3. Modelación matemática en la perspectiva de la educación matemática

*Jhony Alexander Villa-Ochoa, Jonathan Sánchez-Cardona y Mónica Marcela Parra-Zapata**

Introducción

Escribir sobre modelación matemática (o modelización, como se denomina en otras partes de Iberoamérica) sugiere una reflexión en torno a su significado para los distintos usuarios del término. Para un matemático aplicado, la modelación (empleamos la palabra modelación para hacer alusión a la modelación matemática) representa el proceso que se origina en la delimitación de un problema relevante para algún área del conocimiento. Es un proceso que, generalmente, involucra equipos interdisciplinarios y transcurre por fases o etapas; entre ellas: el *reconocimiento de un fenómeno de interés*, la observación, la selección de variables, la formulación de hipótesis; la *formulación del modelo* cuyo propósito es formular una descripción de un mecanismo en términos cuantitativos; la *reducción, análisis, cálculo y validación* del modelo (Fowler, 1998). Para los educadores matemáticos, la modelación representa un dominio de investigación en el que conviven diversidad de intenciones, propósitos y perspectivas teóricas (Niss, Blum y Galbraith, 2007). Cada una de estas intenciones y perspectivas

* *J. A. Villa-Ochoa*: Universidad de Antioquia, Colombia.
J. Sánchez-Cardona: Universidad de Antioquia, Colombia.
M. M. Parra-Zapata: Universidad de Antioquia, Colombia.

teóricas pueden determinar diferentes tipos de tareas y distintas maneras de implementar la modelación en la cotidianidad escolar. Para los profesores, la modelación se convierte, entre otras cosas, en una oportunidad para *aplicar* matemática y mostrar su utilidad a los estudiantes. Villa-Ochoa (2015) encontró que existen profesores que se apoyan en la idea de *solucionar problemas de la realidad* para reducir la modelación a la búsqueda de una solución de cualquier tarea en un contexto determinado (generalmente imaginado) o una tarea en la que se busque la construcción de una representación matemática.

Lo anterior es evidencia de que existe diversidad de actores y de visiones con respecto a lo que se entiende por modelación y la manera de integrarla en la cotidianidad escolar. En esta cotidianidad, también se involucra una diversidad de contextos educativos que, a su vez, condicionan la toma de decisiones en cuanto a los contextos, problemas y modelos matemáticos que se desean construir en la clase de matemáticas.

En este capítulo ofrecemos un panorama de significados de la modelación en el interior de la investigación en educación matemática y algunos aportes de nuestra mirada teórica y metodológica. Finalmente, presentaremos algunos ejemplos derivados de las investigaciones que hemos realizado y profundizaremos en un ambiente que desarrollamos en un programa de formación de futuros profesores de matemática.

Visiones teóricas de la modelación matemática en educación matemática

Una de las comprensiones más amplias de la modelación radica en concebirla como la resolución de problemas del mundo real con el fin de comprender y explicar una situación, un fenómeno o para controlar y anticipar los comportamientos de las variables estudiadas bajo las condiciones en que se modelaron. Estos aspectos hacen que exista una diferencia entre modelación y las aplicaciones matemáticas. Para Stillman (2019), la modelación reconoce un problema del mundo real el cual es estudiado y analizado, a partir de diversas posturas y con propósitos diferentes. Por su parte, las aplicaciones matemáticas también involucran un problema del mundo real en el que se usan las matemáticas, pero después de haber encontrado la solución, ya no se piensa en el problema inicial, excepto para verificar si la respuesta tiene sentido.

Stillman (2019) identificó que en la literatura de educación matemática se valora la modelación a partir de un punto de vista matemático y para el ejercicio de la ciudadanía. Para la autora, frente al primer punto de vista, la modelación puede ser el vínculo para enseñar conceptos y procedimientos matemáticos; enseñar modelos matemáticos y maneras de aplicar las matemáticas como contenido matemático y promoverlas como una actividad humana que responda a problemas de diferente naturaleza que den lugar a la aparición de conceptos, nociones y procedimientos. Desde el punto de vista de la ciudadanía, Stillman (2019) encontró que las investigaciones se han preocupado por brindar experiencias que contribuyan a la educación para la vida después de la escuela, como analizar problemas sociales, promover la educación en valores, cuestionar el papel de los modelos matemáticos en la sociedad y el medio ambiente, así como asegurar o avanzar la sostenibilidad de la salud, la educación y el bienestar ambiental, y la reducción de la pobreza y las desventajas.

La modelación matemática como un proceso en la clase de matemáticas

Dentro de la educación matemática existen investigadores que reconocen en la actividad del matemático aplicado una oportunidad para resolver problemas reales en el aula y desarrollar conocimientos matemáticos en los estudiantes (Bassanezi, 2002). Fundamentados en esta visión se ha asumido la modelación como un conjunto de fases sucesivas de un fenómeno y, a partir de ello, se han construido diagramas que presentan ciclos de modelación y que buscan describir la *actividad del matemático aplicado* con el fin de promover su integración en el aula. La mayoría de estos ciclos incluyen la selección o presentación de un problema real para resolver, la descripción de algunas etapas por las que se espera que los resolutores atraviesen hasta llegar a una respuesta satisfactoria a sus intereses. Entre las etapas descriptas, se encuentran:

- *Simplificación/delimitación*. Los problemas, tal y como se presentan en las ciencias o en la cotidianidad, tienen una gran cantidad de factores, variables y relaciones que no pueden considerarse en su totalidad, o incluso, en ocasiones, ni siquiera son percibidas por quienes intervienen en este proceso. Por tanto, se requiere que, quienes modelan, se focalicen en las variables y relaciones de interés acorde con el problema o situación a resolver. Esta característica es principalmente importante, pues exige reconocer que los resultados del proceso de modelación no son un retrato de la realidad ni son absolutos ni infalibles. Más allá de ello, son modelos que funcionan acorde con las condiciones en las cuales se construyó. Nuevas condiciones y variables hacen que se deba reorganizar o reconstruir el modelo para que atienda a ellas.

