GARANTÍAS DE LOS ARGUMENTOS EN CLASE DE MATEMÁTICAS MEDIADOS POR EL USO DE SOFTWARE VS LÁPIZ Y PAPEL

Wilmer Ríos-Cuesta
Universidad del Valle

wilmer.rios@correounivalle.edu.co

Resumen

La argumentación en clase brinda elementos al profesor para hacer inferencias sobre el pensamiento matemático de sus estudiantes, elemento clave para responder los distintos cuestionamientos y dirigir la actividad discursiva. La verbalización de los razonamientos es un elemento fundamental para avanzar en el aprendizaje de las matemáticas y superar la memorización de contenidos producto de la educación tradicional. Sin embargo, cuando los estudiantes no están habituados a este tipo de prácticas, sus argumentos se basan en garantías de tipo autoritarias soportadas en el libro de texto o las afirmaciones del profesor. Una forma de promover el uso de otro tipo de garantías es por medio de las tecnologías digitales puesto que permiten la visualización de los objetos matemáticos y median en la actividad cognitiva. En este estudio de casos exploratorio se pretende identificar los esquemas argumentativos de dos grupos de estudiantes de grado décimo (15 a 16 años) al resolver tareas sobre combinación lineal, uno de ellos con el software GeoGebra y el otro con papel y lápiz. Los resultados permitieron verificar que los estudiantes que usaron lápiz y papel basaron sus argumentos en garantías de tipo autoritarios mientras que los que usaron el software emplearon garantías de tipo empírico.

Palabras clave

Argumentación. Esquemas argumentativos. Uso de garantías. Mediación tecnológica. Visualización.

Abstract

Argumentation in class provides elements for the teacher to make inferences about the mathematical thinking of his students, a key element to answer the different questions and direct the discursive activity. The verbalization of reasoning is a fundamental element for advancing in the learning of mathematics and overcoming the memorization of content as a product of traditional education. However, when students are not accustomed to this type of practice, their arguments are based on authoritarian guarantees supported by the textbook or the teacher's assertions. One way to promote the use of other types of guarantees is through digital technologies since they allow the visualization of mathematical objects and mediate cognitive activity. This exploratory case study aims to identify the argumentative schemes of two groups of tenth grade students (15 to 16 years old) when solving tasks on linear combination, one of them with GeoGebra software and the other with paper and pencil. The results allowed verifying that the students who used pencil and paper based their arguments on authoritative type guarantees while those who used the software employed empirical type guarantees.

Keywords

Argumentation. Argumentative schemes. Use of guarantees. Technological mediation. Visualization.

Introducción

Dentro de la actividad discursiva en la sala de clase, los argumentos, justificaciones y explicaciones que expresan los estudiantes brindan elementos para que el profesor haga inferencias sobre los razonamientos que usan para justificar los resultados de la tarea que desarrollan (Harel, 2008; Solar, 2018). Estas inferencias se manifiestan en la identificación de los *actos de pensamiento* que originan lo que Harel (2008, 2017, 2021) denomina *modos de comprender*, definidos como un producto cognitivo que forma parte de los razonamientos de las personas, tales como: conjeturar, inferir, explicar, entre otros, y los *modos de pensar* que son una característica cognitiva de dichos actos.

Al hacer públicos sus razonamientos, el profesor puede fomentar el debate y la discusión de las ideas que se ponen en juego, en particular, cuando las tareas superan lo algorítmico. Este hecho es fundamental para validar los conocimientos que van construyendo los estudiantes y genera una nueva tarea para el profesor, la cual consiste en analizar los actos de habla que se producen para dirigir, con esta información, su actividad mediadora. Adicional a esto, la gestión de la clase se soporta en las inferencias realizadas sobre el razonamiento de los estudiantes y, por medio de preguntas, orientar la construcción de conocimientos. Desde esta perspectiva, cobra relevancia la mirada profesional del profesor del pensamiento matemático de sus estudiantes (Llinares, 2013; Jacobs et al., 2010) y, en torno a ella, realizar su actividad mediadora.

