DOI: http://dx.doi.org/10.17921/2176-5634.2018v11n3p210-219

A Interação Entre os Componentes Intuitivo, Algorítmico e Formal no Ensino dos Números Irracionais na Educação Básica

The Interaction between the Intuitive, the Algorithmic and the Formal Components in Teaching Irrational Numbers at Basic Education

Olga Corbo[a]; Ruy César Pietropaolo[bc]*; Marta Élid Amorim[d]

[a]Secretaria de Municipal de Educação de São Paulo. SP, Brasil.
[b]Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. SP, Brasil;
[c]Unopar, Programa e Pós-Graduação Stricto Sensu em Ensino de Ciências e Saúde. SP, Brasil
[d]Universidade Federal de Sergipe, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. SE, Brasil.
*E-mail: rpietropaolo@gmail.com.

Resumo

Este artigo contém considerações a respeito de possibilidades de articulação dos aspectos intuitivo, algorítmico e formal, na abordagem dos números irracionais, na Educação Básica. Nossos argumentos são fundamentados em Fischbein (1994) que defende a importância da integração desses três componentes na atividade matemática, a fim de desenvolver no estudante um raciocínio matemático eficaz. Apresentamos situações exemplares, que favorecem essa integração, destacando que uma abordagem dos irracionais nesse sentido pressupõe o desenvolvimento anterior de habilidades relativas aos racionais, igualmente voltadas para a exploração desses componentes. Finalmente, enfatizamos a relevância do estudo dos irracionais na Educação Básica, como etapa indispensável para a posterior compreensão da ampliação dos campos numéricos.

Palavras-chave: Números Irracionais. Componentes Intuitivo. Algorítmico e Formal.

Abstract

This article contains considerations regarding articulation possibilities of intuitive, algorithmic and formal aspects, in the approach of irrational numbers, in Basic Education. Our arguments are based on Fischbein (1994) who argues that the importance of integrating these three components in mathematical activity, in order to develop an effective mathematical reasoning in a student. Here exemplary situations that favor such integration, noting that an approach of the irrational numbers presupposes the previous development of skills relating to rational, also focused on the exploration of these components. Finally, we emphasize the relevance of the study of the irrational numbers in Basic Education, as essential stage to the understanding of numeric fields expansion.

Keywords: *Irrational Numbers. Components Intuitive, Algorithmic and Formal.*

1 Introdução

Neste artigo, tomamos como base teórica as ideias defendidas por Fischbein (1994) a respeito da relevância de integrar três componentes considerados básicos na atividade matemática, que são os componentes: intuitivo, algorítmico e formal.

Assim, com o objetivo de contribuir para uma reflexão sobre o estudo dos números irracionais na Educação Básica, procuramos interpretar possíveis estratégias de enfrentamento de situações que envolvem esse tema, identificando aspectos, nos quais, essas abordagens favorecem a exploração e a articulação desses três componentes.

O *componente formal* diz respeito aos conhecimentos relativos às definições, axiomas, teoremas e provas, que devem ser aprendidos, organizados e aplicados pelo aluno. Nesse sentido, conforme acrescenta Fischbein (1994), um processo educativo adequado é indispensável, visto que a compreensão do que é rigor e coerência em Matemática não é adquirida espontaneamente pelo estudante.

O *algorítmico,* por sua vez, concerne às habilidades relativas à aplicação de técnicas e procedimentos padronizados de resolução, cujo desenvolvimento também requer uma formação meticulosa.

Segundo Fischbein (1994), a exploração da íntima relação entre o aspecto algorítmico e o formal constitui-se em condição básica para o desenvolvimento de um raciocínio matemático eficiente. Isto é, o conhecimento de componentes formais não garante o necessário para o enfrentamento de quaisquer problemas e, por outro lado, o domínio de técnicas, isento do conhecimento de argumentos que justificam essas técnicas, pode não ser suficiente para a resolução de problemas que fogem ao padrão.

O *componente intuitivo se refere* a uma compreensão que o indivíduo considera autoevidente, que o faz aceitar uma ideia sem questionar a necessidade de uma justificativa que legitime essa ideia. Assim, a aceitação de um conceito com base apenas na intuição pode gerar um entrave para a compreensão de outros conceitos, como será referido mais adiante.

Devemos esclarecer que as considerações apresentadas neste artigo têm, como ponto de partida, situações exemplares, não significando que os aspectos intuitivo, algorítmico e formal devem, necessariamente, ser explorados num mesmo momento do processo de instrução. Cabe ao professor adequar esses componentes à situação que está sendo trabalhada em aula, e aos alunos, de acordo com a fase escolar em que se encontram.

2 Sobre os Números Racionais

A reflexão aqui proposta sobre o estudo dos irracionais remete à necessidade de incluir uma abordagem que esteja direcionada para o desenvolvimento de habilidades relativas aos números racionais que também contemple os aspectos algorítmico, intuitivo e formal da atividade matemática.

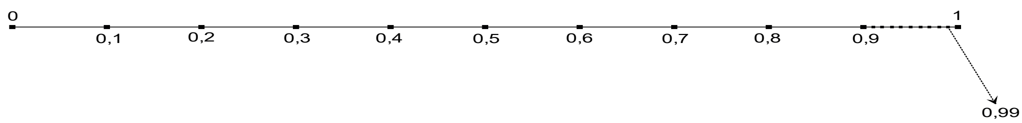
Nessa perspectiva, entendemos que deveriam ser explorados os distintos significados dos números racionais, por meio de atividades que favoreçam a percepção da equivalência entre suas representações fracionária e decimal, cuja compreensão é indispensável para a posterior introdução e definição dos números irracionais.

Da mesma forma, a possibilidade de representar qualquer número racional como dízima periódica pode ser explorada para provocar uma discussão sobre a densidade desse conjunto de números como iniciação ao estudo dos números irracionais.

Comparando, por exemplo, os números 0,9999... e 1, um aluno pode supor, inicialmente, que 0,9999... < 1 e pode, em virtude disso, considerar a possibilidade da existência de algum número entre 0,9999... e 1.

Dada a representação gráfica abaixo:

Figura 1 - Auxiliar na discussão do aspecto intuitivo da igualdade 0,9999...= 1



temos: 0 < 0,9 < 1.