- *Construcción del modelo*. Esta etapa del proceso puede incluir el uso de razonamientos (por ejemplo, inductivos) y técnicas (por ejemplo, regresiones o interpolación) para la construcción de una representación matemática. En ocasiones, existen modelos que se han derivado de otros problemas y que se pueden ajustar y usar en el problema que se está tratando. Un aspecto que vale la pena resaltar es la naturaleza de lo que se denomina *modelo matemático*. En la perspectiva de Villa-Ochoa (2016), se reconoce que un modelo es la conjunción de tres elementos; ellos son: una representación, un objeto representado y un usuario. Entre estos tres elementos intervienen diferentes relaciones cuando se trabaja en la clase de matemáticas. En ese sentido, un modelo se manifiesta en una representación, pero no toda representación es un modelo.
- *Validación del modelo y de los resultados*. Esta etapa involucra el uso de criterios para dar cuenta de que la construcción matemática satisfaga la situación (por ejemplo, criterios de la lógica, procedimientos, consistencia en los gráficos y pruebas matemáticas y estadísticas), de confrontación y coherencia de los resultados arrojados por el modelo con las necesidades, problemas o situaciones que dieron origen al proceso de modelación. En la clase de matemáticas, también pueden intervenir especialistas en las temáticas que puedan dar cuenta de la pertinencia de los resultados.

Otras etapas pueden identificarse en los trabajos de los investigadores, algunos mencionan abstracción, matematización, comunicación, trabajo matemático. En el trabajo de Perrenet y Zwaneveld (2012) puede encontrarse una discusión de varios diagramas de la modelación y de la diversidad de representaciones que pueden tener profesores y estudiantes de estos ciclos.

Conforme mencionamos anteriormente, existen trabajos de modelación cuyos intereses no se centran en la creación y validación de un modelo matemático (Parra-Zapata y Villa- Ochoa, 2016; Barbosa, 2006; Araújo, 2012). En estas investigaciones, la modelación en el ámbito de la educación matemática se configura como un ambiente de aprendizaje en el que se estudian y se aproxima a la solución de situaciones de interés por medio de las matemáticas. En esta mirada, las acciones de los estudiantes no necesariamente se ajustan con los ciclos convencionalmente descriptos, sino que están en correspondencia con las necesidades que se delimitan en el problema y las condiciones escolares, entre ellas, la interacción con los profesores y especialistas en la temática. Un ejemplo de ello puede encontrarse en el trabajo de Rendón-Mesa y sus colaboradores (2016), quienes trabajaron con estudiantes de ingeniería de diseño, y a partir de las necesidades e intereses de los estudiantes y de la profesión, pudieron identificar otras fases y características de la modelación.

Tipos de tareas de modelación matemática

La modelación, vista como una actividad que refleja principalmente las acciones de los profesionales en matemáticas, tiene una complejidad que se caracteriza en aspectos como: la amplitud y la cobertura del problema identificado, el trabajo interdisciplinario, la búsqueda y la obtención de datos, la disponibilidad de recursos para el tratamiento de datos, los tiempos para la solución del problema, los alcances de los resultados, entre otros. Eso hace que replicar esa actividad en las clases de matemáticas no siempre sea posible. Al respecto, en la investigación se han delimitado varias perspectivas, Kaiser (2017) apunta cuatro grandes propósitos que se encuentran en la investigación en modelación, a saber:

- *Metas pedagógicas*. Promover habilidades que les permitan a los estudiantes comprender mejor los aspectos centrales de su mundo.
- *Objetivos psicológicos*. Fomentar y mejorar la motivación y la actitud de los alumnos hacia las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas.
- *Objetivos relacionados con la asignatura*. Estructuración de procesos de aprendizaje, introducción de nuevos conceptos y métodos matemáticos, incluida su ejemplificación.
- *Objetivos relacionados con la ciencia*. Impartir una imagen realista de las matemáticas como una ciencia, dando una idea de la superposición de las consideraciones matemáticas y extramatemáticas en el desarrollo histórico de las matemáticas.

Estos cuatro propósitos muestran que resolver problemas reales no es la única ni la principal meta de la modelación en la matemática escolar. También se resalta el uso y la comprensión de las ideas matemáticas y de otros contextos y áreas del conocimiento, además de la formación de ciudadanos críticos. Para dar cuenta de estos propósitos se requiere de diversas acciones en el aula y del diseño de diferentes tareas de modelación. Frente a ello, Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona (2017) identificaron cuatro tipos de tareas. Cada tipo pone diferentes énfasis en alguno de estos propósitos. Estos tipos de tareas son: i) enunciados verbales, ii) construcción de representaciones, iii) modelación a través de proyectos, y iv) uso y análisis de modelos. La caracterización realizada por los autores permite identificar el contexto y la noción de realidad que ofrece cada enunciado, el propósito orientado a la enseñanza de las matemáticas, el desarrollo de habilidades o competencias, así como los alcances y limitaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Con esta clasificación, los autores proporcionan insumos para tomar decisiones en la implementación de la modelación tanto en el ámbito escolar como en la investigación.

Modelación matemática en una perspectiva situada

La modelación, por su naturaleza, considera el estudio de fenómenos en contextos y situaciones de interés para los sujetos en la sociedad o en algún área de conocimiento; de alguna manera, esto refleja un carácter situado de la modelación; sin embargo, como mencionamos anteriormente, no siempre la actividad de modelación pone de relieve los conocimientos y la pertinencia de los contextos. En su investigación, Rendón-Mesa (2016) informó que, en ocasiones, la modelación se usa para la formación matemática de profesionales (ingenieros) sin una reflexión de los intereses y necesidades relativos al campo de acción de esos futuros profesionales. La autora propuso el término *modelación situada*, como una manera de llamar la atención en la necesidad de diseñar ambientes de aprendizaje de modelación acordes a los intereses y necesidades de los estudiantes.

