, podemos prever e modelizar o comportamento dos alunos, o que se coaduna com o que orienta Artigue (1995; 2009).

Na fase atual, manifestamos um profundo interesse pela "determinação e seleção dos elementos que permitem os comportamentos dos estudantes e seu significado" (Artigue, 1995, p. 45). Tais elementos constituem um conjunto de variáveis didáticas que consideraremos no interior das situações apresentadas. Observamos o caráter qualitativo das variáveis didáticas, tendo em vista que, a partir da interação com o *software GeoGebra*, esperamos a produção de um discurso originado de um entendimento intuitivo e heurístico dos estudantes participantes do estudo (Alves, 2012; 2016). A dialética da produção e a identificação das variáveis didáticas pertinentes devem ser enquadradas segundo as fases de ação, formulação, validação e institucionalização (Brousseau, 1978).

Por tal via, de modo sistemático e seguindo a tradição dos estudos dessa vertente, patenteamos uma parte descritiva e outra parte preditiva do presente aparato conceitual, embora desconsiderando sua ulterior confrontação com eventuais dados empíricos circunstanciados com outro grupo de estudantes. Outrossim, recordamos que num processo de ensino, "o professor coloca em jogo um meio relativamente àquele com o qual o aluno deve interagir. Tal interação é produtora de conhecimentos" (Margolinas, 1995, p. 344). E ainda, em todas as fases dialéticas previstas pela Teoria das Situações Didáticas – (TSD), registraremos a presença do professor, no sentido do reinvestimento necessário para o progresso da situação-didática (Brousseau, 1986; 1988; 1998). Dessa forma, desconsideraremos os dados produzidos no interior de situações a-didáticas.

5 Construção e Concepção de Situações

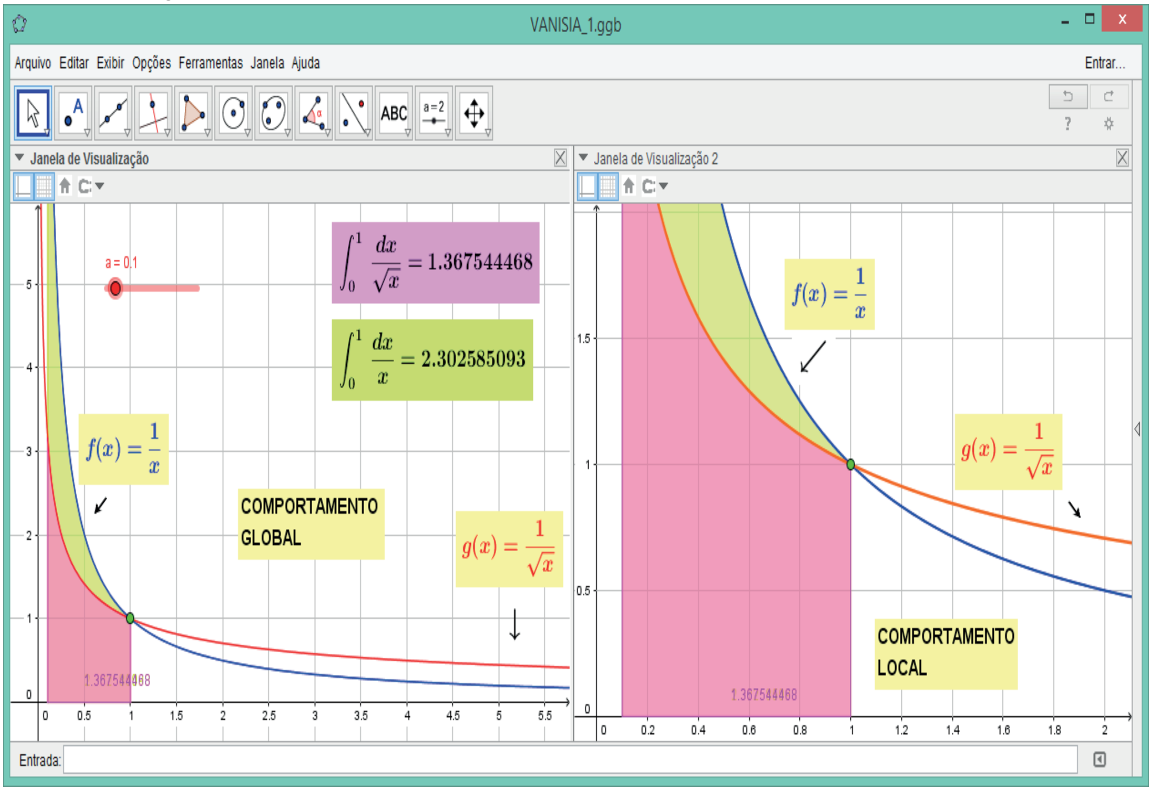
De maneira semelhante ao destacado por Artigue (2008, p. 4-5), em nosso caso, o uso da ED e da TSD, na fase de *experimentação*, deve proporcionar uma prática controlada na intervenção em sala de aula, de modo que, o pesquisador-professor, em consonância com as variáveis micro-didáticas eleitas nas duas fases iniciais da ED, consiga predizer as reações dos aprendizes e ainda interpretar os sentidos produzidos pelo grupo controle. Ademais, recordamos que num processo de ensino, "o professor coloca em jogo um meio relativamente ao qual o aluno deve interagir. Tal interação é produtora de conhecimentos" (Margolinas, 1995, p. 344). E, ainda, em todas as fases dialéticas previstas pela TSD, registraremos a presença do professor, no sentido do reinvestimento necessário para o progresso da situação-didática (Brousseau, 1986; 1988; 1998).

Situação didática I: Decida e compare o comportamento das seguintes integrais indicadas por $\int_0^? \frac{dx}{\sqrt{x}}$ e $\int_0^? \frac{dx}{x}$. Determinar ainda um intervalo de integração $(0,?)$ de modo que as integrais correspondentes sejam impróprias ou integrais generalizadas.

Comentários: As relações e significados matemáticos devem ser depurados na etapa inicial, na medida em que, uma linguagem compreensível por todos deve ser mobilizada (Almouloud, 2007, p. 38). Não obstante, nossa perspectiva de abordagem de ensino busca a descrição de um cenário heurístico que se apoia na visualização e percepção tácita e intuitiva de propriedades (qualitativas), tendo como escopo a produção/elaboração das conjecturas preliminares e a possibilidade de produção argumentativa de algum *insight* (Alves, 2012) ao decurso da situação problema.

Situação de ação: As relações e significados matemáticos devem ser depurados na etapa inicial, na medida em que, uma linguagem compreensível por todos deve ser mobilizada (Almouloud, 2007, p. 38). Assim, as relações iniciais do trinômio professor – estudantes – saber matemático são mobilizadas a partir de uma interação preliminar com o *software GeoGebra*. Na figura abaixo, os alunos deparam uma construção dinâmica, envolvendo propriedades gráfico-geométricas e numéricas, relacionadas com as integrais generalizadas indicadas aqui por $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ e $\int_0^1 \frac{dx}{x}$. Reparemos que, no enunciado da situação I, constitui parte do processo de devolução (Brousseau, 1986) a determinação do intervalo da reta $(0,?)$ por parte do estudante e que proporcionará o estudo de integrais generalizadas e não integrais definidas correspondentes que constituem parte dos conhecimentos preliminares dos estudantes que participaram do estudo.