Subdividindo o intervalo entre 0,9 e 1 em dez partes iguais, temos: 0,99 < 1 e, por procedimento análogo, teríamos: 0,999 < 1 e 0,9999 < 1, etc..

Consideremos, agora, o número 0,9999...

Se 0,9999...< 1, para obter um número entre 0,9999... e 1, seria necessário substituir um algarismo 9 por outro algarismo maior do que ele. Como não existe esse algarismo, concluímos que 0,9999... não pode ser menor do que 1, constituindo, assim, uma forma intuitiva de aceitação da igualdade: 0,9999... = 1.

Uma abordagem possível, com destaque para os aspectos algorítmico e formal envolveria o processo de obtenção da fração geratriz da dízima periódica 0,9999..., pela suposição inicial de que 0,9999... = a/b .

Multiplicando os dois membros por 10, temos 9,9999... = 10a/b e subtraindo, membro a membro essas duas igualdades, obtemos: 9 = 9a/b. Finalmente, 1 = a/b e assim, 0,9999... = 1.

É certo que a construção da fração geratriz de uma dízima periódica é conteúdo prescrito para os dois últimos anos do Ensino Fundamental[1] e antecede a introdução do conjunto dos números reais como reunião dos conjuntos dos racionais e irracionais. Contudo, as justificativas e os argumentos utilizados pelo professor nessa abordagem, devem se assentar sobre concepções relativas ao conjunto dos números reais como um corpo em que se definem as propriedades da igualdade, assegurando a possibilidade de escrever 0,9999... = a/b, com a e b inteiros e b não nulo e também garantindo a conservação da igualdade, quando multiplicamos os dois membros por um mesmo número real distinto de zero.

Ou seja, a técnica para a obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica pela multiplicação dos dois membros da igualdade por uma potência de base 10 (indicada em muitos livros didáticos) só é possível porque o número que estamos considerando é número real. Melhor dizendo, essa estratégia só é possível porque a série considerada (0,9999... = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 +...) é convergente.

Por exemplo, aplicando essas mesmas propriedades, para determinar a soma dos termos da progressão geométrica (1,11/10,121/100,1331/1000,…), teríamos:

$$S = 1+ 11/10+ 121/100 + 1331/1000 + ...$$

Multiplicando os dois membros da igualdade, por 10, obtemos:

$$10S=10.(1+ 11/10 + 121 / 100 + 1331/1000 +...) = 10 + 11+ 121/10 + 1331/100 + 14641/1000…$$

Colocando 11 em evidência: 10S=10+11.(1+ 11/10+ 121/100+1331/1000+...)

Finalmente, 10S=10+11.S 10S-11S=10 -S=10 S=-10

E, então, teríamos o caso em que a soma de infinitas parcelas positivas é um número negativo – o que consiste em um absurdo, que decorre da aplicação, à série divergente S=1 + 11/10 + 121/100 + 1331/1000 +... , de propriedades válidas apenas para séries convergentes.

Uma abordagem mais propícia para justificar a igualdade 0,9999... = 1 poderia ser feita no Ensino Médio, quando os estudantes já se apropriaram de noções relativas às

1 Parâmetros Curriculares Nacionais (1998).

Progressões Geométricas. No desenvolvimento apresentado a seguir, a compreensão das propriedades que sustentam cada uma das etapas constituiria o componente formal:

0,9999... = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + ... = 9/10 + 9/100 + 9/(1000) + 9/10000 +... = 9/10 + $9/10^2$ + $9/10^3$ + $9/10^4$ + ... + $9/10^n$ + ... = 9.(1/10+$1/10^2$+$1/10^3$ +$1/10^4$ + ... + $1/10^n$ …)

Calculando a soma dos termos da PG infinita, indicada entre parênteses, em que a_1 = 1/10 e q=1/10, temos: S_n = a_1/(1-q) = (1/10)/(1-1/10) = (1/10)/(9/10) = 1/9. Assim, 0,9999... = 9.1/9 = 1

A elaboração desta última justificativa requer a aplicação de técnicas e presume a mobilização de conhecimentos relativos à representação polinomial do número 0,9999..., ao reconhecimento dos termos da PG infinita, bem como à utilização da fórmula para o cálculo da soma de seus termos. Não traçamos uma linha divisória entre os aspectos algorítmico e formal, que aqui, em nosso entender, se exigem e se complementam.

Finalmente, se 0,9999... = 1, são também verdadeiras as igualdades: 0,09999... = 0,1 e 0,009999... = 0,01, etc.. e permitem a representação de qualquer número racional em forma de dízima periódica. Como exemplos, 0,45 = 0,44 + 0,01 0,45 = 0,44 + 0,009999... = 0,449999... e 2,8 = 2,7 + 0,1 2,8 = 2,7 + 0,09999... = 2,79999..

2.1 A Densidade do Conjunto dos Números Racionais como Ponto de Partida para o Estudo dos Números Irracionais

Uma abordagem que explore a densidade do conjunto Q, favorecendo a compreensão de que em qualquer intervalo da reta, por menor que seja, existem infinitos números racionais, pode constituir oportunidade para a proposta de discussões sobre a inexistência de sucessor para um número racional e sobre a existência de pontos na reta que não correspondem a números racionais.

O cálculo da média aritmética de dois números pode ser ponto de partida para um princípio de discussão sobre a densidade do conjunto dos números racionais.

A nosso ver, seria intuitiva a ideia de que a média aritmética entre dois números quaisquer está situada entre esses dois números na reta numérica, provavelmente, porque associamos média aritmética de dois números à noção de ponto médio de um segmento.

Essa mesma questão, tratada sob o aspecto algorítmico, consiste em cálculos que, de certa forma, confirmam essa intuição. Um estudante que domina a técnica para o cálculo da média aritmética de dois números pode verificar que o número obtido estaria entre os dois números dados, se fossem localizados sobre a reta numérica.

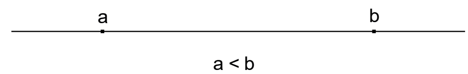
No entanto, é a generalização dessa ideia que permite convencer um aluno de que entre dois números racionais, ainda que estejam infinitamente próximos, na reta, existem infinitos outros números racionais. Assim, esse é um conhecimento intuitivo que pode ser justificado logicamente (introduzindo o componente formal), conforme segue:

Sejam a e b, dois números racionais distintos quaisquer. A média aritmética de a e b é um número racional c situado entre a e b, na reta numérica.