Las investigaciones sobre las estrategias que utiliza el profesor de matemáticas para gestionar la argumentación brindan elementos para analizar el tipo de preguntas y tareas que desencadenan en procesos y prácticas discursivas. De estos trabajos interesa analizar los esquemas argumentativos (Flores, 2007; Flores et al., 2010) que emergen y la evolución de los razonamientos en la interacción y discusión de las producciones en clase. La evidencia reportada en estos estudios muestra que los profesores recurren al uso de garantías de tipo didáctico, personales, pedagógico y curricular para sostener el proceso argumentativo (Boerst et al., 2011; Chapin et al., 2009; Lee, 2010; Nardi et al., 2012; Smith y Stein, 2011; Solar y Deulofeu, 2016).

Por otro lado, se encuentran diversos estudios que han analizado la actividad cognitiva de los estudiantes de acuerdo con los tipos de argumentos que emiten y al razonamiento que lo origina (Ayalon y Hershkowitz, 2018; Cervantes-Barraza y Cabañas-Sánchez, 2018; Conner et al., 2014; Solar, 2018). Esto deja ver la importancia de la actividad discursiva en el aula, en la medida en que es un medio para promover el aprendizaje de las matemáticas cuya importancia ha sido documentada por el National

Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers (2010) y el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000, 2014), siendo la "cultura de la argumentación" una práctica que debe fomentarse en los estudiantes para que tomen conciencia de la racionalidad de sus intervenciones (Boero, 2011).

Según Ruiz (2012) la argumentación tiene tres propósitos fundamentales de acuerdo con la intención de quien argumenta: 1) permite la negociación de significados y la construcción de comunidades de práctica, 2) favorece la interacción discursiva, la cual afecta la cognición de los estudiantes, y 3) permite observar el rol que desempeñan los participantes en la discusión de tareas en clase. A pesar de lo anterior, los estudiantes, en los distintos niveles educativos, presentan dificultades para argumentar sus producciones y justificar lo que hacen y dicen en clase (Goizueta, 2015; Ríos-Cuesta, 2021a). Como consecuencia surge la pregunta: ¿qué diferencia hay entre los argumentos de los estudiantes cuando trabajan con la mediación de tecnologías digitales y cuando lo hacen con lápiz y papel?

El objetivo de la investigación que se reporta en este capítulo fue identificar las diferencias en los argumentos expresados por un grupo de estudiantes que utilizan tecnologías digitales en clase de matemáticas y compararlo con otro grupo que está habituado a trabajar con lápiz y papel.

Perspectiva teórica

Si bien hay distintas posturas sobre lo que se entiende como argumentación, y su relación o distancia con la prueba (por ejemplo: Boero et al., 1996; Durand-Guerrier et al., 2012; Duval, 1991; Staples y Conner, 2022; Stylianides et al., 2016; Stylianides y Stylianides, 2022), es importante reconocer su potencial en el desarrollo de comprensiones conjuntas y la posibilidad de realizar institucionalizaciones de los conceptos que se ponen en juego en la clase de matemáticas. Resulta difícil separar la argumentación (proceso o procedimiento) de su producto (argumento). Esta postura sugiere ubicar este estudio en la *perspectiva retórica* de la argumentación y asociarlo con la lógica informal o sustantiva desarrollada por Perelman y Olbrechts-Tyteca (1969). Sin embargo, en la interacción que ocurre en la sala de clase no suele presentarse un discurso monológico sino más bien dialógico donde los estudiantes aportan fragmentos o partes de un argumento y suelen hacer evidente, en algunos casos, las garantías usadas para fundamentar la aserción. Este hecho en particular sugiere analizar los propósitos de las intervenciones de los estudiantes dentro de la actividad discursiva.

Posteriormente se debe identificar, en los actos de habla, las intenciones de los mensajes que emiten los estudiantes, los cuales se relacionan con el acto de hablar (locución), el propósito del mensaje (ilocución) y el efecto del mensaje (perlocución). En ese sentido, la perspectiva dialéctica de la argumentación es la que más se ajusta y describe de mejor manera la situación que se presenta en este estudio. Van Eemeren et al. (2006) afirman que la argumentación es un intento de las personas por justificar o refutar un punto de vista. Desde esta perspectiva, interesa la definición de *argumento* propuesta por Goizueta y Planas (2013) como la razón o razones ofrecidas para defender un punto o atacar una idea. Además, en este estudio, dicha postura se vincula con el concepto de *práctica argumentativa* propuesto por Flores (2007), entendida como "el conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema" (p.71).