Figura 3 – Elementos apoiados na visualização de IG´s tendo em vista um entendimento não estático do processo dinâmico de integração de funções na variável real.



Fonte- Elaboração dos autores.

Alertamos, todavia, as ponderações de Margolinas (1995, p.344), quando salienta que:

> No sistema clássico de ensino, o professor não controla o meio no qual a situação é apresentada, nem os conhecimentos elaborados pelos estudantes. Ou o aluno aprende sempre em situação, e tal situação é construida deliberadamente ou não pelo professor. Os exemplos, os exercícios encontrados, a ordem da aparição das noções, formam a base do meio para a aprendizagem e, a partir da mesma, os conhecimentos deverão se formar, ao mesmo tempo precisos ou errôneos, sem que o controle total do professor seja possível.

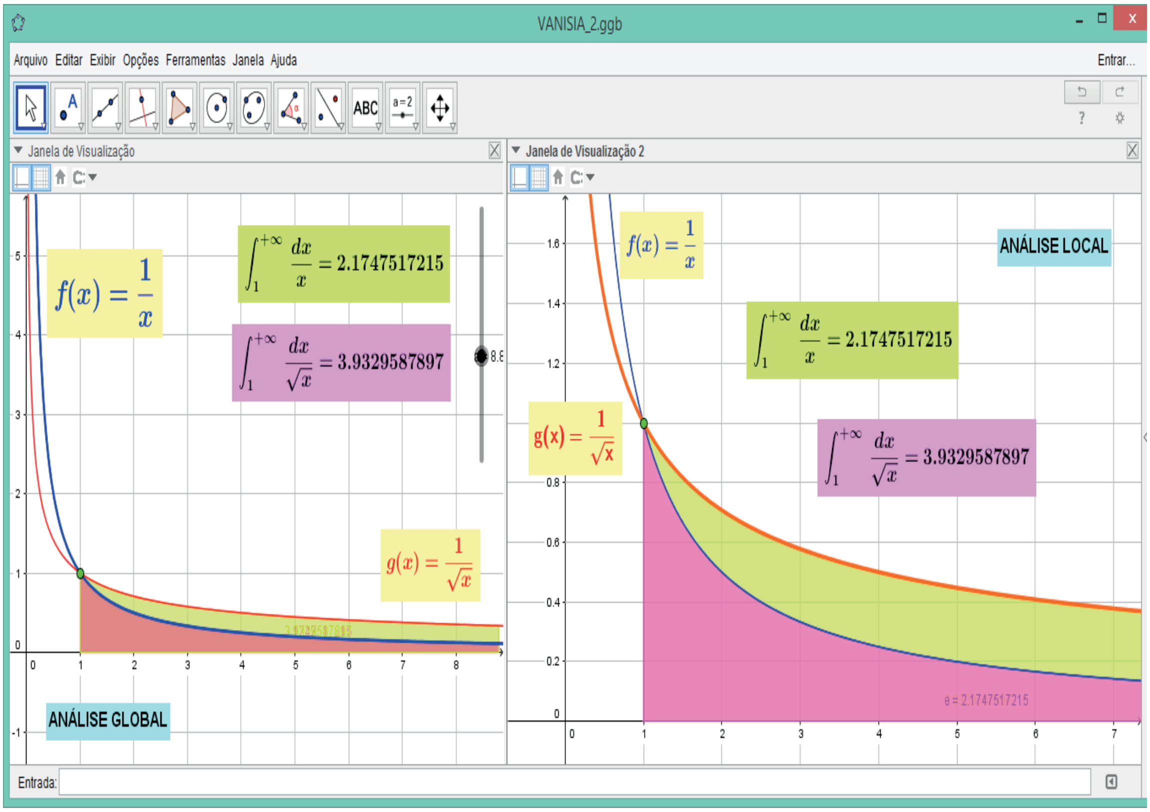
Nesse momento preliminar, devem ser estimuladas a formulação de conjecturas intuitivas, apoiadas e mobilizadas a partir da visualização e sem o controle total do professor. Os estudantes são estimulados na manipulação e exploração da construção com o *software GeoGebra*, na constatação do comportamento progressivo da área e do comportamento inesperado do *software*, quando o seletor móvel indica uma partição e o ponto aonde a função integranda se mostra descontínua, nas proximidades da origem.

Na Figura 4, vê-se que a segunda parte da questão será apresentada e discutida com o grupo de estudantes. De modo semelhante, a discussão em torno das determinação das integrais generalizadas do tipo $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ e, sobretudo, o uso da definição formal de modo correto e em conformidade ao *corpus* teórico da teoria fundante (ver definição).

Situação de formulação: Almouloud (2007, p. 38) esclarece que, neste momento, a troca de informações e mensagens entre os aprendentes é imprescindível. Ademais, o resultado do debate e da dialética "permite criar um modelo explícito que pode ser formulado com sinais e regras comuns". Como explicamos na fase dialética anterior, os alunos precisam apropriar-se de um sistema notacional que deve proporcionar a homogeneização da comunicação entre o grupo, oriundo das interações com o *software* proposto. Vale acrescentar que, como acentua Artigue (1984, p. 7) prevemos que "o estudante poderá justificar suas escolhas, todavia, a situação não exige". Nesse momento, com o uso de um sistema notacional adequado, os estudantes devem justificar e determinar que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ e $\int_0^1 \frac{dx}{x}$. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$, na medida da substituição adequada dos símbolos "?".

Situação de validação: Recordamos que, diferentemente da etapa anterior, mostra-se necessário "provar o que foi afirmado na fase anterior" (Artigue, 1984, p. 7 – 8). Nessa fase, isso se dá num contexto do "debate da certeza das asserções" (Almouloud, 2007, p. 40), em que os dados são produzidos com origem nas interações dialéticas dos estudantes da fase anterior, com as informações e inferências empregadas afim de obter a certeza das relações estabelecidas e das propriedades coligidas após a implementação de um plano.

Figura 4 – Elementos apoiados na visualização de IG´s.



Fonte- Elaboração dos autores.

Situação de institucionalização: Brousseau (1986, p. 342) comenta que "a produção no ensino de conhecimento matemático demanda um esforço de transformação de um conhecimento em saber matemático [...]". Assim, ele indica que a epistemologia do professor atuará no sentido de não personalização e não contextualização, e que buscará eliminar os traços históricos (Bottazzinni, 1986 Ledermann, 1960; Taschner, 1995) que determinaram sua aparição. Perrin-Glorian & Bellemain (2016) apontam vantagens e, ao mesmo tempo, determinadas insuficiências do momento de institucionalização estabelecido pela TSD e considerado no interior de uma ED.

> A necessidade de institucionalização foi formulada em 1980, assim como a existência de um contrato didático implícito; a situação didática é observada desde 1982, como uma situação a-didática imersa em um contrato didático e, ao mesmo tempo em que surge a noção de devolução. Todavia, a teoria das situações se desenvolveu, preliminarmente, em torno da caracterização de situações a-didaticas em situações quase isoladas do professor, o que constitui que a Engenharia Didática, no seu começo, era centrada sobre os aspectos matemáticos (epistemológicos) e cognitivos, não explicitados no papel do professor, ao momento de mobilização das sequências em classe. (Perrin-Glorian & Bellemain, 2016, p. 13).