Hipótese: a e b são números racionais distintos quaisquer, tais que a < b.
c é a média aritmética de a e b.

Tese: c é número racional
a, b, c representados na reta numérica são da forma: a < c < b.

Demonstração: Representando a e b sobre a reta numérica, temos:



O número c é a média aritmética de a e b. Então, .

(a + b) ∈ Q e 1/2.(a + b) ∈ Q → c= ((a+b)/2) ∈ Q

Primeira parte: c é número racional

a) Por hipótese, a e b são números racionais quaisquer.
b) Q é fechado para a adição e para a multiplicação, logo,
(a + b) Q e .(a + b) Q Q.

Segunda parte: a < c < b

a) Suponhamos que c < a. Nesse caso, < a b < a. Contradiz a hipótese.
b) Suponhamos que c > b. Nesse caso, > b ⟹ a > b. Contradiz a hipótese.
c) Logo, a < c < b.

Outra forma de abordagem dos números irracionais poderia partir de situações que envolvem a inserção de números entre dois racionais conhecidos, independentemente de sua representação gráfica, visando a exploração do aspecto algorítmico da busca de soluções.

Com a atividade: “Indique cinco números que estejam localizados entre 6,25631 e 6,25632, na reta numérica”[2], a possibilidade de inventar números, como: 6,2563101; 6,2563121; 6,256310000064, pode convencer um aluno da existência de outros infinitos números entre os dois racionais dados. Além disso, pode levá-lo a generalizar essa ideia para quaisquer números racionais, independentemente de serem localizados, na prática, sobre a reta numérica.

Neste caso, o componente algorítmico da busca de outros números que atendam às condições impostas na questão estaria fundamentado em propriedades do sistema de numeração decimal que permitem a comparação de números racionais representados na forma decimal, caracterizando assim, o componente formal, no enfrentamento desta atividade.

Finalmente, consideramos necessário destacar que, se por

2 Atividade proposta a um grupo de 23 professores da rede pública estadual, como parte de estudo que investigou os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para abordar números irracionais na Educação Básica. (Corbo, 2012).

um lado, a compreensão da densidade do conjunto Q em toda a reta numérica é fundamental para a introdução dos números irracionais e, consequentemente, para o estudo da ampliação dos campos numéricos, por outro lado, a aceitação da densidade desse conjunto pode levar uma pessoa a acreditar "cegamente" na ideia de que os números racionais preenchem toda a reta e essa crença, por sua vez, pode constituir um entrave para a aceitação da existência de infinitos pontos na reta, que não correspondem a números racionais.

3 Introduzindo os Números Irracionais

A mesma proposta de inserção de números entre dois números dados, mencionada nos parágrafos anteriores, poderia "provocar" a construção de números irracionais, por alunos que ainda desconhecem esse conjunto de números.

Se, por exemplo, são dados os números 1,234 e 1,3333..., o aluno pode perceber a possibilidade de inventar também números cuja representação decimal é infinita. Talvez possa criar números como 1,2345, ou 1,234555555555... (racionais) e essa "liberdade" para a invenção pode levá-lo a perceber que, usando os algarismos de 0 a 9 (conhecidos), ainda pode construir outros, também com representação decimal infinita, mas que não apresentam repetição: 1,23456789101112131415... Pode também criar outros, de representação decimal infinita, que exibem alguma regularidade, mas não periódica, como: 1,234505005000500005... ou 1,33301011011101111...

Esta primeira abordagem, que ocorre no campo numérico, (interpretada por nós, como algorítmica, porque os estudantes provavelmente terão a preocupação de "jogar" com os algarismos conhecidos (de 0 a 9), para criar números diferentes), favorece a percepção da existência de outros números, com os quais o aluno ainda não trabalhou e, além disso, permite ao aluno concluir que esses "outros" números são em quantidade infinita porque variando a posição dos algarismos, é possível inventar outros infinitos números.

Nenhum destes "outros" números é racional, visto que têm representação decimal infinita e não periódica.

3.1 Definições e representações

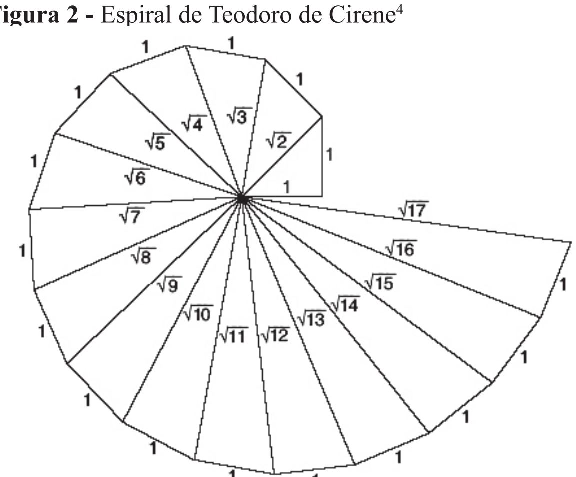
Tendo em conta o exposto nos parágrafos anteriores, uma primeira definição formal do número que o aluno está conhecendo agora, como número irracional, seria feita de acordo com estes números construídos pelo aluno, diferentemente de abordagens que, em geral, são propostas em materiais pedagógicos, que introduzem primeiro os irracionais ou **Φ**(fi) por exemplo, por meio de experimentos práticos de medição. Ou seja, essa definição seria feita com base na representação decimal: número irracional é todo número cuja representação decimal é infinita e não periódica.

Diversos pesquisadores, assim como Sirotic & Zazkis (2005), defendem a ideia de que a abordagem dos irracionais deve incluir uma discussão sobre a representação geométrica de irracionais construtíveis com régua e compasso. Em seu artigo sobre a localização de números irracionais na reta numérica, as mesmas argumentam que

> a ênfase sobre a representação decimal de números irracionais, seja esta explícita ou implícita, não contribui para a compreensão conceitual do número irracional. Com números irracionais, uma pessoa é colocada diante dos números decimais infinitos de um tipo especial – números que não podem ser escritos ou totalmente desconhecidos. Sobre isso, Stewart (1995) desafia a sabedoria de chamar números irracionais de reais; isto é, como pode alguma coisa ser real se ela não pode sequer ser escrita completamente? Nesse sentido, a representação geométrica poderia vir quase como um alívio no processo de aprendizagem dos números irracionais.[3] (p.6-7, tradução nossa).