Son muchos los estudios en el ámbito de la argumentación que han analizado las componentes lógicas de los argumentos. Sin embargo, en este estudio nos interesamos por las cualidades retóricas (Van Eemeren et al., 2006) y dialécticas (Nielsen, 2011), ya que no se pretende clasificarlos sino más bien evidenciar los recursos lingüísticos que los estudiantes utilizan para comunicar las matemáticas. En ese sentido, Perelman y Olbrechts-Tyteca (2006) señalan que cuando argumentamos una proposición, lo que hacemos es desencadenar una acción en el oyente, que puede ser positiva o abstención; en el peor de los casos se crea una predisposición que le permita reaccionar. Apostel (2007) concluye que la adhesión del auditorio[18] es posible mediante el refinamiento de los cualificadores modales que forman parte del argumento.

Sobre la resolución de problemas con la mediación de tecnologías digitales, Santos-Trigo (2016) menciona que esta desarrolla la comprensión y el uso de los conocimientos matemáticos al centrarse en los objetivos de los estudiantes a medida que involucra y desarrolla su pensamiento. Esto se complementa con lo propuesto por Schoenfeld (1992) quien sugiere que los estudiantes necesitan discutir sus hallazgos para validar su razonamiento. Sin embargo, tal como lo sugiere Pólya (1949, 1965), las heurísticas y estrategias de razonamiento usadas por el resolutor al momento de abordar un

[18] Se usa el término auditorio para referirnos al salón de clase de matemáticas.

problema dependen, en gran medida, de sus experiencias pasadas y de los medios usados para la asimilación de los conceptos que se ponen en juego.

Aspectos metodológicos

Se presenta un estudio de casos (Stake, 2010) exploratorio situado en el paradigma cualitativo (Cohen et al., 2011). La población objeto de estudio estuvo conformada por estudiantes de secundaria de una institución educativa pública en Colombia que cursaban el grado décimo (15 a 16 años). Se abordó la construcción del concepto de combinación lineal. Una parte del grupo trabajó con mediación de tecnologías digitales, en particular, con el software GeoGebra, y el otro con lápiz y papel. La unidad de análisis estuvo conformada por los segmentos locutivos de la clase en los cuales se pudo evidenciar un argumento para responder a un cuestionamiento. Los datos fueron recolectados en agosto de 2020 cuando nos encontrábamos en la emergencia sanitaria producto de la COVID-19 la cual obligó a que las clases se desarrollaran mediante encuentros sincrónicos.

El investigador hizo una observación no participante en los momentos de clase, su papel se limitó a planear con el profesor la secuencia de aprendizaje, el desarrollo de la guía de trabajo y una guía con la información conceptual que se le pidió a los estudiantes leer antes de la clase. La toma de datos transcurrió en dos momentos. En el primero, el profesor explicó el contenido mostrando la definición de vector desde la perspectiva de la matemática puesto que dicho concepto había sido trabajado meses atrás, pero desde la física. En un segundo momento presentó la tarea a desarrollar en clase, los estudiantes trabajaron de manera individual durante 20 minutos y posteriormente se les solicitó que compartieran y justificaran sus producciones. Cada sesión de clase tuvo una duración de 60 minutos.

El concepto de combinación lineal ha sido abordado principalmente desde perspectivas cognitivas (por ejemplo: Alves-Diaz y Artigue, 1995; Parraguez, 2011; Roa y Oktaç, 2010; Sierpinska, 2000; Trigueros y Oktaç, 2005), en particular desde la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). Este concepto se considera fundamental para avanzar en el estudio de las matemáticas en el nivel terciario. Parte de la elección de este grupo (grado décimo de educación secundaria) radica en evidenciar si estos estudiantes mostraban diferencia en su argumentación con el uso del software GeoGebra. Esto genera una mayor demanda cognitiva en los estudiantes al no ser un contenido que se encuentre en el currículo para dicho grado. Además, explica la elección de un estudio exploratorio y, como tal, constituye una aproximación inicial a la problemática, así que sus resultados no pueden generalizarse.

Toulmin (2003) ofrece un modelo para analizar estructuralmente un argumento en el cual identifica seis elementos: los datos, las garantías, el soporte, los cualificadores modales, las refutaciones potenciales y la aserción. Los *datos* son el punto de partida, generalmente se encuentran en la pregunta que se realiza al estudiante o en el enunciado de la tarea que debe realizar. Las *garantías* son las justificaciones que explican la conexión de los datos con la aserción. El *soporte* son las evidencias que sirven de apoyo a las garantías. Los *cualificadores modales* hacen referencia al grado de certeza de la afirmación que se expresa. Las *refutaciones potenciales* son las excepciones o restricciones de las reglas que se usan en los cualificadores modales. La *aserción* es la conclusión a la que se llega o el punto de vista de quien emite el argumento (Ríos-Cuesta, 2021b).