No trecho acima acompanhamos uma rápida descrição evolutiva do processo de institucionalização. Todavia, Perrin-Glorian & Belemain (2016) apontam ainda determinadas deficiências concernentes ao entendimento do papel do professor. Abaixo apenas enunciaremos o principal teorema que prevemos regular/condicionar as atividades propostas aos estudantes por parte do professor. Assinalamos sua abordagem hegemonicamente analítico-procedural no universo dos livros de Cálculo consultados (Guidorizzi, 2011, Leithold, 1992, Stewart, 2013).

Teorema 1 (comparação): Sejam as funções contínuas $f, g : [a, \infty) \rightarrow IR$. E se $k \geq 0, 0 \leq f(x) \leq k \cdot g(x)$, para $x \geq a$. Tem-se que: (i) se $\int_a^{\infty} g(x)dx$ converge, então $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge; (ii) se $\int_a^{\infty} f(x)dx$ diverge, então $\int_a^{\infty} g(x)dx$ diverge também.

Demonstração: Lebl (2011), Stahl (1999).

Desse modo, a ação do professor deverá depurar com o grupo, uma síntese de todos os dados coligidos e aventados nas fases dialéticas anteriores. Vale recordar um momento de relativo antagonismo a ser enfrentado pelo *expert*. De fato, Margolinas (1995, p. 342) recorda que as ações envolvendo a "devolução", designam "as ações do professor que visa encarregar os estudantes com responsabilidade de elaboração de estratégias de resolução para situações dadas".

Por outro lado, a mediação do professor deverá mostrar-se afetada pelo uso da tecnologia (Artigue, 2008; 2009; 2012; 2013), de modo que, em cada fase correspondente anterior (ação, formulação, validação), que antecede o momento de institucionalização, deve ocorrer uma ação de devolução. Ou seja, em cada fase dialética anterior, ocorrerá o reinvestimento da tarefa do estudante, por parte do professor, como garantidor que a ação do grupo não fique restrita ao quadro analítico e adote a visualização como elemento facilitador e imprescindível em cada etapa de investigação (fato que auxilia para a apreciação de nossa questão de investigação) (Alves & Borges Neto, 2011).

Tal perspectiva deverá ser garantidora de que o aparato tecnológico não funcionará como simples apêndice ou acessório secundário no âmbito do ensino (Alves, 2014a; 2014b). Assim, o momento de antagonismo, deve ocorrer na mediação final do professor, na medida em que "um conhecimento se revela verdadeiramente útil numa pequena instituição particular, e numa classe em que o professor poderá efetuar escolhas de revelação das relações do conhecimento com um saber científico de origem cultural e social" (Margolinas, 1995, p. 343). Vejamos, pois, a análise dos dados coletados.

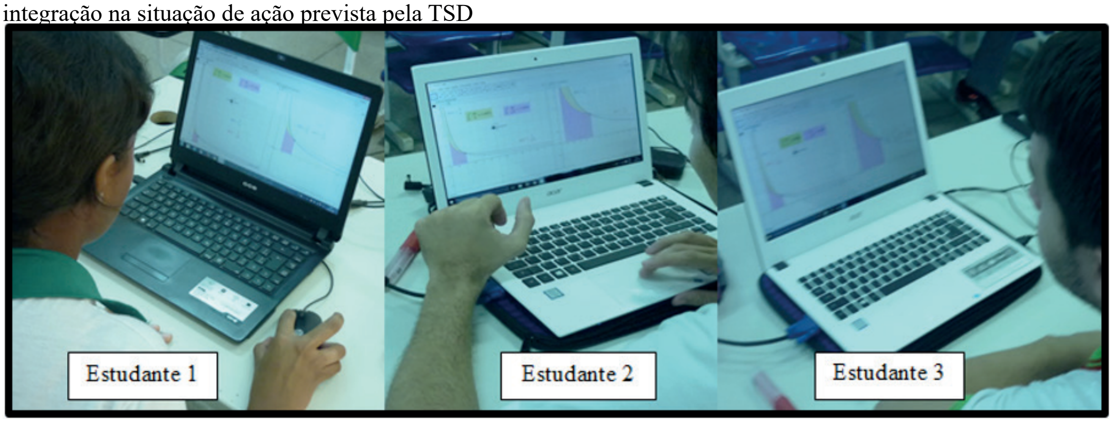
5 Resultados e Discussão

Nesta parte apresentaremos parte dos dados coligidos em uma investigação em desenvolvimento no Instituto Federal do Estado do Ceará – (IFCE) - campus Cedro. Os dados correspondem a um grupo de estudantes matriculados na disciplina Cálculo II, no ano de 2017. Doravante, abordaremos os dados produzidos por três estudantes em um grupo total de seis estudantes, ao decurso de três encontros, com duas horas de duração cada encontro. As construções com o *software* foram preliminarmente definidas.

Acentuamos que, de maneira semelhante ao destacado por Artigue (2008, p. 4-5), em nosso caso, o uso da ED e da TSD, na fase de *experimentação*, deve proporcionar uma prática controlada na intervenção em sala de aula, de modo que, o pesquisador-professor, em consonância com as variáveis micro-didáticas eleitas nas duas fases iniciais da ED, consiga predizer as reações dos aprendizes e interpretar os sentidos produzidos pelo grupo controle. Ademais, em todas as fases dialéticas previstas pela TSD, registraremos a presença do professor, no sentido do reinvestimento necessário para o progresso da situação-didática (Brousseau, 1986, 1988, 1998).

Isso posto, na figura 5, apreciamos os momentos iniciais de apresentação das situações problema I, a partir de construções previamente elaboradas com o *software GeoGebra*. A ação do professor-pesquisador restringiu-se ao fato de estimular o entendimento das relações indicadas no enunciado da situação I, com as propriedades que poderiam ser exploradas com o *software*, envolvendo a noção de IG. Assim, a partir da ação investigativa dos estudantes 1, 2 e 3, foi registrado um processo preliminar de busca e perquirição dos estudantes, tendo em vista determinar os intervalos correspondentes na reta real que correspondem ao caso de IG´s, impulsionados pela visualização.

Figura 5 – Elementos apoiados na visualização de IG´s tendo em vista um entendimento não estático do processo de integração na situação de ação prevista pela TSD



Antes de observarem o comportamento numérico das integrais e serem instigados pela pesquisadora a comparar/relacionar (com arrimo na visualização) a desigualdade os alunos foram interrogados sobre as escolhas (e motivos) dos valores dos limites de integração, e que representariam integrais generalizadas e não integrais definidas. Os sujeitos da pesquisa apresentaram as seguintes respostas:

> Estudante 1: Se colocasse o zero em um dos extremos do intervalo, ou então se colocasse o intervalo ou .
> Estudante 2: Em zero eu teria uma indeterminação, pode ser valores infinitos, eu acho.
> Aluno 3: Se colocasse o intervalo no infinito, do menos infinito a mais infinito ficaria uma integral impropria. De zero a mais infinito também poderia ser, ou seja sempre que tiver esses casos, sempre que tiver indeterminação [...]. Se eu for substituir no caso ali o zero, não existe divisão por zero, então dá uma indeterminação nesse valor.