A Figura 2 esboça uma construção geométrica, que consiste no processo de obtenção de segmentos de medida irracional, sendo tal medida obtida pela aplicação do Teorema de Pitágoras ao primeiro triângulo retângulo (de catetos com medida 1u) e aos triângulos retângulos subsequentes, que têm um cateto de medida 1u e outro cateto formado pela hipotenusa do triângulo retângulo anterior.

Figura 2 - Espiral de Teodoro de Cirene[4]



Fonte: Os autores.

O processo de construção dessa espiral requer um domínio de técnicas de desenho, que não prescinde do conhecimento sobre definições, classificações e propriedades de figuras geométricas, como: posições relativas de retas, ângulos, triângulos e aplicação do Teorema de Pitágoras.

A nosso ver, deve haver aqui uma interdependência entre

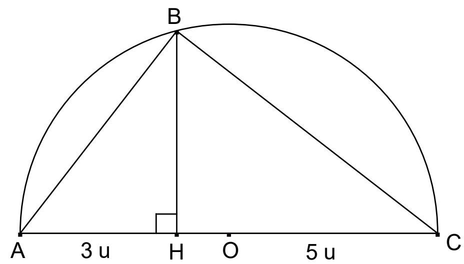
3 emphasis on decimal representation of irrational numbers, be it explicit or implicit, does not contribute to the conceptual understanding of irrationality. And with irrational numbers one is faced with infinite decimal numbers of a special kind – numbers that cannot be written down or known fully. On this note, Stewart (1995) challenges the wisdom of calling irrational numbers real; that is, how can something be real if it cannot be even written down fully? In this sense, geometric representation should come almost as a relief in the process of learning about irrationals. (Sirotic & Zazkis, 2005, p.6-7).

4 Segundo Platão (séc. IV a.C.), Teodoro de Cirene (que viveu por volta de 390 a.C.), foi o primeiro a provar a irracionalidade das raízes quadradas dos números inteiros não quadrados perfeitos de 3 a 17, inclusive. (Boyer, 1996, p. 59).

as técnicas (componente algorítmico) e os argumentos que fundamentam essas técnicas (componente formal) para que se dê a percepção da possibilidade de construção de infinitos segmentos de medida irracional.

Por outro lado, a construção da média geométrica de dois números dados pode favorecer a obtenção de um segmento de medida irracional, sem que haja necessidade de construir a espiral de triângulos retângulos. Por exemplo, um segmento de medida$\sqrt{15}$ u pode ser obtido pela construção de um triângulo retângulo em que as projeções dos catetos sobre a hipotenusa tenham medidas 3u e 5u.

Figura 3 – Média geométrica de dois números. Processo para a obtenção de segmento de medida irracional



Fonte: Acervo pessoal

O triângulo ABC é triângulo retângulo em B, pois está inscrito em uma semicircunferência. Assim, temos $BH^2 = (AH).(HC) = (3u).(5u)$ $BH = \sqrt{15}$ u.

Finalmente, o transporte de segmentos de medida irracional para a reta numérica pode acrescentar a percepção da existência de pontos na reta que não correspondem a números racionais, muito embora seja denso, na reta, o conjunto dos racionais.

A representação geométrica de números irracionais, conforme observam Sirotic & Zazkis (2005, p.7), além de ser acessível ao aluno, visto que exige conhecimentos relativos ao Teorema de Pitágoras, revela a ideia de correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos da reta e, dessa forma, desperta a atenção dos estudantes para uma representação concreta do número irracional, como um objeto: um ponto sobre a reta, uma distância irracional do zero – muito diferente do processo de construção da representação decimal infinita.

Essas abordagens – numérica e geométrica – se complementam no processo de construção do conceito de número irracional, pois os exemplos de números que poderiam ser criados pelos alunos, representados na forma decimal, e aqueles construídos com régua e compasso colocam em cena os números irracionais sob duas representações (na forma decimal e em forma de radical).

Em acréscimo, os processos algorítmicos de busca por aproximações racionais sucessivas para números irracionais, na escrita decimal ou na escrita fracionária, podem facilitar ao aluno a percepção da ausência de precisão, quando se pretende encontrar a representação decimal correspondente à raiz quadrada de um número não quadrado perfeito. Tanto a obtenção de aproximações decimais por falta e por excesso (com o auxílio da calculadora), como a construção de frações contínuas correspondentes a números irracionais, são procedimentos infinitos, conforme exemplificamos a seguir:

- Obtenção de aproximações decimais de $\sqrt{5}$:

Considerando que $2 < \sqrt{5} < 3$, a busca de valores aproximados por uma casa decimal, cujo quadrado é igual a 5, pode resultar em:

número	2,1	2,2	2,3	2,4
quadrado	4,41	4,84	5,29	5,76

$2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ (valores aproximados por falta e por excesso, com uma casa decimal).

Buscando resultados aproximados para , com duas casas decimais, temos:

número	2,21	2,22	2,23	2,24	2,25
quadrado	4,8841	4,9284	4,9729	5,0176	5,0625

$2,23 < \sqrt{5} < 2,24$ (valores aproximados por falta e por excesso, com duas casas decimais).

Analogamente, podem ser obtidas as aproximações por falta e por excesso, com três, quatro, etc., casas decimais e, a partir desses cálculos, não obstante as limitações da calculadora, um aluno pode perceber que, mesmo considerando aproximações racionais com muitas casas decimais, o quadrado de uma fração não será exatamente 5.