No es usual que en los argumentos que se emiten en el aula de matemáticas aparezcan los seis elementos descritos en el modelo de Toulmin. Por esa razón, Solar y Deulofeu (2016) señalan que para que exista un argumento deben identificarse al menos: los *datos*, la *aserción*, las *garantías* y las *refutaciones potenciales*, y en particular este último componente del modelo dado que permite evidenciar las diferentes posturas de los estudiantes.

Dada la postura dialéctica que se asume en este estudio, se sitúa el foco en el tipo de garantías que utilizan los estudiantes, con el uso de tecnologías digitales y con lápiz y papel, al momento de justificar los razonamientos sobre la solución de la tarea propuesta. Para esto, se asume la propuesta de *esquemas argumentativos* de Flores (2007), categorizados como:

- *Autoritarios.* Este tipo de argumentos aluden a la autoridad que puede representar el libro de texto, el profesor u otro compañero.
- *Simbólicos.* Se presentan cuando los conceptos matemáticos y su simbología se usan de manera imprecisa o poco clara, se reconocen porque las garantías usadas no permiten el paso coherente hacia la aserción.
- *Fácticos.* En este caso, se usa el recuerdo y la ilación de pasos seguidos para resolver la tarea, se presentan explicaciones y justificaciones del resultado como si se tratara de un algoritmo.

- *Empíricos*. Se apoya en la experiencia de quien argumenta que generalmente se sostiene en un hecho físico o una visualización y que por sí mismo constituye un argumento.
- *Analíticos*. Hacen referencia al tipo de argumentos que siguen una cadena razonamientos de tipo deductivo que no necesariamente conducen a una aserción válida y que suelen presentarse en forma condicional.

Para el seguimiento y análisis de los argumentos se usa el modelo de Toulmin (2003) poniendo énfasis en el tipo de garantía usada para llegar a la aserción, la cual se articula con los esquemas argumentativos propuestos por Flores (2007).

La tarea que se presentó en la clase, objeto de este estudio, fue la siguiente:

Un vector $w$se dice que es combinación lineal de los vectores u y v,si es posible expresarlo como la suma de dos múltiplos de estos, determinar los escalares (x, y) de tal forma que (Figura 17.1):

$$xu + yv = w$$

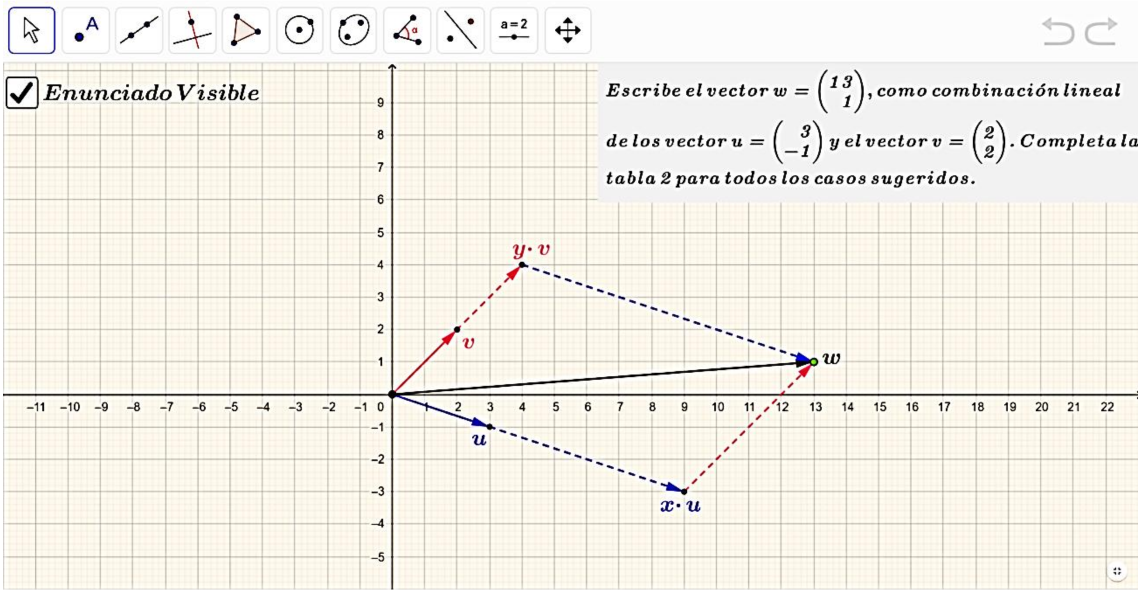

Figura 17.1. Tarea sobre combinación lineal

Escribe las coordenadas para la combinación lineal que se propone en la Tabla 17.1.