En esta perspectiva, en las investigaciones desarrolladas por nuestro colectivo[1] entendemos que la modelación no se reduce a una estrategia para enseñar

[1] Grupo de Investigación MATHEMA-Formación e Investigación en Educación Matemática de la Universidad de Antioquia.

un contenido, sino que, más allá de ello, busca que sea un ambiente en el que se tengan en cuenta:

- Las ideas fundamentales de las matemáticas y su relación con los contextos, significados y procedimientos a partir de los cuales se construyó.
- El uso de datos reales que les permita a los estudiantes matematizar; es decir, plantear y representar relaciones entre los diferentes objetos y cantidades.
- El diseño de ambientes de clase que promuevan la participación, discusión, razonamiento y la toma de decisiones de los aspectos relevantes en el ambiente.
- Promover diferentes conocimientos (matemáticos y no matemáticos) y usarlos según la naturaleza de la situación, sin subordinarlos entre sí.
- Reconocer que los resultados proporcionados por los modelos son relativos y que operan bajo las condiciones y supuestos en los que se realizó el proceso.
- Promover un discurso en el aula que incluya argumentos matemáticos y que se fundamenta en ideas y procedimientos matemáticos.
- El vínculo directo y constante con expertos (conocedores o profesionales en distintas áreas) que participen en diferentes momentos del proceso de modelación.
- La evaluación debe, a su vez, promover el aprendizaje no solo de los contenidos matemáticos, sino de otros conocimientos propios del contexto en el que se desarrolla la tarea y de las habilidades asociadas a la modelación.

En el siguiente apartado presentamos algunos aspectos metodológicos que se involucran en los ambientes modelación para la clase de matemáticas.

Aspectos metodológicos

De acuerdo con las consideraciones teóricas que describimos en el apartado anterior, a lo largo de los últimos quince años, en el grupo de investigación MATHEMA, hemos desarrollado investigaciones que aportan a la configuración de escenarios de clase, para dar lugar a que se integre la modelación en varios de sus propósitos y alcances.

Como ejemplo de estas investigaciones, Parra-Zapata *et al.* (2016) diseñaron un ambiente en el que niños y niñas de quinto grado (10-11 años) estudiaron el modelo del índice de masa corporal. El ambiente incluyó un trabajo en equipo en el que los estudiantes discutieron acerca de los problemas de la obesidad en Colombia, y fueron partícipes de un espacio de diálogo y discusión con una profesional en nutrición en torno a la problemática en cuestión, quien ofreció sus comprensiones. Y, en conjunto, los estudiantes y los profesores analizaron los usos y limitaciones del modelo. En términos de la perspectiva situada se entiende que los niños y las niñas, más allá de atravesar por un conjunto de ciclos y de la construcción de sistemas consistentes de ecuaciones y representaciones, participaron en el ambiente para hacer de la modelación una oportunidad para *matematizar la realidad*. Esta matematización de la realidad, se presenta en Parra-Zapata (2015) como un componente particular de la modelación en educación primaria, que obedece a un proceso de investigación científica que se relaciona con observar, experimentar, conjeturar, sistematizar, validar, entre otros. Este proceso no se reduce a la traducción matemática, como suelen presentarse las tareas contextualizadas en los libros de texto, sino que involucra procesos que se llevan a cabo para lograr algunos desarrollos matemáticos; máxime si se tiene en cuenta que matematizar no implica solamente cuantificar, ni el número es el referente de la matematización.

Por su parte, una comprensión situada de la modelación le permitió a Villa-Ochoa (2016) usar el modelo de crecimiento fetal para que los futuros profesores no solo reconocieran los aspectos matemáticos que permiten comprender cómo cambia el peso y el tamaño de un feto, sino que también promovió en estos futuros profesores cuestionamientos de su propio conocimiento del uso que otros profesionales hacen de los modelos. Con base en ello, estos estudiantes proyectaron posibles cuestiones para su desempeño como profesores de matemáticas. El ambiente proporcionado en este caso incluyó el trabajo en equipo, el planteamiento de preguntas relativas al fenómeno de estudio, la exploración de posibles solicitudes, la confrontación y la discusión de sus soluciones con otros estudiantes y con el profesor, la reformulación de sus afirmaciones, la reflexión de sus aprendizajes y la manera en que se aprendieron.

Con otra forma de implementar la modelación, Villa-Ochoa y Berrío (2015) realizaron una salida de campo con sus estudiantes. A través de la pregunta: "¿Qué depende de qué?", los estudiantes describieron un amplio conjunto de cantidades que covarían con otras cantidades. En su experiencia, los autores describen la manera en que los estudiantes llegaron a acuerdos para delimitar el tema a estudiar. Los autores también describen las acciones implementadas por los estudiantes para delimitar las relaciones entre cantidades y los conocimientos no matemáticos que fueron necesarios. En este ejemplo fue posible evidenciar que cuando se estudian problemáticas cercanas a las experiencias de los estudiantes, no solo se requiere de conocimientos matemáticos, sino también de otros conocimientos propios de la cultura y que, en la modelación, todos ellos se conjugan para resolver los asuntos relevantes.

En los tres ejemplos anteriores, los profesores han aplicado modelos matemáticos que usan profesionales en alguna disciplina. A continuación, se presenta un ejemplo de otro tipo de ambiente en el que los estudiantes se comprometen con la comprensión de un fenómeno a través de la construcción y validación de un modelo matemático.

Un ambiente de modelación: concentración de un medicamento en la sangre

El ambiente que describimos a continuación corresponde a una reformulación de una tarea que se puede encontrar en libros de texto como aplicación de las funciones exponenciales. En términos de Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona (2017), la tarea se presenta inicialmente como un enunciado verbal realista; es decir, tareas que evocan aspectos realistas o imaginados sin que necesariamente vinculen contextos cercanos a la experiencia del estudiante. La tarea generalmente se encuentra en los textos como un enunciado que proporciona información de la vida media de un medicamento y solicita a los estudiantes la construcción de la función exponencial que describe su comportamiento en la sangre.

El ambiente lo desarrollamos dentro de un curso de modelación con estudiantes (futuros profesores de matemáticas). El curso es orientado por un colectivo de tres profesores, en el que se discuten aspectos teóricos y metodológicos de la modelación y se viven experiencias como modeladores matemáticos a partir de diferentes tareas y ambientes.