Outra forma de obter aproximações racionais de um número irracional consiste na construção da fração contínua correspondente a esse número. Para , temos:

a) $2 < \sqrt{5} < 3$ $\sqrt{5} = 2 + 1/x$ $(x>1)$ (1)

$\rightarrow \sqrt{5}-2 = 1/x \rightarrow x = 1/(\sqrt{5}-2) . (\sqrt{5}+2)/(\sqrt{5}+2) \rightarrow x = \sqrt{5}+2$ (2)

Substituindo (2) em (1), temos: $\sqrt{5} = 2 + 1/(2+\sqrt{5})$ (3)

b) Transformando o denominador $(2 + \sqrt{5})$ em uma soma de um número inteiro com uma fração de numerador 1, temos:

$4 < 2 + \sqrt{5} < 5 \rightarrow 2 + \sqrt{5} = 4 + + 1/y$ $(y>1)$ (4)

$\rightarrow \sqrt{5}-2 = 1/y \rightarrow y = 1/(\sqrt{5}-2) . (\sqrt{5}+2)/(\sqrt{5}+2) \rightarrow y = \sqrt{5}+2$ (5)

Substituindo (5) em (4), temos: 2 + = 4 + (6)

c) Substituindo (6) em (3), $\sqrt{5} = 2 + 1/(4 + 1/(2 + \sqrt{5}))$

d) Neste caso, deveríamos transformar novamente o denominador $(2 + \sqrt{5})$ em uma soma de um número inteiro com uma fração de numerador 1. No entanto, de (2) e (5) notamos que x = y. Pelo mesmo raciocínio, teríamos $x = y = z = w = ... = 2 + \sqrt{5}$.

e) Assim, a fração contínua referente ao número pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\sqrt{5} = 2 + 1/(4 + 1/(4 + 1/(4 + 1/(4 + 1/(4 + 1/(4\ldots))))))$$

O Quadro 1 contém as aproximações obtidas pela construção da fração contínua correspondente ao número :

Quadro 1 – Etapas para a obtenção de aproximações decimais de √5

Aproximações de √5	**Erro em relação ao valor decimal de √5**
2	0,236067977
2 + 1/4 = 9/4 = 2,25	0,013932022
2+1/(4+1/4) = 38/17 2,235294	0,00077385985
2+1/(4+1/(4+1/4))= 161/72 2,236111	0,00004313361
2+1/(4+1/(4+1/(4+1/4)))= 682/305 2,236065574	0,00000240373

Fonte: Os autores.

Nada nesses processos, no entanto, assegura a ausência de um período na representação decimal desse número. Ou seja, esses processos não garantem a irracionalidade de √5. O que permite afirmar que √5 é irracional é a negação das características que fariam desse número um racional e, nesse sentido, o aspecto formal se sobrepõe ao algorítmico. Isto é, a irracionalidade de √5 só pode ser garantida por meio de argumentos formais.

3.2 A importância do tratamento formal no estudo dos números irracionais

Discutindo sobre a prova da irracionalidade de √2, por redução ao absurdo, Tall (1979) argumenta que as ideias devem ser apresentadas aos alunos, em qualquer fase do desenvolvimento, de tal forma que sejam potencialmente significativas. Segundo esse pesquisador, “a prova inicial pode ser mais pesada, menos agradável esteticamente, desde que prove mais significativamente para o estudante no estágio específico considerado.”[5](p.1, tradução nossa).

Dessa forma, cumpre ao professor a escolha dos encaminhamentos, de acordo com o nível de compreensão dos alunos para os quais será apresentada a prova.

Uma prova algébrica da irracionalidade de √5 é apresentada a seguir.

Hipótese: Todo número racional pode ser representado na forma a/b com a e b inteiros e b não nulo.

Tese: é número irracional

Parte A: Provamos que “x é par x^2 par”.

a) Se x é par, então, x^2 é par.

- x é par tal que x = 2p $x^2 = (2p)^2 = 4p^2 = 2(2p^2)$. Ou seja, x^2 também é par.

b) Se x^2 é par, então, x é par.

- se x^2 é par, existe q inteiro, tal que x^2 = 2q.
- considerando a forma fatorada de x, temos x=a.b.c.d.... Nesse caso, a forma fatorada de x^2 é x^2 = a.a.b.b.c.c.d.d.... Ou seja, cada um dos fatores primos de x deve se repetir um número par de vezes em x^2 a.a.b.b.c.c.d.d.... = 2q.
- pelo Teorema Fundamental da Aritmética[6], a forma fatorada de qualquer número natural diferente de 1 é única. Assim, se a igualdade a.a.b.b.c.c.d.d.... = 2q é verdadeira, então o número inteiro q deve ter pelo menos um fator igual a 2, para que a quantidade de fatores 2 também seja par. Dessa forma, q também é par e, consequentemente, x também será par.

Parte B: Provamos que é irracional”.

a) Suponhamos que seja número racional. Nesse caso, existem p e q inteiros, sendo q, m.d.c.(p,q) = 1, tais que = .

b) Elevando ao quadrado os dois membros da igualdade = , temos:
2 =   é par   é par   (

c) Substituindo   em , temos:
é par *q* é par.

d) Nestes últimos itens (b) e (c), concluímos que *p* e *q* são pares, o que contradiz a suposição inicial de que m.d.c. (p,q) = 1.

e) Assim, a igualdade √2 = a/b não pode ser válida e, consequentemente, √2 não pode ser número racional. Logo, o número √2 é irracional.

Tall (1979) observa que esta prova muitas vezes causa nos estudantes um vazio, uma sensação de falta de explicação, em relação às razões pelas quais o número √2 é irracional, posto que o absurdo a que se chega consiste não no fato de que √2 não pode ser representado por a/b com a e b inteiros e b não nulo, mas no fato de que √2 não pode ser representado por a/b com a e b inteiros e b não nulo, sendo a/b uma fração irredutível.

Também sobre a demonstração da irracionalidade de √2, Tall & Schwarzenberger (1978, p.9) argumentam que “a própria estrutura da prova acentua o tipo de conflito que estamos ansiosos por evitar, pelo fato de uma proposição e sua negação serem afirmadas simultaneamente[7]” (tradução nossa). Em virtude disso, estes pesquisadores defendem a ideia de que, inicialmente, as provas por absurdo deveriam ser apresentadas de forma tão “direta” quanto possível. (loc. cit.).

Uma prova da irracionalidade de √2, conforme tal sugestão seria:

Hipótese: Todo número inteiro maior do que 1 possui uma única representação em forma de produto de números primos, a menos de permutações de seus fatores (Teorema Fundamental da Aritmética)

Tese: √2 é número irracional.

a) Considerando uma fração qualquer, decompomos seu numerador e seu denominador em fatores primos e cancelamos os fatores comuns. A fração obtida é irredutível.

b) Seja m/n essa fração, que, elevada ao quadrado é representada por m^2/n^2 em que:

- m^2 tem os mesmos fatores primos de m, mas a quantidade de cada fator primo em é o dobro da quantidade desse

5 The initial proof may be more cumbersome, less aesthetically pleasing, yet prove more meaningful to the learner at the particular stage under consideration (Tall, 1979).