Os estudantes recordaram as definições formais de IG (ver definição 1), sendo para eles evidente que intervalos infinitos e os integrandos descontínuos tornariam as integrais correspondentes como generalizadas. Os mesmos já tinham internalizado as definições dos tipos de IGs, conforme tinha sido previsto nas análises *a priori*. Serão expostos a seguir, os discursos que os alunos apresentaram na dialética da ação, no momento em que manipulavam o software e buscavam compreender o comportamento (numérico e geométrico) das integrais analisadas. O cenário de estudo foi favorável ao surgimento de intuições estimuladas pela visualização (Alves, 2012), que foram classificadas pela pesquisadora. O aluno 1, no momento que manuseou o *software GeoGebra*, na atividade prevista pela situação 1, elaborou o seguinte argumento:

Aluno 1: A primeira (integral em amarelo) vai divergir porque ela vai sempre crescendo para à esquerda, vai aumentando o valor cada vez mais. Já a segunda (rosa) converge porque ela para em um determinado valor numérico.

A aluno 1 desenvolveu uma *intuição conjectural*, visto que consegue dizer corretamente o comportamento das integrais no intervalo estudado, mas não apresenta ainda justificativas formais que possam confirmar suas inferências. Já o aluno 2 no cenário de investigação do comportamento de convergência/divergência das integrais estudadas na atividade 1, desenvolveu o seguinte diálogo com a pesquisadora.

Pesquisadora: Qual o comportamento da integral representada na cor amarelo?
Estudante 2: Vamos ver aqui...A área está crescendo, então ela está divergindo. Vejo aqui que quando eu coloco o controle deslizante no zero, aparece um ponto de interrogação, é justamente devido à indeterminação no zero. É, ela diverge.
Pesquisadora: E qual o comportamento da integral representada na cor lilás?
Estudante 2: No caso aqui é a mesma coisa, ou não? Espera aí...Não ela converge pra 2, nós não vamos ter aqui uma indeterminação no caso.
Pesquisadora: E o que acontece com as contribuições de área dessa integral?
Estudante 2: Ela aumenta, pela interpretação geométrica ela seria divergente, mas o valor numérico nos mostra que vai ser convergente.
Pesquisadora: Você está confuso?
Estudante 2: Sim, mas acho que ela converge.

Em um primeiro momento de sua fala, o aluno 2 manifestou uma *intuição conjectural* quando fez a seguinte averbação: "*A área está crescendo, então ela está divergindo*", percebe-se que o estudante expõe uma justificativa para a sua dedução, embora seu argumento não estivesse apoiado em propriedades formais, intrínsecos da teoria. No segundo momento, o estudante 2 apontou uma insegurança quanto ao comportamento geométrico da integral. Para ele a interpretação gráfico-geométrica está indicando uma solução, enquanto a representação numérica está indicando outra resposta. No depoimento anterior registramos sua intepretação dinâmica do processo de convergência e divergência de uma IG, além de uma significação gestual acrescida pelo estudante.

O sujeito não conseguiu apresentar com clareza seus argumentos, tampouco explicou o porquê dessa divergência entre as respostas encontradas, contando apenas com o fator sorte para afirmar que as IGs assumem um comportamento de convergência. Dessa forma, é identificada uma *intuição conjectural* em seu discurso quando o mesmo declara que "*acho que ela converge*". Para o aluno, não é evidente esse comportamento da integral, uma vez que as representações estão indicando respostas distintas, mas ele mesmo resolveu apostar na solução que foi indicada pela representação numérica. Dando continuidade ao diálogo, o pesquisador atuou como mediador do conhecimento, questionou o estudante 2 sobre a aplicabilidade do Teste da Comparação para as integrais:

Pesquisadora: O que aconteceu com a integral ?
Estudante 2: Ela divergiu...sim.
Pesquisadora: Então qual deve ser o comportamento da outra integral ?
Estudante 2: Era para divergir também. Só que ela convergiu. O que a gente faz agora? O Teste da Comparação era para garantir que as duas fossem divergentes, mas nesse caso aí ele não é válido não.

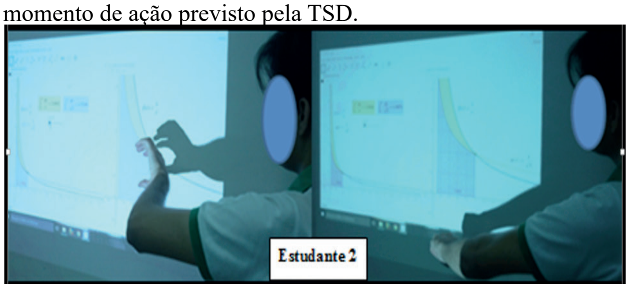
O aluno 2, no excerto acima, chegou a uma conclusão equivocada sobre o Teste da Comparação para Integrais generalizadas. O fato de a integral da função maior, , divergir não asseguraria que a integral da função menor também divergisse. Na dialética da institucionalização, etapa final da TSD, a pesquisadora explicou a aplicabilidade do Teste da comparação nesse problema, sendo esclarecido que pelo Teste da Comparação, dadas duas funções e , onde , então se a integral generalizada da função é convergente, a integral generalizada da função também tem o mesmo comportamento. Assim como, se a integral generalizada de assumir o comportamento de divergência, a integral da função também seria divergente, ou seja, se a menor diverge, a maior também diverge e se a maior converge, a menor também converge. Em relação à inspeção do *software GeoGebra* para decidir pelo comportamento de convergência/divergência das integrais generalizadas em estudo, o estudante 3 apresentou as seguintes observações diante do cenário de aprendizagem:

A área amarela vai sempre crescer, então ela está divergindo, mas quando chega no zero, não tenho como determinar essa área porque dá uma indeterminação... A rosa vai divergir porque quando eu me aproximo do zero, vai crescendo o valor numérico. (Aluno 3)

Na compreensão do aluno 3, as duas integrais generalizadas apresentaram um comportamento de divergência. Esse estudante também manifestou em sua averbação *intuições conjecturais*. Mesmo sendo suas justificativas apoiadas na visualização e na mobilização tácita de um conhecimento, que o *software GeoGebra* proporcionou, mas o sujeito conseguiu expor argumentos para a sua dedução. A imagem a seguir apresenta momentos ocorridos na dialética de ação. Podemos reparar ações gestuais manifestadas pelo estudante 1 (Figura 6), afim de fazer aderir um significado não estático e dinâmico ao processo de convergência e divergência. Ademais, o cenário de aprendizagem abaixo permitiu ao estudante 1 um entendimento dinâmico do quadro gráfico-numérico e geométrico do critério da comparação (ver teorema).

Figura 6 – Elementos apoiados na visualização de IG´s tendo em vista um entendimento não estático do processo de integração no momento de ação previsto pela TSD.