Una vez termine de llenar la *Tabla 17.1* conteste las siguientes preguntas:

a. ¿Todo vector $w = \binom{c}{d}$ se puede obtener como combinación lineal de los vectores $u = \binom{3}{-1}$ y $v = \binom{2}{2}$? Explica tu respuesta.

b. ¿Todo vector $w = \binom{c}{d}$ se puede obtener como combinación lineal de cualquier par de vectores u y v? Explica tu respuesta.

Tabla 17.1. Vector combinación lineal

No.	Coordenadas (x, y)	Combinación Lineal de prueba $xu + yv = w$
1		$\underbrace{}_{x}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+\underbrace{}_{y}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\1\end{pmatrix}$
2		$\underbrace{}_{x}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+\underbrace{}_{y}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\4\end{pmatrix}$
3		$\underbrace{}_{x}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+\underbrace{}_{y}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$
4		$\underbrace{}_{x}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+\underbrace{}_{y}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix}$
5		$\underbrace{}_{x}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+\underbrace{}_{y}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13\\-5\end{pmatrix}$
6		$\underbrace{}_{x}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+\underbrace{}_{y}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\-3\end{pmatrix}$
7		$\underbrace{}_{x}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+\underbrace{}_{y}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$
8		$\underbrace{}_{x}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+\underbrace{}_{y}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\-2\end{pmatrix}$

Resultados

En primera instancia presentamos los resultados del grupo que estaba habituado a trabajar con lápiz y papel. Inicialmente el profesor dirige la clase mediante la instrucción y explicación del contenido donde se trabajaron los conceptos clave previos al de combinación lineal. El profesor entrega la guía de clase a los estudiantes y posteriormente se propone la discusión de las producciones.

Se encontró que los estudiantes que trabajaron mediante el uso de lápiz y papel recurren a argumentos cuya garantía es de tipo *autoritario* lo cual es un indicio de que no han interiorizado el concepto.

> E3: *Sí se pueden combinar según lo que <u>el profesor dijo</u> en la clase estos vectores se pueden combinar.*
>
> E11: *Sí ya que <u>en la explicación dada en la clase</u> o lo que yo entendí, este se puede obtener con la combinación lineal de los vectores u y v, con la ayuda en GeoGebra o de otras formas para sacarlos.*

En el caso de E3 tenemos:

Dato: corresponde a la pregunta que se realiza.

Garantía: "el profesor dijo" (garantía que apela a la autoridad).

Aserción: sí se puede combinar.

Algo similar se encontró en el caso de E11 donde se tiene:

Dato: corresponde a la pregunta que se realiza.

Garantía: la explicación dada en la clase (apela a la autoridad).

Cualificador modal: con la ayuda en GeoGebra o de otras formas para sacarlos.

Aserción: se puede obtener.

En el caso de los estudiantes que estaban habituados al uso de tecnologías digitales en la clase, los argumentos apelaban al uso de otros elementos lingüísticos que enriquecían el discurso. Su argumentación superaba el uso de garantías que aluden a la autoridad como método para sustentar la aserción.

E1: *El vector W es la combinación de V y U por tanto sí se puede obtener una combinación lineal.*

E10: *Sí, porque todos los pares de combinaciones generan un vector.*

E12: *Este vector W sí puede obtener una combinación lineal ya que este tiene otros dos vectores que tienen distinta dirección.*

Sí, ya que se pueden hallar miles de combinaciones para cualquier vector W.

E1, por ejemplo, concibe el *vector W* como la resultante de la suma de dos vectores, por lo tanto, afirma que puede obtenerse una combinación lineal. En efecto:

Dato: corresponde a la pregunta que se realiza.

Garantía: el vector W es la combinación de V y U.

Aserción: si se puede obtener una combinación lineal.