6 Teorema Fundamental da Aritmética: Todo número natural, diferente de 1, pode ser decomposto em fatores primos de modo único, a menos da ordem dos fatores. (Niven, 1984).

7 The very structure of the proof accentuates the kind of conflict which we are anxious to avoid, because of the fact that a statement and its negation are affirmed simultaneously. (Tall & Schwarzenberger, 1978).

mesmo fator em m;

- n^2 também tem os mesmos fatores primos de n, e a ocorrência de cada fator primo em n^2 é o dobro de sua ocorrência em n;

Consequentemente, o quadrado de um número racional é uma fração cujos termos contêm número par de fatores primos.

c) Quadrando o número $\sqrt{2}$ temos: $(\sqrt{2})^2 = 2 = 2/1$.

Na fração 2/1 o numerador e o denominador não contêm quantidades pares de fatores primos. Logo, 2 não é o quadrado de um número racional.

Portanto, $\sqrt{2}$ é número irracional.

Essa prova se estende para $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ ou qualquer raiz quadrada $\sqrt{(a/b)}$, sendo (a/b) uma fração irredutível com pelo menos um termo não quadrado perfeito, como $\sqrt{(3/16)}$, $\sqrt{(7/5)}$ e pode também ser generalizada para raízes cúbicas ou raízes de índice mais alto.

É neste ponto, a nosso ver, que seria convincente dizer aos alunos que um número irracional não pode ser representado na forma a/b, com a e b inteiros e b distinto de zero. Ou seja, simplesmente definir os irracionais como números que não podem ser representados como razão entre inteiros, sem desenvolver uma demonstração que seja compreensível aos estudantes, implica esperar a aceitação dessa sentença como verdadeira, sem que haja significado para esses alunos.

3.3 A calculadora como recurso para a abordagem dos números irracionais

Embora a calculadora constitua ferramenta auxiliar no processo de obtenção de aproximações racionais para números irracionais, conforme foi visto, trata-se de recurso que deve ser visto com reservas, uma vez que a quantidade limitada de dígitos oculta, em determinados casos, a formação do período de uma dízima, podendo induzir o aluno a uma interpretação incorreta do resultado exposto no visor. A expansão decimal de 1/17, por exemplo, poderia ser interpretada como representação de um número irracional, pois o período dessa dízima contém 16 algarismos e em uma calculadora, não poderia ser identificado.

Não há orientações nos PCN (1998), por exemplo, que alertem o professor no sentido de promover a discussão com seus alunos sobre possibilidades diferentes de formas fracionárias que correspondam a uma mesma expansão decimal obtida com o auxílio da calculadora. Como exemplo, o número 0,3333333 corresponderia a 1/3 ou a 1000/3000 ou a 3333333/10000000?

Trata-se, assim, de recurso que precisa ser associado a outras estratégias que se complementem, na constituição dos aspectos algorítmicos (por exemplo, por meio da divisão de números inteiros, sem o auxílio da calculadora, para que o aluno compare a quantidade de restos distintos possíveis e a quantidade dos algarismos que formam o período) e dos aspectos formais (por exemplo, definições e representações de números racionais e irracionais e prova da irracionalidade de um número).

3.4 Sobre as operações com números racionais e irracionais

O caráter algorítmico presente no estudo das operações com números racionais e irracionais, integrado à exploração das propriedades válidas para essas operações, pode favorecer a percepção da importância dos argumentos formais, no trabalho com os números irracionais, o estabelecimento de relações entre os racionais e os irracionais e, igualmente, a percepção da possibilidade de construir infinitos números irracionais a partir de um único número cuja irracionalidade já foi aceita (já foi provada).

Pode, por exemplo, auxiliar na distinção entre proposições cuja avaliação, como verdadeiras ou falsas, exige o desenvolvimento de uma prova formal e proposições para as quais bastaria um contraexemplo. Para ilustrar, consideremos as assertivas: "a soma de dois números racionais é sempre racional" e "a soma de dois números irracionais é sempre irracional".

A intuição pode levar um aluno a classificar a primeira delas como verdadeira e a buscar exemplos para mostrar que a soma de dois racionais é sempre racional – o que caracterizaria o aspecto algorítmico associado ao intuitivo, na elaboração da resposta. A apresentação de argumentos algébricos, indicando a generalização dessa ideia constituiria o componente formal. Uma justificativa poderia ser desenvolvida como segue:

Hipótese:	número racional é todo número que pode ser representado por a/b, com a e b inteiros e b distinto de zero. $a,b,c,d \in Z$, $b \neq 0$ e $d \neq 0 \rightarrow a/b$ e c/d
Tese:	$(a/b+c/d) \in Q$

Demonstração:

a) $a/b , c/d \in \rightarrow a/b + c/d = (ad+cb)/bd$

b) $a,b,c,d \in Z$, $b \neq 0$ e $d \neq 0$; Z é fechado para a adição e para a multiplicação, logo, (ad+cb)□Z;bd□ Z^* □(□┬) $(ad+cb)/bd \in Q \rightarrow (a/b+c/d) \in Q$.

Para a segunda proposição, "A soma de dois números irracionais é sempre irracional.", um contraexemplo: $\sqrt{5} + (-\sqrt{5}) = 0 \in Q$ poderia justificar formalmente a classificação da sentença como falsa.

Por outro lado, a exploração das propriedades de operações que envolvem números racionais e irracionais pode também auxiliar na percepção da necessidade de recorrer à prova por redução ao absurdo. Por exemplo, uma prova formal para a afirmação: "A soma de um número racional com um número irracional é sempre um número irracional" poderia ser desenvolvida da seguinte forma:

Hipótese $(a/b \in Q$, $a,b \in Z$ e $b \neq 0$ $\propto$ é irracional

Tese: $\{(a/b+ \propto$ é irracional

Demonstração:

Supondo que $(a/b+\infty)$ seja racional, então, $p, q \in Z$, tais que: $= (a/b+\infty) = p/q$

□ = p/q - a/b □(□┬) □ = (pb-aq)/qb□Q (pois (pb-aq)□Z; b≠0 e q≠0 □(□┬) qb□Z^*)

Mas, é irracional, por hipótese.