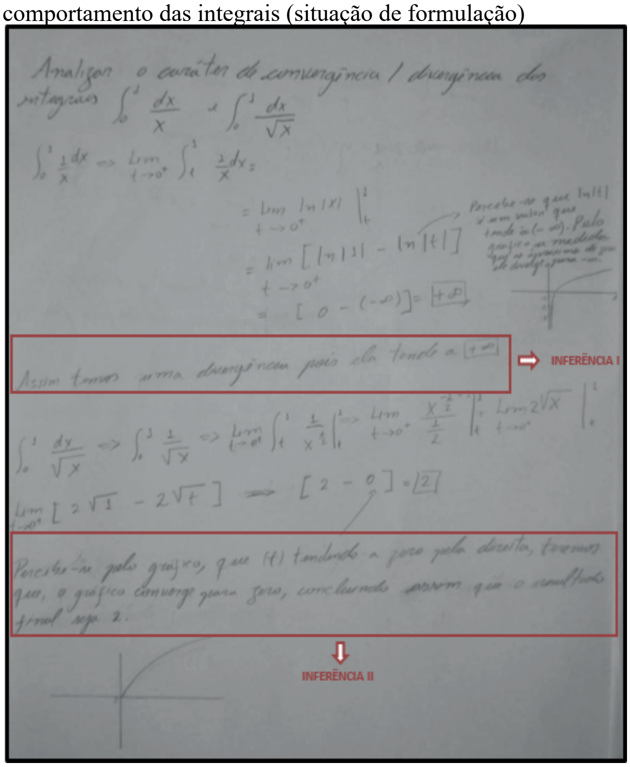
Figura 7 – Elementos apoiados na visualização de IG´s tendo em vista um entendimento não estático do processo de integração no momento de ação previsto pela TSD.



É perceptível na imagem que os alunos comunicam-se por meio de uma linguagem natural, recorrendo a sinais próprios para expressar sua compreensão acerca do fenômeno analisado, sendo esse comportamento não antecipado pelo pesquisador nas análises *a priori*. Deve-se ressaltar também que todas as ações executadas na fase de ação da TSD, tiveram como arrimo a visualização e foram intermediadas também por meio do diálogo desenvolvido entre a pesquisadora, estudantes e interações com modelo computacional.

Na dialética da formulação, os alunos desenvolveram analiticamente as integrais e apontaram suas conclusões acerca do resultado obtido. Ao observar os extratos das produções dos três sujeitos da pesquisa, percebe-se que eles mesmos encontraram resultados similares para o comportamento das integrais, dessa forma será exposta nesta parte do texto apenas a produção do aluno 2, por apresentar uma exposição analítica mais detalhada. Divisamos tal fato na Figura 8, logo abaixo, em que se expõe as estratégias do estudante.

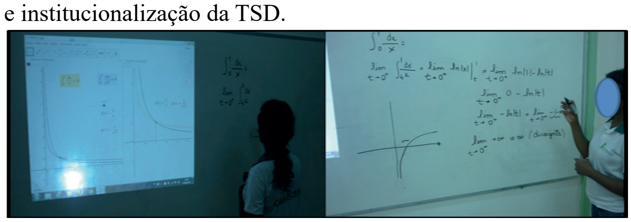
Figura 8 – Elementos mobilizado pelo estudante 2, após a participação da discussão do grupo diante da visualização do comportamento das integrais (situação de formulação)



Situação de institucionalização: A produção dos conhecimentos produzidos pelos grupos deve concorrer para o estabelecimento do status de importância de um conhecimento relacionado com a noção de IG´s. Assim, na figura abaixo, divisamos um momento final de comparação dos modelos computacional e matemático, a fim de que, o professor-pesquisador estabeleça a importância do saber científico a ser adquirido e incorporado pelo grupo dos três estudantes participantes de discussão (ver Figura 9).

Observamos, porém, que segundo uma mediação ou transposição didática (Chevallard, 1991) que visa mobilizar conhecimentos estimulados, em um primeiro momento, na visualização permitida pelo *software GeoGebra*, um conjunto de conhecimentos coligidos, a partir da interação com o software deve ser confrontado com as propriedades analítico-formais previstos pela teoria matemática de base. Na figura 9 o pesquisador promoveu um debate de fechamento com os três alunos participantes. Identificou-se que o conhecimento construído pelo grupo, distintamente ao apelo analítico proporcionado pelo livro, foi incorporado pelos estudantes do grupo.

Figura 9 – Elementos apoiados na visualização de IG´s e a confrontação do modelo matemático nas fases finais de validação e institucionalização da TSD.



Situação didática II: Decida e compare o comportamento das seguintes integrais $\int_1^{?} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ e $\int_1^{?} \frac{dx}{x}$ (ver figura 4). Decida ainda o intervalo correspondente que significam uma integral generalizada.

Comentários: De modo recorrente, constitui parte da devolução dos estudantes indicarem um intervalo que corresponde ao sentido/significado formal e geométrico de uma IG. Mais uma vez, a exploração preliminar com o *software* deverá estimular o debate científico com o grupo diante do cenário de aprendizagem elaborado pelo professor.

Situação de ação: As imagens seguintes foram registradas na dialética de ação quando o aluno 1 inspecionou a construção descrita pelo *software GeoGebra* e apresentou algumas conjecturas que serão apresentadas posteriormente. Abaixo registramos a ação do sujeito que manifestou uma série de ações gestuais para significar o processo, na primeira fase dialética de ensino prevista pela TSD (Figuras 10 e 11).

Figura 10 – Elementos apoiados na visualização de IG´s tendo em vista um entendimento não estático do processo de integração na situação de ação da TSD.

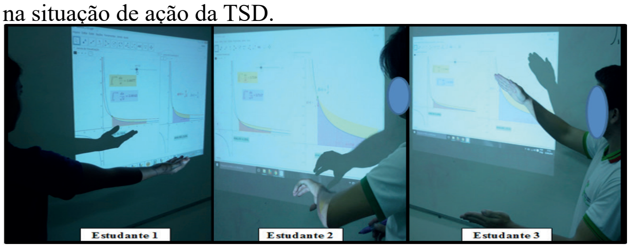


Figura 11 – Elementos apoiados na visualização de IG´s tendo em vista um entendimento não estático do processo de integração na situação de ação da TSD.

Cabe acentuar a forte relação que tencionávamos explorar, do ponto de vista da mediação pretendida, em consonância com o que prevê Tall (2009) (Figura 2). Agora, em relação à análise das contribuições (dinâmicas) de área referentes às integrais apresentadas no problema, a aluna 1 apresentou o seguinte discurso:

> As contribuições de área estão aumentando, tanto da amarela, quanto da rosa vão crescer. O valor numérico da amarela vai crescer cada vez mais, isso significa que ela vai divergir. A rosa também vai crescer, então ela está divergindo. (Aluno 1)

Novamente aqui, a aluna 1 manifestou uma *intuição conjectural*. Ela conseguiu ter uma compreensão do fenômeno estudado e utilizou um argumento informal para justificar a sua inferência. Também nessa atividade, a pesquisadora instigou os estudantes para que chegassem a alguma conclusão a respeito do Teste de Comparação para as integrais em questão. A seguir, serão apresentados alguns trechos das falas dos alunos 2 e 3 sobre este quesito que tinha sido programado nas análises *a priori*, uma vez que foi antecipado que os sujeitos da pesquisa analisariam as desigualdades do tipo . Reparemos que o estudante expressou um sentido dinâmico do processo.