El ambiente propuesto inicia con un diálogo acerca del papel de las matemáticas en diferentes áreas y en particular de la medicina. Al respecto, los estudiantes mencionan aspectos generales de la aplicación de las matemáticas en muchos fenómenos. En nuestra experiencia, hemos encontrado que los ejemplos que proponen son meramente informativos, por ejemplo: "*Sé que existe una fórmula que usan los médicos para saber cuánto medicamento les dan a los pacientes*" (comentario de Carlos, 22 de junio de 2018).[2] Cuando se cuestiona a los estudiantes por las variables y relaciones que intervienen en el contexto, generalmente, no ofrecen una mayor ampliación. Este hecho se comprende pues, en la mayoría de los casos, los problemas que los estudiantes resuelven en sus cursos de matemáticas aparecen como ejercicios de aplicación al finalizar un tema. Estos ejercicios generalmente solo hacen mención a un contexto real de manera nominal o, en algunos casos, se presentan de manera simplificada para que las acciones de los estudiantes se limiten a la identificación de las variables y la construcción de representaciones.

Con el fin de promover en los estudiantes otro tipo de acciones, se les propone estudiar con mayor detalle los aspectos que están involucrados con el uso de las matemáticas en algunos fenómenos de las ciencias; por ejemplo, en la concentración de un medicamento en la sangre. Para ello, se les pide a los estudiantes que realicen consultas del fenómeno, y que describan cómo los profesionales podrían usar las matemáticas allí.

Para el caso de la concentración de un medicamento en la sangre, los estudiantes generalmente se remiten a internet. Después de la consulta, se les propone una discusión colectiva de sus hallazgos. En una experiencia desarrollada con futuros profesores en junio de 2018, los estudiantes formularon preguntas como:

- ¿Qué factores pueden determinar la efectividad de un medicamento?
- ¿Cuáles son los efectos secundarios de un medicamento y cómo determinarlos?
- ¿Cuál es la composición química de un medicamento como la fluoxetina?
- ¿La vida media de un medicamento puede depender de la composición química y de la cantidad?
- ¿Cuáles son las características o rasgos de una persona con depresión?

[2] En este capítulo, los participantes se nombran con seudónimos.

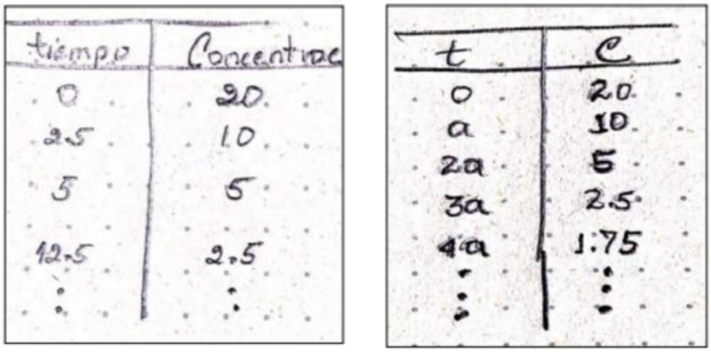
En la experiencia mencionada, cuestionamos a los estudiantes por el rol de las matemáticas para resolver sus preguntas. Como resultado, los estudiantes señalaron aspectos como:

- *"Se requiere más de conocimientos de otras áreas que de las matemáticas mismas"* (Karla, 22 de junio de 2018).
- *"Para responderlas* [las preguntas propuestas antes] *se debe trabajar con médicos, químicos y otros profesionales"* (Juan, 22 de junio de 2018).
- *"En varias de ellas* [preguntas] *se puede usar estadística para determinar los efectos de una cosa en otra"* (Guillermo, 22 de junio de 2018).

Esta parte del ambiente de modelación tiene como propósito que los estudiantes reconozcan que las situaciones o fenómenos a estudiar involucran conocimientos y procesos de otras disciplinas; además, permite cuestionar la idea de que las matemáticas están en todo o que permiten dar respuesta a cualquier pregunta. En ocasiones, este tipo de discusiones ofrece oportunidades para que los estudiantes se encaminen hacia el desarrollo de proyectos acorde con sus propios intereses. Por ejemplo, ha sido motor para que, en 2016, un grupo de estudiantes decidiera estudiar el comportamiento del Ritalín y, en 2019, que otra estudiante se inspirara en su condición personal para estudiar el comportamiento y efectos de la Aspirina.

En el caso de la experiencia que describimos, los estudiantes se enfocaron en la pregunta que, a su juicio, representaba una mayor presencia de la matemática, es el caso de: ¿Cómo se comporta la concentración de la fluoxetina en la sangre? Para responder esta pregunta, identificaron en internet que este medicamento tiene una vida media de dos a tres días y que la presentación de esta es de cápsulas de 20 miligramos. Después de comprender el significado del término *vida media*, la primera estrategia a la que se refirieron los estudiantes fue a la construcción de una tabla de valores. En las figuras 1a y 1b se presentan las tablas construidas por dos grupos de estudiantes.

Figuras 1a y 1b. Concentración de la fluoxetina en la sangre



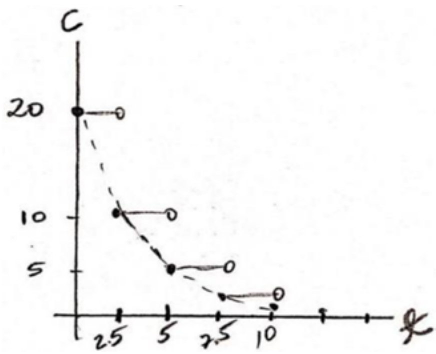
tiempo	Concentrac
0	20
2.5	10
5	5
12.5	2.5
⋮	⋮

t	c
0	20
a	10
2a	5
3a	2.5
4a	1:75
⋮	⋮

Fuente: producciones de los estudiantes, 2018.