Logo, é um número racional e irracional ao mesmo tempo - o que representa um absurdo, que decorre de havermos suposto que é racional. Logo, esse número é irracional.

De forma análoga, pode-se chegar à conclusão de que, dados um número racional e um número irracional , então, , e são números irracionais.

Esses resultados podem ser a base para o aluno criar infinitos números irracionais, a partir de um único número irracional. Por exemplo,

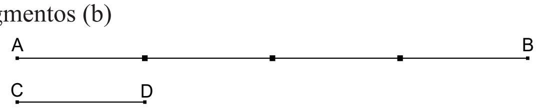
 é irracional e 2 é racional é irracional; é irracional; é irracional.

4 Sobre a Incomensurabilidade de Segmentos de Reta

Tomando dois segmentos de reta quaisquer: AB e CD, consideremos três situações distintas:

- CD cabe um número inteiro de vezes em AB. Por exemplo,

Figura 4 - Abordagem: conceito de incomensurabilidade de segmentos (b)

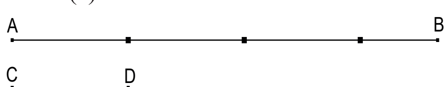


Fonte: Os autores.

A medida de AB, tendo CD como unidade de medida seria representada por: AB = 4CD.

- CD não cabe um número inteiro de vezes em AB. Por exemplo,

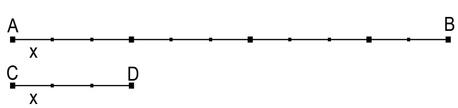
Figura 5 - Abordagem: conceito de incomensurabilidade de segmentos (c)



Fonte: Os autores.

Uma opção seria dividir CD em partes menores de comprimento x, de tal forma que esses segmentos menores de comprimento x caibam um número inteiro de vezes tanto em AB quanto em CD. Teríamos, por exemplo, a seguinte situação:

Figura 6 - Abordagem: conceito de incomensurabilidade de segmentos (d)



Fonte: Os autores.

O segmento de medida x é um submúltiplo comum de AB e CD – cabe um número inteiro de vezes em AB e outro número inteiro de vezes em CD.

Podemos escrever: e assim, a medida de AB, tomando CD como unidade de medida seria representada por: AB = CD.

Dois segmentos de reta, nessas condições, são chamados de segmentos comensuráveis, pois são ambos múltiplos inteiros de um mesmo segmento (que pode ter medida racional ou irracional), tomado como unidade de medida.

Interpretando essa situação sob o ponto de vista prático, alguém poderia argumentar que sempre existe um segmento (ainda que infinitamente pequeno) que cabe um número inteiro de vezes em AB e em CD. Bastaria, para isso, aumentar o número de partes em que eu divido CD, obtendo segmentos cada vez menores e em determinado ponto desse processo, a precisão limitada dos instrumentos de medir não permitiria ir além de um certo comprimento mínimo. Então, poderíamos dizer que AB e CD são múltiplos inteiros desse segmento de comprimento mínimo. Intuitivamente, seria razoável imaginar que sempre há de existir um segmento, por menor que seja, de medida y, por exemplo, que caiba um número inteiro de vezes em AB e em CD.

No entanto, do ponto de vista teórico, isso não é verdade. Existem pares de segmentos que não são múltiplos inteiros de um mesmo segmento tomado como unidade de medida. Esses pares de segmentos são chamados de segmentos incomensuráveis**.** Exemplos desses pares de segmentos são: o lado e a diagonal de qualquer quadrado, o lado e qualquer diagonal do pentágono regular, os lados consecutivos do retângulo áureo.

A ideia de que dois segmentos quaisquer são comensuráveis é um exemplo de cognição intuitiva. Emprestando o olhar de Fischbein (1994), a aceitação incondicional dessa ideia (baseada na intuição) pode constituir um obstáculo para a compreensão do conceito de grandezas incomensuráveis, ou da existência de segmentos de reta cuja medida é representada por meio de um número irracional.

O que concerne ao conceito de segmentos incomensuráveis pertence ao âmbito interno da Matemática. Ou seja, uma abordagem sobre a incomensurabilidade de segmentos de reta (ou de qualquer outra grandeza) deve, necessariamente, envolver o componente formal da atividade matemática.

Uma prova da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado qualquer é apresentada a seguir.

Hipótese: ABCD é um quadrado	*Tese*: BD e AB são segmentos incomensuráveis

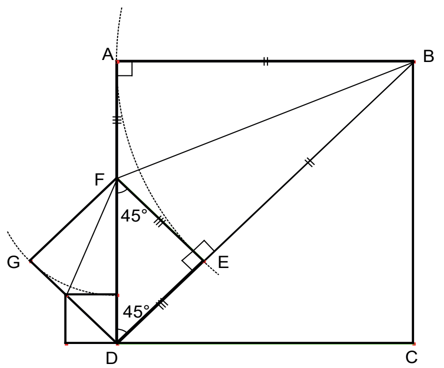
Demonstração:

a) Suponhamos que BD e AB sejam segmentos comensuráveis. Nesse caso, existe um segmento XY, submúltiplo comum de BD e AB, tal que:

BD = m.(XY) e AB = n.(XY), com m e n inteiros e m > n.

b) Construindo um arco com centro em B e raio AB, temos o ponto E em BD, com AB = BE.

Figura 7 - Auxiliar na demonstração da incomensurabilidade de segmentos (b)



Fonte: Os autores.

c) Seja EF, tal que F ϵ AD e FE $\perp$ BD.

d) Traçando o segmento BF, temos os triângulos ABF e EBF, ambos retângulos e congruentes pelo caso especial de congruência de triângulos retângulos, pois AB = BE (catetos) e BF (hipotenusa comum).

e) ΔABF $\equiv\Delta$EBF, logo, os lados correspondentes são congruentes: AF = FE. (i).

f) No triângulo DEF, retângulo em E, temos: =45°. Logo, = 45°. Nesse caso, o triângulo DEF é isósceles, com FE = DE. (ii).

g) De (i) e (ii), AF = FE = DE.

h) Consideremos o ponto G, tal que DEFG seja um quadrado.

i) Temos: BD = BE + DE→ BD = AB + DE→ DE = BD – AB →DE = m.(XY) - n.(XY) →DE = (XY).(m – n).