En este caso en particular, la garantía se obtiene de la experiencia que tuvo E1 al realizar manipulaciones de los vectores con el software GeoGebra. Mediante el *arrastre* el estudiante pudo visualizar la posición del vector combinación lineal y notar que a cualquier par de vectores le corresponde una combinación. Aquí juega un papel importante la visualización, que unida al arrastre, permite que el resolutor pueda comprobar sus hipótesis y métodos de prueba para soportar su razonamiento.

E10 sostiene que la combinación es posible; si bien no hace explícita la garantía usada para llegar a la aserción, se puede afirmar que es del tipo empírica, esto se infiere dado que el uso del software le permitió al estudiante visualizar este hecho y validar la afirmación que hace. E12 usa una garantía empírica basada en la visualización de la combinación lineal de los vectores y alude a un hecho físico (*vectores que tienen distinta dirección*) para justificar la aserción.

Los argumentos de este grupo de estudiantes estuvieron mediados por la exploración y visualización en GeoGebra de las distintas combinaciones lineales que lograban al modificar los vectores; para ello, los estudiantes se valieron de distintos métodos de prueba para validar su razonamiento. El tiempo que les tomó completar la tabla fue menor si se compara con el otro grupo; esto permite inferir que los estudiantes pudieron asimilar de forma más eficiente el concepto de combinación lineal al experimentar con el arrastre de los vectores que permite el software.

Conclusiones

Una de las dificultades del estudio fue el hecho de que la emergencia sanitaria debido a la COVID-19 obligó a los estudiantes a desarrollar su proceso de aprendizaje de manera diferente a la que estaban habituados. Es decir, se realizó mediante encuentros sincrónicos mediados por un computador, celular o tableta. Las intervenciones de los estudiantes fueron pocas y buscaban la explicación o justificación de su proceder. Sin embargo, no se evidenció que la actividad discursiva en el aula generara espacios de argumentación que pudieran ser aprovechados por el profesor para lograr un ambiente propicio que favoreciera el aprendizaje.

Los estudiantes que participaron en este estudio y que trabajaron con lápiz y papel evidencian esquemas argumentativos de tipo autoritario; en cambio, los que trabajaron con la mediación del software muestran esquemas argumentativos empíricos lo cual es una diferencia por destacar en este estudio teniendo en cuenta que ambos grupos de estudiantes recibieron la misma explicación por parte del docente en el primer momento; además, tuvieron acceso a la misma guía conceptual.

Por otro lado, la mediación que ofrece el software sirvió como método de prueba para que los estudiantes verifiquen sus conjeturas. Algunas herramientas como el arrastre y visualización se constituyeron en elementos importantes para la validación de los razonamientos de los estudiantes, lo cual significó que las intervenciones del profesor disminuyeran. En un estudio realizado por Oropeza y Lezama (2007) sugieren que la visualización es una habilidad que los estudiantes deben desarrollar para avanzar en el aprendizaje de las matemáticas y superar las dificultades de los métodos tradicionales de enseñanza; similar a lo reportado por Arcavi (2003) al destacar el potencial de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas y la práctica matemática.

Dado que los estudiantes conocían algunas ventajas del uso de trazos auxiliares, se valieron de ellos para construir paralelogramos que les permitieron encontrar el vector w y la combinación lineal que lo genera; es decir, que esta estrategia o heurística se convirtió en una extensión cognitiva para el estudiante, permitiéndole así desarrollar una noción sólida sobre el objeto matemático *combinación lineal*. Finalmente, resaltamos que los argumentos de los estudiantes se ven influenciados por los elementos constitutivos del software los cuales refinan la verbalización de ideas.

Sobre las tareas propuestas, es importante que estas permitan que los estudiantes utilicen diversos métodos de resolución que sometan a prueba sus ideas. Posteriormente, debe permitirse la validación de los razonamientos mediante la discusión de sus producciones con lo cual se construye conocimiento matemático. Es importante que el profesor pueda identificar, en las expresiones verbales de sus estudiantes, los elementos constitutivos de un argumento, reconocer la garantía usada y responder con base en ello. Es decir, evitar dar respuestas a los cuestionamientos de los estudiantes sino más bien orientarlos por medio de preguntas que les ayuden a construir los conceptos matemáticos. Con esto se disminuye la posibilidad de que usen argumentos que apelen a la autoridad del profesor y que busquen otro tipo de garantías para emitir el argumento.