Las figuras 1a y 1b muestran dos comprensiones diferentes de los estudiantes; por un lado, parecen ver la vida media como un fenómeno de variación discreta cuyo aumento se daba en cada intervalo de 2,5 días (figura 1a); y por otro, entienden el uso de la letra *a* como un parámetro de una *constante que cambia* (figura 1b). Frente al primer aspecto, uno de los profesores del curso hizo en el tablero un gráfico cartesiano (tomando a = 1) correspondiente a los valores de la tabla de la figura 1b. Luego de ello, preguntó por el cambio, cuestionó si en cada intervalo la concentración permanecía constante hasta que se cumpliera el siguiente tiempo de vida media (ver parte entera en la figura 2). Los estudiantes indicaron que la gráfica debía ser una función continua como una curva suave de forma exponencial. Frente al uso de la letra *a,* uno de los profesores generó una reflexión sobre el significado de la letra y las implicaciones que tendría construir una función con esa representación o solo con un valor particular de ese parámetro. Otras reflexiones sobre el uso de las letras en el álgebra escolar también se hicieron presentes.

Figura 2. Gráfico cartesiano de los valores de la tabla (figura 1a)



Fuente: producción de un profesor en el tablero, 2018.

De la discusión generada a partir de la gráfica de la figura 2, sobre comportamiento suave de la relación entre la concentración del medicamento en la sangre y el tiempo, los estudiantes reformularon sus tablas y surgió la necesidad de crear una variable auxiliar "*n*" (ver figura 3).

Figura 3. Variable auxiliar, concentración de la fluoxetina en la sangre

n	t	C
0	0	20
1	a	10
2	$2a$	5
3	$3a$	2.5
⋮	⋮	⋮
n	na	$20/2^n$

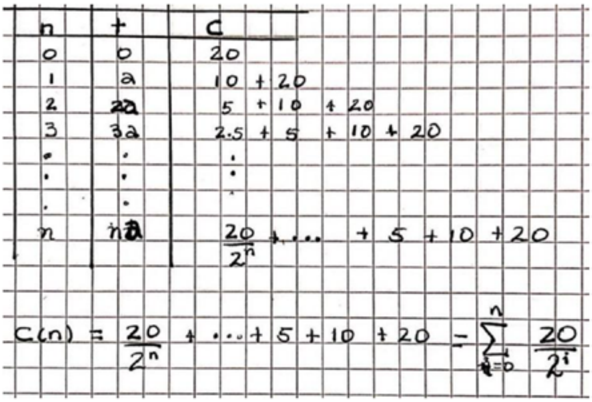
Fuente: producciones de los estudiantes, 2018.

Conforme describimos en el apartado de visiones teóricas, un aspecto importante de un ambiente de modelación es el uso de técnicas y procedimientos acordes con las necesidades que surgen de acuerdo con el proceso y el contexto. Por tanto, se cuestionó el significado de la letra *n* (variable auxiliar en la tabla de la figura 3). Algunos estudiantes dijeron "*representa como pasos*, *grupos de vida media*". Uno de los profesores del curso dio pasos a medida que se listaban los valores que podría tomar la variable auxiliar *n*; ello contribuyó para que los estudiantes reconocieran su significado como *un contador que dice cuántos períodos de vida media se llevan*. Con base en la nueva tabla (figura 3), los estudiantes realizaron un proceso inductivo y construyeron la fórmula (sin otra mención al significado de las letras utilizadas): $C(n) = \frac{20}{2^n}$.

Después de ello, uno de los profesores cuestionó los procesos seguidos para construir el modelo. Los estudiantes resaltaron que la variable *n* les había ayudado a *ver* un patrón y, por tanto, lo pudieron representar algebraicamente. Al respecto, el profesor les hizo notar el papel de la tabla en sus razonamientos y en la construcción de los modelos; también mencionó que el razonamiento fue posible gracias al significado de la *vida media*; que ese valor, por sí mismo, también representa un modelo matemático, y pidió a los estudiantes que conjeturaran del proceso que pudo haberse seguido para su construcción. Posteriormente, uno de los profesores pidió a los estudiantes que representaran la concentración del medicamento en términos del tiempo; los estudiantes observaron la tabla de la figura 3 y generaron sus interpretaciones, por ejemplo, Carlos, uno de los estudiantes mencionó "*es como una composición de funciones*". Con base en las indicaciones, los estudiantes lograron construir la siguiente fórmula: $C(t) = \frac{20}{2^{\frac{t}{a}}}$.

La segunda parte de la tarea consistió en dar cuenta del comportamiento de la concentración del medicamento para un tratamiento prolongado. Frente a ello, los estudiantes consultaron en internet la posología que se recomienda en un tratamiento; encontraron que la depresión, *"generalmente requiere un tratamiento por bastante tiempo en el que se debe tomar una o a veces dos pastillas* [cápsulas] *cada día"* y agregaron *"se debe tener cierta concentración en la sangre para que pueda hacer efecto"*. Basado en ello, uno de los profesores les pidió que construyeran un modelo que permitiera describir la situación. Para los estudiantes, esa situación representó un desafío, pues les implicó comprender el comportamiento de decrecimiento de la concentración de una cápsula del medicamento, pero al mismo tiempo, el aumento que implicaba tomar una nueva cápsula según el tratamiento. Dos tipos de respuestas se presentaron; por un lado, una parte de los estudiantes que, para comprender el fenómeno y simplificar su complejidad, supuso que el consumo de cada cápsula coincide con el de la vida media (*a*). En la figura 4, se muestra la construcción de la tabla y de una representación del modelo en términos de la variable auxiliar *n*.