Como m,n ϵ Z e m > n, então, (m – n) ϵ Z_+^* . Logo, DE é múltiplo inteiro de XY.

j) Por outro lado, AD = AF + FD →AB = DE + FD →FD = AB – DE →FD = n.(XY) – (XY).(m – n) →FD = (XY).(n – m + n) →FD = (XY).(2n – m). Como m, n ϵ Z, então, (2n – m) ϵ Z_+^* . Ou seja, FD também é múltiplo inteiro de XY.

k) Dos dois itens anteriores, DE e FD (respectivamente, lado e diagonal do quadrado DEFG) são múltiplos inteiros de XY.

l) Se construirmos outro quadrado menor, conforme mostra a figura, com as mesmas características do quadrado DEFG, provaremos, usando os mesmos argumentos, que o lado e a diagonal desse quadrado menor também são múltiplos inteiros de XY.

m) Analogamente, podemos construir uma sequência de quadrados, cada vez menores (infinitamente menores), com lados e diagonais múltiplos inteiros de XY.

n) Isso é um absurdo, pois esses quadrados podem ter lados e diagonais menores do que XY, o que impede que sejam múltiplos inteiros de XY.

o) Esse absurdo decorre de havermos suposto que BD e AB são segmentos comensuráveis. Logo, BD e AB são segmentos incomensuráveis.

4.1 A correspondência biunívoca entre os pontos da reta e o conjunto dos números reais

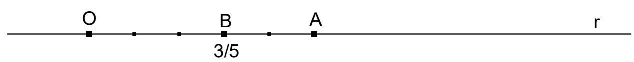
Na Educação Básica, a compreensão da densidade dos pontos racionais[8] na reta numérica e a percepção da existência de infinitos pontos irracionais nessa reta podem culminar na apresentação do conjunto dos números reais, como reunião dos conjuntos dos números racionais e irracionais.

Assim, estabelecendo uma relação entre números reais e pontos da reta e tendo em conta a densidade dos racionais na reta numérica, um aluno poderia, eventualmente, levantar dúvidas sobre a possibilidade de, por ocasião da localização de um ponto irracional sobre a reta, esse ponto coincidir com outro, racional.

Nessa etapa escolar, a ideia de correspondência bijetiva entre o conjunto dos números reais e o conjunto dos pontos da reta pode receber uma abordagem intuitiva. Por exemplo,

- Tomamos os pontos O e A, distintos, sobre uma reta r e consideramos o segmento OA, como unidade de medida. Dividindo a unidade OA em 5 partes iguais e marcando o ponto correspondente a 3 dessas partes, temos um outro ponto, que chamamos de B. O número 3/5 é a medida do segmento OB, considerando OA, como unidade de medida. Dessa forma, associamos o número 3/5 a um único ponto B, que é extremo do segmento OB.

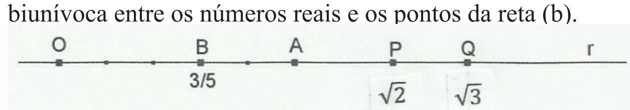
Figura 8 - Auxiliar na abordagem da correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos da reta (a).



Fonte: Acervo pessoal

- Quando transportamos segmentos para a reta numérica, por exemplo, com medidas $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, associamos cada um desses números a um único ponto que denominamos P e Q, de tal forma que:
- a distância entre o ponto P e a origem O seja igual ao comprimento do segmento de medida $\sqrt{2}$. Ou seja, associamos o ponto P ao número irracional $\sqrt{2}$, que é único, pois um segmento não pode ter duas medidas diferentes.
- por raciocínio análogo, associamos o ponto Q ao número irracional $\sqrt{3}$, que também é único.

Figura 9 - Auxiliar na abordagem da correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos da reta (b).



Fonte: Os autores.

Assim, a cada ponto da reta corresponde um único número

8 A expressão "pontos racionais" é utilizada aqui, como referência a pontos que correspondem a números racionais, conforme sugestão feita em Courant & Robbins, 2000, p.68.

racional ou irracional que indica a distância entre esse ponto e a origem. Como cada ponto da reta está a alguma distância da origem, fica intuitivamente claro que existe um único número associado a cada um destes pontos, ou seja, existe uma correspondência um a um entre os números reais e os pontos da reta.

5 Conclusão

Conforme dissemos anteriormente, as situações apontadas neste texto são exemplos tomados como pontos de partida para a reflexão sobre a possibilidade e importância de articular os componentes algorítmico, intuitivo e formal, no estudo dos números.

É certo que o momento oportuno para a introdução de determinados temas, tais como incomensurabilidade de grandezas e também para a discussão sobre a indispensabilidade de argumentos formais para justificar verdades matemáticas relativas a esses temas, deve ser identificado pelo professor, que perceberá até que ponto poderá explorar ou avançar, de acordo com o nível de compreensão de seus alunos.

No entanto, posto que os números racionais ganhem um novo significado, uma nova dimensão, quando se colocam em cena os números irracionais, é nossa opinião que essas discussões são imprescindíveis no processo de construção de conhecimentos relativos aos números, para que os estudantes não apenas percebam a necessidade de ampliação dos campos numéricos, mas, sobretudo, iniciem uma reflexão que resulte na valorização da Matemática, como ciência logicamente estruturada, organizada e de possível compreensão.

Referências

Boyer, CB. (1996). História da Matemática. São Paulo: Edgard Blücher.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Matemática.* Brasília: MEC.

Corbo, O. (2012). Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na Educação Básica. Tese (Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: UNIBAN.

Courant R, & Robbins, H. (2000). *O que é Matemática*? Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

Fischbein, E. (1994). *The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity*, (pp.231-5). In: Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline. Mathematics Education Library. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Niven, I. *Números: racionais e irracionais*. (1984). Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Sirotic, N. & Zazkis, R, (2005). *Locating Irrational Numbers on the number line.* In: Proceedings of the 27 th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Tall, David. (1979). *Cognitive aspects of proof, with special reference to the irrationality of* , (pp.206-7). In: Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Warwick.

Tall, DO, Schwarzenberger, RLE. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits. Mathematics Teaching, 82, 44-49.