> Aluno 2: Percebo que a menor está divergindo e a maior está divergindo, o teste faz sentido nesse caso.
> Aluno 3: A menor está acompanhando a outra...é faz sentido o teste. Mas não devemos deixar de calcular as integrais para comprovar.

Nesse caso, os alunos conseguiram identificar a aplicabilidade do Teste da Comparação para as integrais generalizadas com a visualização proporcionada pelo software. Porém o aluno 3, mostra-se um pouco resistente a limitar-se apenas pela exploração gráfico-geométrico do *software GeoGebra* e prefere desenvolver as integrais para confirmar as suas deduções, recorrendo ao modo formal e ao trato analítico do conteúdo como sempre ocorre no ensino clássico. Conforme Alves e Borges Neto (2011), "no ensino tradicional, tal ato improfícuo do estudante se caracteriza pelo *pensamento algorítmico*". A figura seguinte apresenta imagens registradas nos momentos em que os estudantes discutiam os comportamentos das integrais e .

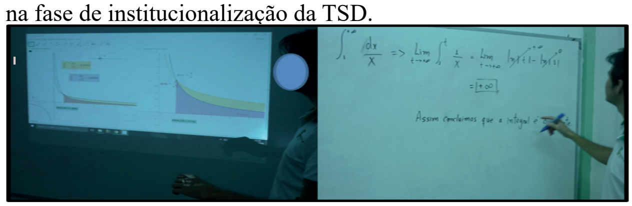
Situação de formulação: De modo simplificado os estudantes manifestaram a estratégia analítica indicada na Figura 13. Assinalamos que, como decorrência do contrato didático, sempre que necessário, os mesmos recorreram ao *software GeoGebra*, diante de alguma indecisão ou dúvida por parte do sujeito em ação de resolução do problema.

Situação de validação: Assinalamos que em ambas as situações exploradas com o grupo dos três alunos, o momento de validação, previsto pela TSD, assumiu fundamentação que vista confrontar os dados fornecidos pelo modelo computacional (Figura 13, ao lado esquerdo), com os dados previstos pelo modelo lógico-forma (figura, ao lado direito). Por fim, na figura abaixo, o estudante 3 requereu o software afim de confirmar suas conjecturas e a certeza das ações implementadas na estratégia anterior.

Figura 12 – O estudante 3 requereu o uso do software afim de confirmar suas produções fornecidas na etapa de formulação e validação da TSD

Situação de institucionalização: Para concluir, todas as informações produzidas nos momentos didáticos anteriores devem ser coligidas no sentido da culminância e a preparação de um substrato didático para a determinação de determinada propriedade, tendo como escopo a fixação/determinação do estatuto oficial de um saber científico (Almouloud, 2007, p. 40). Nesse caso, o professor deverá atuar no sentido de fazer aderir ao modelo analítico, os aspectos gráficos, numéricos e qualitativos em situação.

Figura 13 – Confrontação e comparação do modelo computacional com o modelo lógico-procedural oriunda da teoria na fase de institucionalização da TSD.



De maneira semelhante ao destacado por Artigue (2008, p. 4-5), em nosso caso, o uso da ED e da TSD, na fase de *experimentação*, proporcionou uma prática controlada na intervenção em sala de aula, de modo que, o pesquisador-professor, em conformidade com as variáveis micro-didáticas eleitas nas duas fases iniciais da ED, conseguiu predizer as reações dos aprendizes e interpretar os sentidos produzidos pelo grupo controle.

Almouloud (2007, p. 177) adverte que a análise *a posteriori* não se constitui como uma crônica da classe, mas sim, uma análise feita à luz da análise *a priori* dos fundamentos teóricos assumidos, da hipótese de trabalho, de investigação e da problemática da pesquisa. Nossa proposta de ED proporcionou antevermos determinados aspectos, de acordo com os pressupostos que elegemos nas seções anteriores.

Outrossim, seguindo os pressupostos da TSD, o confronto final dos dados e ilações formais produzidos pelos estudantes, tendo em vista o trinômio assumido como referência (ver Figura 1), com os dados extraídos e apoiados pela visualização, possibilitada pelo software. Dessa forma, assinalamos que nossa hipótese de investigação foi confirmada, posto que, os dados produzidos pelos estudantes, com origem nas interações com o *software GeoGebra* revelaram um entendimento tácito e dinâmico dos conceitos de convergência/divergência relacionado com a noção de IG. E, o tratamento logico-formal, previsto pela definição formal e o teorema, não se mostrou precipitado na atividade, uma vez que, na mediação clássica do mesmo conhecimento, desconsiderando a tecnologia, apenas o emprego das formulações de teoremas envolvendo a convergência de IG´s são previstos. Finalmente, indicamos os seguintes elementos:

- A possibilidade exploratória do *software GeoGebra*, vinculado ao modelo dinâmico representacional gráfico-geométrico das questões permitiu um entendimento não estático do processo de integração na variável real e das IG´s diante de situações didáticas que conferem a habilidade de visualização como elemento catalizador da atividade e da ação em situação dos estudantes;

- As estratégias (de investigação) dos estudantes não ficaram restritas ao trato analítico-procedural relacionados com a noção de IG´s como de modo *standard* em atividades previstas por uma mediação que desconsidera a tecnologia atual;

- A situação de ação, prevista pela TSD, envolveu elementos apoiados pela visualização, apreensão tácita e perceptual de propriedades qualitativas, viabilizadas pela exploração do modelo computacional e retardando o emprego precipitado de simbologias, de um sistema formal de representação e o uso de inferências lógicas balizadas pela teoria.

- A situação de institucionalização da sequência de ensino possibilita incorporar saberes científicos balizados pelo modelo matemático e pelo modelo computacional, cujas caraterísticas diferenciam-se de um roteiro de ensino restrito ao contexto que desconsidera a tecnologia para o ensino de IG´s;

- O cenário de interações do grupo dos três estudantes com o *software Geogebra* permitiu o desenvolvimento de uma atividade argumentativa e intuitiva dos estudantes que não permaneceu restrita ao quadro de produções de representações analíticas atinentes ao processo de convergência e divergências de IG´s;

- A descrição das fases dialéticas previstas pela TSD possibilitou uma abordagem do conteúdo envolvendo a noção de IG a partir de elementos desconsiderados em um ensino regular, na medida em que a visualização assumiu um papel catalizador inicial para a discussão dos conceitos e teoremas envolvidos nas duas situações didáticas.

Finalmente, recordando a definição formal de integral generalizada e o teorema da comparação (teorema 1), acentuamos os dados produzidos pelos estudantes com o amparo da visualização e, portanto, entendimento tácito, intuitivo e não estático dos mesmos. Dessa forma, com origem nos argumentos anteriores, propugnamos o alcance dos dois objetivos específicos indicados nas seções predecessoras, posto que foram construídas um conjunto de situações didáticas, balizadas pela sistemática prevista pela TSD, cujas características assumem um itinerário de abordagem distinto dos roteiros de estudos previstos pelos livros de Cálculo consultados.