Figura 4. Tabla y expresión algebraica construidas



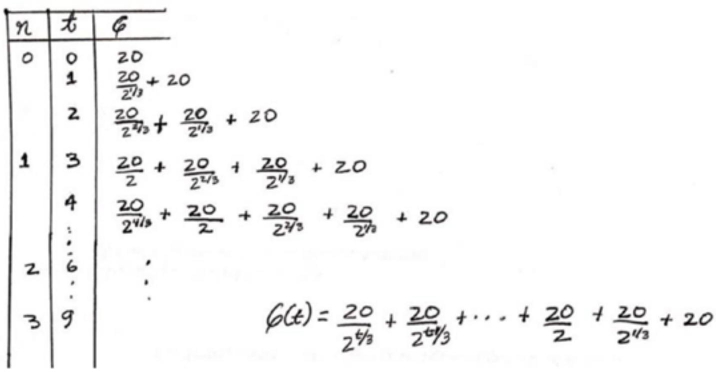
n	t	C
0	0	20
1	a	10 + 20
2	2a	5 + 10 + 20
3	3a	2.5 + 5 + 10 + 20
⋮	⋮	⋮
n	na	$\frac{20}{2^n} + \dots + 5 + 10 + 20$

$$C(n) = \frac{20}{2^n} + \dots + 5 + 10 + 20 = \sum_{i=0}^{n} \frac{20}{2^i}$$

Fuente: producciones de los estudiantes, 2018.

Por otro lado, la figura 5 ilustra otro tipo de construcciones en las que los estudiantes buscaron dar cuenta del comportamiento de la concentración cuando se tiene en cuenta el consumo de una cápsula diaria. En este caso, los estudiantes recurrieron al modelo construido en la tarea 1, para describir la manera en que decrece la concentración del medicamento contenido en una cápsula.

Figura 5. Tabla y modelo construido



n	t	C
0	0	20
	1	$\frac{20}{2^{1/3}} + 20$
	2	$\frac{20}{2^{2/3}} + \frac{20}{2^{1/3}} + 20$
1	3	$\frac{20}{2} + \frac{20}{2^{2/3}} + \frac{20}{2^{1/3}} + 20$
	4	$\frac{20}{2^{4/3}} + \frac{20}{2} + \frac{20}{2^{2/3}} + \frac{20}{2^{1/3}} + 20$
	⋮	⋮
2	6	
	⋮	
3	9	

$$C(t) = \frac{20}{2^{t/3}} + \frac{20}{2^{t-1/3}} + \dots + \frac{20}{2} + \frac{20}{2^{1/3}} + 20$$

Fuente: producciones de los estudiantes, 2018.

En la clase, los profesores estuvieron atentos a las dificultades de los estudiantes en la identificación de los patrones y buscaron alternativas para apoyarlos. Por ejemplo, llamaron la atención de la importancia de la tabla en la identificación de las relaciones numéricas entre las variables y del patrón en la construcción de la expresión algebraica. También de la información que arroja el modelo escrito en forma recursiva (figuras 4 y 5) y la posibilidad y necesidad de construir otras representaciones del modelo.

Un elemento importante fue la reflexión en torno al razonamiento inductivo realizado para la construcción del modelo. Por ejemplo, algunos estudiantes lograron construir las secuencias 20 + 10 + 5 + 2.5 + … $\frac{20}{2^n}$ con n = 0, 1, 2, … como modelo matemático. Los profesores les sugirieron reescribir en términos de las operaciones realizadas. Llegaron a una expresión como $\frac{20}{2^0}+\frac{20}{2^1}+\frac{20}{2^2}+\frac{20}{2^3}+\dots+\frac{20}{2^n}$.

Los estudiantes, al respecto, mencionaron que el hecho de poder escribirla de esa manera les había permitido "*ver qué se conserva...*". Por ejemplo, uno de los estudiantes apuntó que "*yo pude ver que, de un término a otro, se multiplica por ½*". Como una manera de promover la reflexión de la propia experiencia, uno de los profesores les comentó "*ver un patrón no es automático, eso que les ha pasado a ustedes también les puede pasar a sus* [futuros] *estudiantes, reescribir las expresiones y centrar la atención en las operaciones y no solo en el resultado puede ser una estrategia que ayuda a los estudiantes para ver las relaciones* [y] *los patrones*".

Los profesores propusieron la discusión de los alcances y limitaciones de los dos modelos construidos por los estudiantes; para ello, uno de los profesores formuló a los estudiantes preguntas como ¿qué modela el modelo?, ¿cuál es la diferencia entre los dos modelos construidos? Al respecto, uno de los estudiantes señaló: *"fue hecho suponiendo que la pastilla se toma cada 'a' días* [refiriéndose al valor 'a' en el modelo de la figura 4], *pero eso no es real, fue para ver más simple la relación"* (Santiago, 22 de junio de 2018). En relación con el uso del modelo, mencionaron que los modelos "*deberían funcionar en el caso de personas que verdaderamente tengan un organismo que conserve esa vida media*" (Karla, 22 de junio de 2018), y en caso de que no, los estudiantes dijeron que "*igual se reemplaza* a *por otro valor*".

Los estudiantes también reconocieron que los alcances del modelo dependen, entre otras cosas, de que el organismo responda al tratamiento, pues esto no sucede en todas las personas: "*Por ejemplo yo encontré* [en Google] *que el tratamiento debe funcionar en cuatro o seis semanas*" (ver figura 8), y agregó que "*si en diez semanas no se siente mejoría, entonces se debe cambiar el tratamiento,* *es que no todos los organismos responden de la misma manera al medicamento*" (Guillermo, 22 de junio de 2018).

En otro momento del ambiente de clase, los profesores promovieron en los estudiantes el reconocimiento de una necesidad de construir otras expresiones algebraicas; para ello, los estudiantes utilizaron las características de las series geométricas y, con la ayuda de uno de los profesores, construyeron una representación no recursiva del modelo. En la figura 6 se presenta la fórmula construida en colectivo, en que *S* representa la suma de los términos de la serie que sería C (t).

Figura 6. Fórmula no recursiva para C (t), para el caso de la vida media (a = 3)

$$S=\frac{20\left(2^{\frac{t+1}{3}}-1\right)}{2^{t/3}\left(2^{1/3}-1\right)}$$

Fuente: producciones de los estudiantes, 2018.