Agradecimientos

Al Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación de Colombia por la Beca de Excelencia Doctoral del Bicentenario otorgada. Este trabajo ha sido realizado en el marco del Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad del Valle y se deriva de la tesis Implicaciones de la interactividad en la argumentación en clase de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Alves-Diaz, M. y Artigue, M. (1995). Articulation problems between different systems of symbolic representations in Linear Algebra. *Proceedings of PME 19*, *2*, 34-41. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED411135.pdf#page=43.

Apostel, L. (2007). ¿Cuál es la fuerza de un argumento?: Algunos problemas y sugerencias. *Praxis filosófica*, *25*, 129-138. https://doi.org/10.25100/pfilosofica.v0i25.3116.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215-241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077.

Ayalon, M. y Hershkowitz, R. (2018). Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation. *Journal of Mathematical Behavior*, *49*, 163-173. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.010.

Boero, P. (2011). Argumentation and proof: Discussing a "successful" classroom discussion. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.). *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.120-130). ERME.

Boero, P., Garuti, R., Lemut, E. y Mariotti, M. A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: A hypothesis about the cognitive unity of theorems. En L. Puig y Á.

Gutiérrez (Eds.). *Proceedings of the 20th PME Conference Vol. 2* (pp.113-120). Universitat de València. http://140.122.140.1/~icmi19/files/Volume_2.pdf.

Boerst, T.A., Sleep, L., Ball, D.L. y Bass, H. (2011). Preparing Teachers to Lead Mathematics Discussions. *Teachers College Record: The Voice of Scholarship in Education*, *113*, 2844-2877. https://doi.org/10.1177/016146811111301207.

Cervantes-Barraza, J. y Cabañas-Sánchez, G. (2018). Argumentos formales y visuales en clase de geometría a nivel primaria. *Educación Matemática*, *30*(1), 163-183. http://dx.doi.org/10.24844/em3001.06.

Chapin, S.H., O'Connor, C. y Anderson, N.C. (2009). *Classroom Discussions: using Math Talk to Help Students Learn*. Math Solutions. https://mathsolutions.com/uncategorized/classroom-discussions-using-math-talk-in-elementary-classrooms-pdf/.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education* (7ma Ed.). Routledge.

Conner, A., Singletary, L.M., Smith, R.C., Wagner, P.A. y Francisco, R.T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 401-429. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S.S. y Tanguay, D. (2012). Argumentation and Proof in the Mathematics Classroom. En G. Hanna, M. De Villiers (Eds.). *Proof and Proving in Mathematics Education. New ICMI Study Series Vol. 15* (pp.349-367). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_15.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 233-261. https://doi.org/10.1007/BF00368340.

Flores, Á.H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, *19*(1), 63-98. http://www.revista-educacion-matematica.com/revista/vol19-1/.

Flores, C., Gómez, A. y Flores, Á.H. (2010). Esquemas de argumentación en actividades de geometría dinámica. *Acta Scientiae*, *12*(2), 22-42. http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/33.

Goizueta, M. (2015). *Aspectos epistemológicos de la argumentación en el aula de matemáticas* [Tesis de Doctorado]. Universidad Autónoma de Barcelona. http://hdl.handle.net/10803/299192.

Goizueta, M. y Planas, N. (2013). Temas emergentes del análisis de interpretaciones del Profesorado sobre la argumentación en clase de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *31*(1), 61-78. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n1.835.

Harel, G. (2008). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. En B. Gold y R. Simons (Eds.). *Proof and other dilemmas: Mathematics and philosophy* (pp.265-290). Mathematical Association of America. https://doi.org/10.5948/UPO9781614445050.018.

Harel, G. (2017). The learning and teaching of linear algebra: Observations and generalizations. *Journal of Mathematical Behavior*, *46*, 69-95. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.02.007.

Harel, G. (2021). The learning and teaching of multivariable calculus: a DNR perspective. *ZDM - Mathematics Education*, *53*(3), 709-721. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01223-8.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R.A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202. https://doi.org/https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169.

Lee, C. (2010). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas*. Morata.

Llinares, S. (2013). Professional noticing: a component of the mathematics teacher's professional practice. *Sisyphus - Journal of Education*, *1*(3), 76-93. https://doi.org/http://dx.doi.org/10.25749/sis.3707.

Nardi, E., Biza, I. y Zachariades, T. (2012). "Warrant" revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 157-173. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9345-y.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. NGA. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf.