Ademais, constatamos um conjunto de dados coligidos e produzidos a partir do debate coletivo em sala de aula e da construção dos conhecimentos dos alunos participantes do experimento, cujo conteúdo diz respeito ao entendimento dinâmico e não estático da noção de convergência e divergência de Integrais Generalizadas, cuja abordagem nos livros de Cálculo, de modo invariante, restringe um tratamento eminentemente analítico. Dessa forma, alcançamos, também, o segundo objetivo específico apontado neste estudo.

Figura 14 – Fenômenos de interesse de estudo no contexto da Transição Interna do Cálculo – TINC.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\\ \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(\mathrm{a})\end{cases} \underset{\textit{INTERNA DO CÁLCULO}}{\overset{\textit{TRANSIÇÃO}}{\Rightarrow}} \begin{cases}\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L\\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z)=f(a,b,c)\end{cases}$$

$$\left\{ f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right. \underset{\textit{INTERNA DO CÁLCULO}}{\overset{\textit{TRANSIÇÃO}}{\Rightarrow}} \begin{cases}\dfrac{\partial f(\mathrm{a,b})}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\mathrm{a}+\Delta x,b)-f(a,b)}{\Delta x}\\ \dfrac{\partial f(\mathrm{a,b})}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(\mathrm{a},b+\Delta y)-f(a,b)}{\Delta y}\end{cases}$$

Fonte: Os autores

Por fim, os elementos assinalados na presente investigação, seguem um roteiro para uma transposição didática (Chevallard, 1991) com o tema das IG´s e amparada pela TSD se torna passível de ser reproduzido e, sobretudo, replicados em outros cenários e estudos, preservando uma atenção maior ao papel do professor, como um agente responsável pela mediação de um conhecimento matemático (Alves, 2016, 2017). Assim, os estudos eventuais ulteriores no contexto da *Transição Interna do Cálculo* – (TINC) podem concorrer para o acumulo de conhecimentos necessários sobre a noção de limite e derivada (Figura 14), mediante a consideração do papel e a função do professor. Conforme indicam Perrin-Glorian & Bellemain (2016), tais conhecimentos têm se mostrado ainda deficientes no âmbito da Didática da Matemática (Alves, 2016; 2017).

6 Conclusão

Abordamos a discussão dos dados produzidos numa incursão investigativa balizadas por um *design* de investigação em Didática da Matemática, que possibilitou a obtenção de conhecimentos didáticos e metodológicos, acerca da noção de Integrais Generalizadas – IG´s, num contexto de Transição Interna do Cálculo - TINC que indicamos na figura 1. Em nosso caso, recordamos ainda que "o término da Engenharia Didática designa um conjunto de sequências de classes concebidas, organizadas e articuladas no tempo, de maneira coerente por um professor-engenheiro, com o fim de realizar um projeto de aprendizagem para uma população determinada de alunos" (Douady, 1995, p. 62).

Desse modo, apesar de circunscrevermos nossa discussão ao ensino de IG´s, o aparato teórico-conceitual elaborado aqui descrito poderá ser testado numa eventual etapa da experimentação (Laborde, 1997, p. 100) atinente ao conteúdo de Integrais Dependentes de Parâmetros – IDP´s que constituem um pré-requisito para o objeto discutido e atuam como elementos de transição no contexto da TINC (Alves, 2011). Por conseguinte, as habilidades e conhecimentos incorporados ao grupo, na fase de institucionalização, devem proporcionar o estudo da IDP´s, o que, para Alves (2011) precisa funcionar com um elemento de transição.

Vale acrescentar que, nas duas situações didáticas exploradas, em consonância com os elementos indicados pela (TSD), vislumbramos a adoção de uma prática e mediação sistemática do professor que valorizou a mobilização de conhecimentos e a atividade constante de produção de conjecturas, impulsionadas pela visualização e que que extrapolam os limites da teoria formal ou de teoremas clássicos relacionados com a convergência ou divergência de integrais que, de modo *standard*, significam um modelo estático e estruturante em Matemática Pura.

Outrossim, o *software GeoGebra* permitiu uma atividade de produção de conjecturas, a partir da interação e manipulação com o aparato tecnológico, que revelou um entendimento dinâmico e não estático do processo de integração segundo Riemann, ademais, com origem nas imagens do grupo de três estudantes, observamos uma atividade gestual capaz de significar os processos de convergência e divergência. Com isto, assinalamos o alcance do objetivo declarado no início do trabalho.

Para concluir, assumimos uma posição concorde com Cornu (1981, p. 1), quando alerta que:

> A atividade matemática não se restringe na ação de colocar em movimento proposições segundo regras lógicas; um objeto matemático não é colocado em cena unicamente a partir de axiomas e as propriedades que o caracterizam. O matemático profissional ou o estudante mobilizam em cada instante aspectos bastante pessoais relacionados com a noção matemática manipulada.

Dessa forma, com origem na perspectiva do excerto anterior, apresentamos dados relacionados com as quatros fases previstas da TSD e, o leitor poderá constatar que, em vários trechos de informações produzidas pelos estudantes, podemos constatar que as interações envolvendo professor – estudantes – modelo matemático – modelo computacional, proporcionaram a produção de significados idiossincrásicos e gestuais de cada sujeito participante do estudo que revelam a aderência de um sentido heurístico e intuitivo atinente ao conceito de IG. Por fim, posto que, a presente discussão consubstancia os resultados parciais coligidos de uma investigação fundamentada num *design* de investigação discutido internacionalmente. Cabe acentuar que, no passo seguinte, a intenção sistemática de investigação buscará a obtenção de dados empíricos atinentes ao objeto nominado de Integrais Dependentes de Parâmetros – IDP´s.

Referências

Almouloud, AS. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. São Paulo: UFPR.

Alves, F. R. V. (2011). *Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias intuitivas do Cálculo a Várias Variáveis*. Fortaleza: UFC.

Alves, F. R. V. (2012). *INSIGHT*: descrição e possibilidades de seu uso no ensino do Cálculo. *Rev VYDIA Educ*, *32(2), 149-48*.

Alves, F. R. V. (2014a). Engenharia Didática para o Teorema da Função Implícita: análises preliminares e a priori. *Rev Bras Ensino Ciênc Tecnol 7(3),148-68*.

Alves, F. R. V. (2014b). Técnica Computacional para o Ensino de Matemática Computational Technique for Teaching Mathematics – *CT² M*. *EM TEIA Rev Educ Matem Tecnol Iberoam (2), 1-9*.

Alves, F. R. V. (2016). Didática da Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. *Interfaces Educ 7(21), 131-50*.

Alves, F. R. V. (2017). Didática das Ciências e Matemática (DCeM): surgimento e implicações para a formação do professor. *Investig Ensino Ciênc 22(3),291-320*.

Alves, F. R. V. & Borges Neto, H. (2011). Transição interna do cálculo em uma variável para o cálculo a várias variáveis: uma análise de livros. *Educ Matem Pesq* 13(3), 598-625.

Alves, F. R. V; Borges Neto, H. & Alves Dias, M. (2012). Implicações e aplicações da Teoria das Representações Semióticas no ensino do Cálculo. *J Inte Est Educ Matem* 5(1), 54-84.

Artigue, M. (1984). Modélisation et Reproductibilité en Didactiques de Mathématiques. Les *Cahiers Rouge des Didactiques des Mathématiques* 8(1), 1-38.