La parte final de la tarea se motivó a través de un cuestionamiento de la manera en que crece la concentración del medicamento. Al respecto, uno de los profesores pidió a los estudiantes describir la manera en que varía esa magnitud. A cerca de esto, los estudiantes anotaron aspectos como: *"la cantidad de medicamento de una cápsula decrece, pero la concentración total crece porque cada día se toma una cápsula de más"* (Karla, 22 de junio de 2018). A partir de este comentario, el profesor replicó: *"muy bien, crece, pero ¿qué tan rápido crece? Por ejemplo, si el tratamiento se prolongara indefinidamente, ¿podría llegar el momento en que en el cuerpo haya doscientos miligramos de concentración? ¿O quinientos miligramos o mil miligramos?"*.

Los estudiantes se dispusieron en grupos para discutir y presentar una respuesta. La principal manera de solución involucró la construcción de gráficas y el análisis de sus concavidades, también aparecieron diferentes formas de operar con la noción de límite, algunos de manera intuitiva, otros utilizaron procedimientos formales y otros usaron el software GeoGebra para graficar la función que modela la concentración en términos del tiempo (ver figura 7). Basados en ello, los estudiantes reconocieron la existencia de una asíntota horizontal. En la figura 7 se presenta el gráfico propuesto por un grupo de estudiantes.

Figura 7. Gráfica de la función $s(x) = 20.\frac{2^{\frac{x+1}{3}}-1}{2^{\frac{x}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)}$ en GeoGebra

Fuente: producciones de los estudiantes, 2018.

Con el ánimo de usar el modelo para comprender la situación pedimos a los estudiantes describir el fenómeno a la luz de los modelos construidos. Para los estudiantes, la concentración “*crece, pero cada vez más despacio*”, además “*tiene una asíntota horizontal, o sea que no se pasa de ese valor que es más o menos noventa y siete miligramos* [eso indica que] *nunca llegaría ni a cien ni a quinientos ni mil miligramos*” (Juan, 22 de junio de 2018). Para validar sus afirmaciones, se propusieron buscar en Internet algunas indicaciones de cuál sería la concentración máxima; no lograron encontrar el dato. Sin embargo, encontraron que un tratamiento puede hacer efecto entre las semanas 4 y 6 del tratamiento (ver figura 8). Los estudiantes interpretaron ello como: “*se debe estar muy próximo al valor máximo, es decir, al valor de la asíntota horizontal*” (Juan, 22 de junio de 2018), “*en la gráfica que ve que* [después] *de veinticinco se ve muy cerca de la asíntota*” (Cristina, 22 junio de 2018).

Figura 8. Captura de pantalla de Google de la fluoxetina

¿Cuánto tiempo tarda en hacer efecto los antidepresivos?

P. ¿**Cuánto tiempo tardan en hacer efecto** los medicamentos para la depresión? R. Los **antidepresivos tardan** en empezar a **hacer efecto** de 4 a 6 semanas, aunque algunos pacientes pueden empezar a experimentar cierta mejoría en la segunda o tercera semana de tratamiento.

FAQ Depresión - Neria Morales PsicologíaPsiquiatras Valencia ...
neriamoralespsiquiatra.com › services › faq-depresion

Fuente: captura de pantalla de búsqueda en Google por parte de los estudiantes, 2018.

Para confirmar sus interpretaciones, los estudiantes utilizaron el software GeoGebra para hacer algunos cálculos, por ejemplo, el valor de la concentración entre las semanas 4 y 6, y en valores muy altos según las posibilidades que les presentaba el software (figura 9).

Figura 9. Cálculos realizados con el software GeoGebra

$$s(x) = 20 \cdot \frac{2^{\frac{x+1}{3}} - 1}{2^{\frac{x}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right)}$$

$a = s(32)$

$\rightarrow$ 96.8991049073605

$b = s(42)$

$\rightarrow$ 96.9417455991488

$c = s(3000)$

$\rightarrow$ 96.946442037264

Fuente: producciones de los estudiantes, 2018.

En la discusión general los estudiantes señalaron que para que el medicamento surta efecto, se debe estar cerca del valor de la asíntota y sostener ese valor para no generar una pérdida de concentración del medicamento.

Consideraciones finales

En los últimos diez lustros, las investigaciones en modelación en la perspectiva de la educación matemática han producido una amplia cantidad de investigaciones que dan cuenta de una diversidad de comprensiones, posibilidades, limitaciones, usos, metodologías y necesidades para la formación de estudiantes y profesores. Las diferentes maneras de comprender la modelación sugieren que, en los salones de clase, los profesores pueden configurar ambientes para que los estudiantes aprendan a modelar matemáticamente, aprendan matemáticas a través de la modelación, pero más allá de ello, reconozcan los usos y alcances de los modelos matemáticos y de las matemáticas en la solución de cuestiones relevantes en el ámbito académico y social.

De un modo general, en este capítulo se enunciaron tres ejemplos de posibles tareas que los profesores pueden desarrollar en sus clases, por ejemplo, a través de proyectos, los estudiantes pueden elegir los temas acorde con sus intereses; de acuerdo con Villa-Ochoa y Berrío (2015), la participación de los estudiantes en los proyectos ofrece posibilidades para promover no solo los aprendizajes matemáticos, sino también una manera de reconocer otros conocimientos propios del contexto (y de la cultura) que son relevantes en el proyecto. Por otro lado, el trabajo de Parra-Zapata *et al.* (2016) muestra que, en la educación primaria, la modelación puede ser vista como el desarrollo de un interés y sensibilidad por una *matematización de la realidad,* que permite entre otras acciones, la problematización y el cuestionamiento de asuntos inmersos en la situación y que posibilita reconocer el uso, alcance y limitaciones de los modelos en contextos particulares. Finalmente, el estudio de Villa-Ochoa (2016) reconoció la importancia de conceptualizar los modelos como la conjunción de representaciones, objetos representados y usuarios. Reconocer la diversidad de tareas implica también un reconocimiento de sus alcances (Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona, 2017) y la diversidad de posibilidades que se pueden tener en cuenta acorde con los requerimientos y condiciones académicas e institucionales impuestas por el entorno escolar (Romo-Vázquez, Barquero y Bosch, 2019).