Nielsen, J. (2011). Dialectical features of students' argumentation: A critical review of argumentation studies in science education. *Research in Science Education*, *43*(1), 371-393. https://doi.org/10.1007/s11165-011-9266-x.

Oropeza, C. y Lezama, J. (2007). Dependencia e independencia lineal: una propuesta de actividades para el aula. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *2*(1), 23-39. https://reiec.unicen.edu.ar/reiec/article/view/10.

Parraguez, M. (2011). Comprensión del concepto combinación lineal de vectores desde el punto de vista de la teoría APOE. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp.263-271). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. https://clame.org.mx/documentos/alme24.pdf.

Perelman, C. y Olbrechts-Tyteca, L. (1969). *The new rhetoric: A treatise on argumentation*. University of Notre Dame.

Perelman, C. y Olbrechts-Tyteca, L. (2006). *Tratado de la argumentación: La nueva retórica*. (Julia Sevilla Muñoz, Tr.). Gredos.

Pólya, G. (1949). *How to solve it.* Princeton University.

Pólya, G. (1965). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving* (Vol. 2). Wiley.

Ríos-Cuesta, W. (2021a). Dificultades para argumentar el uso de registros semióticos en problemas de variación cuadrática. *Mendive. Revista de Educación*, *19*(2), 446-457. https://mendive.upr.edu.cu/index.php/MendiveUPR/article/view/2373/html.

Ríos-Cuesta, W. (2021b). Argumentación en educación matemática: elementos para el diseño de estudios desde la revisión bibliográfica. *Amazonia Investiga*, *10*(41), 96-105. https://doi.org/10.34069/AI/2021.41.05.9.

Roa, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *13*(1), 89-112. https://www.relime.org/index.php/numeros/todos-numeros/volumen-13/numero-13-1/531-201004a.

Ruiz, F.J. (2012). *Caracterización y evolución de los modelos de enseñanza de la argumentación en clase de ciencias en la educación primaria*. [Tesis de Doctorado]. Universidad Autónoma de Barcelona. http://hdl.handle.net/10803/98466.

Santos-Trigo, L. (2016). Problems solving with technology. En G. Kaiser (Ed.). *Problem Solving in Mathematical Education* (pp.19-30). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2_1.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D.A. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.334-370). Simon and Schuster.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.L. Dorier (Ed.). *On the teaching of linear algebra* (pp.209-246). Kluwer.

Smith, M.S. y Stein, M.K. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions*. NCTM.

Solar, H. (2018). Implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas. *Revista Colombiana de Educación*, (74), 155-176. https://doi.org/10.17227/rce.num74-6902.

Solar, H. y Deulofeu, J. (2016). Conditions to promote the development of argumentation competence in the mathematics classroom. *Bolema Mathematics Education Bulletin*, *30*(56), 1092-1112. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13.

Stake, R.E. (2010). *Investigación Cualitativa: El Estudio de cómo funcionan las cosas*. The Guilford Press.

Stylianides, A.J., Bieda, K.N. y Morselli, F. (2016). Proof and Argumentation in Mathematics Education Research. En Á. Gutiérrez, G.C. Leder y P. Boero (Eds.). *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp.315-351). Sense. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_9.

Stylianides, A.J. y Stylianides, G.J. (2022). On the Meanings of Argumentation, Justification, and Proof: General Insights from Analyses of Elementary Classroom Episodes. En K.N. Bieda, A. Conner, K.W. Kosko y M. Staples (Eds.). *Conceptions and Consequences of Mathematical Argumentation, Justification, and Proof. Research in Mathematics Education* (pp.65-72). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-6_6.

Staples, M. y Conner, A. (2022). Introduction: Conceptualizing Argumentation, Justification, and Proof in Mathematics Education. En K.N. Bieda, A. Conner, K.W. Kosko y M. Staples (Eds.). *Conceptions and Consequences of Mathematical Argumentation, Justification, and Proof. Research in Mathematics Education* (pp.1-10). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-6

Toulmin, S. (2003). *The uses of argument*. Cambridge University Press (Trabajo original publicado en 1958). https://doi.org/10.1017/CBO9780511840005.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 157-176. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_10/adsc10-2005_005.pdf.

Van Eemeren, F., Grootendorst, R. y Henkemans, F.S. (2006). *Argumentación: análisis, evaluación y presentación* (Roberto Marafioti, Tr.). Biblos.