Artigue, M. (1996). Ingénieries Didactiques. In: J. Brun, J. *Didactiques de Mathématiques*, pp. 243-264. Reims, France.

Artigue, M. (1990). Épistémologie et Didactiques. *Recherche en Didactiques des Mathématiques* 19(2), 241-86.

Artigue, M. (2008). Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nível Universitário? *Bol La Asociatíon Venezolana* 10(2),117-34.

Artigue, M. (2009). Didactical design in Mathematics Education. Carl Winslow (Ed.). *NORMA08*, Copenhaguen: Sense Publishers, Denmark.

Artigue, M. (2012). L´éducation mathématiques comme champ de recherché et champ de pratique: resultats et défis. *EM TEIA: Rev Educ Matem Tecnol Iberoam*, 3(3), 1-18.

Artigue, M. (2013). L´impact curriculaire des Technologies sur L´Éducation Mathématiques. *EM TEIA* 4(1), 1-15.

Berberian, S. K. (1979). Regulated functions: bourbakis alternative to the riemann integral. *American Mathematical Monthly*, 86(3), 208-11.

Bloch, I. (2006). *Quelques apports de la Theorie des Situations a la didactique des Mathematiques dans l´enseignement secondaire et superieure*. (habilitation de recherché). Aquitaine: IUFM.

Boschet, Françoise. & Robert, Aline. (1983). Ingénierie Didactiques sur les suítes numeriques après le baccallauréat. *Publications Mathématiques et Informatiques des Rennes*, (*2, p. 1 – 26*.

Bottazzini, Umberto. (1986). *The Higher Calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. New York: Springer-Verlag.

Bridoux, Stephanie. (2012). *Enseignement des premièeres notions de topologie à L´Université*. (thése de doctorat). Paris: Paris VII.

Brousseau, Guy. (1978). L`observation des activités didactiques. *Revue Français de Pédagogie*. nº 45, p. 130-140.

Brousseau, Guy. (1994). *Perspective pour la didactique des mathématiques: vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Paris: La Pensée Sauvage.

Brousseau, Guy. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'A.M.Q*. Montréal.

Brousseau, Guy. (1986). Fondements et méthodes de la Didactiques des Mathématiques. *Recherche en Didactiques des Mathématiques*. 7(2), 33-115.

Brousseau, Guy. (1998). Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. In: G. Brousseau. *Théorie des situations didactiques*, pp.115-160. Grenoble La Pensée Sauvage.

Brum, Wanderley, P. & Schuhmacher, E. (2013). A Engenharia Didática como campo metodológico para o planejamento de aula de matemática: análise de uma experiência didática para o estudo de geometria esférica. *J. Int. Estud. Educ. Matem* 6(2), 60-84.

Chevallard. Y. (1991). *La Transposition Didactique*. Paris: La Pensée Sauvage Édition.

Choquet, G. (1963). *What is Modern Mathematics?* England: Educational Explorers Limited.

Cornu, Bernhard. (1981). Apprentissage de la notion de limite: modèles spontanés et modèles.

Actes due Cinquième Colloque du Groupe International P.M.E., Grenoble.

Davis, R. B. & Vinner, S. (1986). The notion of limit: some seemingly unavoidable misconception stages. *J Mathem Behavior*, 5(3), 281-303.

De Lima, Vanisia, Maria. (2017). *Categorias intuitivas no ensino do cálculo e a visualização de critérios de convergência: o caso das integrais dependentes de parâmetros – IDP´s*. Fortaleza: IFCE.

Douady, R. (1995a). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. In: P. Gomez *Ingenieria Didactica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano.

Douady, R. (1995b). Nacimiento y desarrollo de la didáctica de las matemáticas en Francia: rol de los IREM. P. Gomez. *Ingenieria Didactica en Educación Matemática,* pp.61-97. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano.

Douady, R. (2008). Géométrie, graphiques, fonctions au collège. *Rev Eletr Investigación Educ Cienc*, 2(10), 1-7.

Furinghetti, F. & Paola, D. (1988). Wrong belifs and misundertandings about basic concepts of Calculus (age 16 – 19). *Proceedings of the 39th rencontré internationale de la CIEAEM*. Canadá.

Guidorizzi, H. L. (2013). *Um curso de cálculo*. São Paulo: LTC.

Houdebine, J. (1991). La representation d´une situation-problème point de vue didactiques. *Recherche en Didactiques des Mathematiques*, (6), 1-23.

Laborde, C. (1997). Affronter la complexité des situations didátiques d´apprentissage des mathématiques en classe: défis et tentatives. *DIDASKALIA*, 10(1), 97-112.

Lebl, Jiri. (2011). *Introduction to Real Analysis*. San Francisco: Springer.

Ledermann, Walter. (1960). *Complex Number*. The Free Press.

Leithold, L. (1994). *O Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: Harbra.

Lima, Elon. L. (2006). *Análise real*. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária.

Lima, M. M. & Alves, F. R. V. (2016). Engenharia didática com o tema Integrais Dependentes de Parâmetros – IDP´s. *Rev Prod Disc Educ Matem*, 5(1), 77-96.

Margolinas, C. (1995). D´evolution et institutionnalisation: deux aspects antagonistes du rôle du maître. *Didactique des disciplines scientifiques et formation des enseignants*, pp.342-47, Paris: Maison Édition.

Margolinas, C. (2005). Essai de généalogie en didactique des mathématiques. *Revue Suisse Scienc l'éducation, 7(3),* 343-60.

Margolinas, C., & Drijvers, P. (2015). Didactical engineering in France; an insider's and an outsider's view on its foundations, its practice and its impact. *ZDM Mathem Educ,* 47(4), 893-903.

Perrin-Glorian, M. J., & Bellemain, P. M. B. (2016). L´ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l´enseignement et la formation des maîtres. *I Seminário Latino Americano de Didática da Matemática - LADIMA*.

Robert, A. (1984). Ingenierie Didactique sur les suítes numériques après le baccalauréat. *Cahiers blancs de Didactiques de Mathematiques*, 4, 1-33.

Robinet, J. (1983). De L´ingenierie Didactiques. *Les Cahiers Blancs*. 1(1), 1-11.

Rogalski, M. (1990). Enseigner des Méthodes des Mathematiques. *Recherche em Didactiques des Mathématiques*, 1, 1-10.

Stewart, James. (2013). *Cálculo*. São Paulo: Thomson.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educ Studies Mathem*, 12(2), 151-69.

Tall, D. & West, B. (1986). Graphic Insight into Mathematical Concepts, *Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching*, p. 101-119.

Tall, D. (1986). *Building and testing a cognitive approach to the calculus using interactive computer graphics*. Warwick: University of Warwic.

Tall, D. (2002). *Advanced Mathematical Thinking*. Mathematics Education Library. London: Klumer Academic Publishers.

Tall, D. (2009). Dynamic Mathematics and the blending of knowledge structures in the Calculus. *ZDM Mathematics Education*, 14(23), 1-432.

Taschner, Rudolf. (2005). *The Continuum: a constructive approach to basic concepts and real analysis*. Viena: Vieweg & Sohn Verlag.

Stahl, Saul. (1999). *Real Analysis: an historical approach*. New York: John Willey and Sons.