En el caso particular de este capítulo, se presentaron con un poco más de detalle algunas posibilidades para configurar un ambiente de modelación que, a partir de una tarea realista, pueda constituir otras posibilidades de hacer matemáticas con futuros profesores. En el ejemplo, se promovió que los estudiantes (futuros profesores) participaran en la construcción de los modelos, reconocieran las condiciones en las que fueron construidos, sus limitaciones, sus alcances; pero sobre todo, reflexionaran acerca de su propia experiencia con el fin de proyectar acciones para su futura práctica como profesores. Estas y otras acciones han sido reconocidas en la literatura como aspectos clave para el aprendizaje de la modelación por parte de los profesores (Romo-Vázquez, Barquero y Bosch, 2019; Rosa y Orey, 2019; Villa-Ochoa, 2016).

En el ambiente descripto, los estudiantes pudieron explicar el comportamiento de un fenómeno a la luz de sus propias interpretaciones e indagaciones, a partir de las cuales generaron sus propios modelos y cuestionaron su pertinencia en relación con la situación que se les planteó. En esta medida, el ambiente permitió la participación de los estudiantes en tanto ellos se involucraron y comprometieron con la problematización de sus ideas en diferentes momentos de la tarea. Por su parte, el ambiente implicó para los profesores estar atentos a cuestiones propias del conocimiento matemático y el cuestionamiento constante de las ideas de los estudiantes hacia la comprensión del modelo. En este sentido, el ambiente proporciona a los estudiantes experiencias para identificar cuestiones que puedan estudiarse con las matemáticas, permite la exploración de tales cuestiones y reconocer cómo las matemáticas aportan y tienen limitaciones frente a la comprensión o explicación del fenómeno de estudio.

A partir de lo anterior podemos concluir que los ambientes de modelación como espacios que promueven un compromiso de los estudiantes con el proceso, la interacción y la reflexión (Parra-Zapata y Villa-Ochoa, 2016) no dependen solamente de la tarea propuesta a los estudiantes, sino también de la conjunción de la tarea propuesta, la gestión del profesor y la participación de los estudiantes.

La modelación situada en el ámbito de la formación de profesores implica que confluyan en los ambientes propuestos las ideas matemáticas, el uso de datos reales, los espacios de participación, el uso de diferentes conocimientos matemáticos, el reconocimiento de resultados, el uso de argumentos y procedimientos matemáticos, el diálogo con expertos y la evaluación para promover el aprendizaje. De acuerdo con esto concluimos que, situar la modelación en este ámbito conlleva a proporcionarles a los estudiantes (futuros profesores) experiencias de primera mano de lo que puede ser la modelación y de cómo puede implementarse en clase de matemáticas, esto es, posibilitar un reconocimiento de aspectos que se pueden considerar en el ambiente, sus alcances en el aprendizaje y en los contextos y problemas que se desarrollan, pero también, implica reconocer las posibilidades que ofrece en su futuro desempeño como profesor.

Referencias bibliográficas

Araújo, J. de L. (2012). Ser Crítico em Projetos de Modelagem em uma Perspectiva Crítica de Educação Matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *26*(43), 839-859. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000300005.

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. *ZDM - Mathematics Education*, *38*(3), 293-301. https://doi.org/10.1007/BF02652812.

Fowler, A. C. (1998). *Mathematical models in the applied sciences*. Cambridge University Press.

Kaiser, G. (2017). The Teaching and Learning of Mathematical Modeling. In J. CAI (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 267-291). NCTM.

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, W. Hen & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 3–32). Springer US.

Parra-Zapata, M. M. (2015). Participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática: reflexiones a partir de la perspectiva socio-crítica de la modelación matemática. [Tesis de Maestría]. Universidad de Antioquia.

Parra-Zapata, M. M. & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Interacciones y contribuciones. Formas de participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. *Actualidades Investigativas En Educación*, *16*(3), 1-27.

Parra-Zapata, M. M., Parra-Zapata, J. N., Ocampo-Arenas, M. C. y Villa-Ochoa, J. A. (2016). El índice de masa corporal. Una experiencia de modelación y uso de modelos matemáticos para el aula de clase. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *92*, 21-33.

Perrenet, J. & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Applications, 1*(6), 3-21.

Rendón-Mesa, P. A. (2016). *Articulación entre la matemática y el campo de acción de la ingeniería de diseño de producto: aportes de la modelación matemática*. Universidad de Antioquia.

Rendón-Mesa, P. A., Duarte, P. V. E. y Villa-Ochoa, J. A. (2016). Articulación entre la matemática y el campo de acción de la ingeniería de diseño de producto: componentes de un proceso de modelación matemática. *Revista de La Facultad de Ingeniería U. C. V.*, *31*(2), 21-36.

Romo-Vázquez, A., Barquero, B., y Bosch, M. (2019). El desarrollo profesional online de profesores de matemáticas en activo: una unidad de aprendizaje sobre la enseñanza de la modelización matemática. *Uni-pluriversidad*, *19*(2), 161-183, doi: 10.17533/udea.unipluri.19.2.09.

Rosa, M. & Orey, D. C. (2019). Mathematical modelling as a virtual learning environment for teacher education programs. *Uni-pluriversidad*, *19*(2), 80-102. Doi: 10.17533/udea.unipluri.19.2.04.

Stillman, G. A. (2019). State of the Art on Modelling in Mathematics Education. Lines of Inquiry. In G. Stillman & J. Brown (Eds). *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (pp. 1-20). https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-030-14931-4_1.

Villa-Ochoa, J. A. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación*, *8*(16), pp. 133-148. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m8-16.mmpe.

Villa-Ochoa, J. A. (2016). Aspectos de la modelación matemática en el aula de clase. El análisis de modelos como ejemplo. In J. Arrieta & L. Díaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 109-138). Gedisa.

Villa-Ochoa, J. A. & Berrío, M. J. (2015). Mathematical Modelling and Culture: An Empirical Study. In G. A. Stallman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice, International Perspectives on the Teaching and Learning* (pp. 241-250). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_19.

Villa-Ochoa, J. A., Castrillón-Yepes, A. y Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espaço Plural*, *18*(36), 219-251.