revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE INTEGRAL DEFINIDA POR MEIO DE TAREFAS MATEMÁTICAS

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2021.10.21.440-462

Juliana França Viol Paulin[1]
Alessandro Jacques Ribeiro[2]

Resumo: Neste artigo discutimos aspectos inerentes à prática docente fundamentada no ensino exploratório em um contexto universitário. Com esta prática objetivamos identificar oportunidades de aprendizagem experimentadas por estudantes da disciplina de Funções de Uma Variável, quando estes desenvolvem tarefas matemáticas exploratórias relacionadas ao cálculo de área de regiões planas como ferramentas introdutórias ao conceito de Integral Definida e compreender como essas oportunidades favoreceram os processos de ensino e de aprendizagem deste conceito. O estudo enquadra-se em uma perspectiva qualitativa-interpretativa de pesquisa, com procedimentos metodológicos inspirados em uma Investigação Baseada em Design (IBD), desenvolvida com estudantes de uma universidade pública no estado de São Paulo. Os resultados apontam que as tarefas matemáticas possibilitaram aos estudantes a mobilização de conhecimentos matemáticos prévios construídos na Educação Básica, como: o cálculo de área de figuras geométricas planas; representação gráfica de diferentes funções; determinação do domínio das funções; além do próprio conceito de Integral Definida. Identificamos ainda, que os processos de ensino e de aprendizagem do conceito de Integral Definida, por parte dos estudantes ao trabalharem em um ambiente de ensino exploratório, se deu de forma coletiva e participativa, em que foram privilegiados os conhecimentos anteriores dos estudantes; o trabalho em grupo; as discussões coletivas; e a construção do conhecimento em colaboração com os pares (professores e estudantes).
Palavras-chave: Tarefas Matemáticas. Integral Definida. Ensino Exploratório. Investigação Baseada em Design.

LEARNING OPPORTUNITIES FOR THE INTEGRAL CONCEPT DEFINED THROUGH MATHEMATICAL TASKS

Abstract: In this paper we discuss aspects inherent to teaching practice based on inquiry-based in a university context. With this practice we aim to identify learning opportunities experienced by students of the Functions of One Variable discipline, when they develop exploratory mathematical tasks related to the calculation of areas of flat regions as introductory tools to the concept of Definite Integral and understand how these opportunities favored the teaching and learning processes of this concept. The study fits into a qualitative-interpretative research perspective, with methodological procedures inspired by Design-Based Research (DBR), developed with students from a public university in the state of São Paulo. The results show that the mathematical tasks enabled students to mobilize previous mathematical knowledge built in Basic Education, such as the calculation of the area of flat geometric figures; graphical representation of different functions; determining the domain of functions; in addition to the concept of Defined Integral itself. We also identified that the process of construction of the concept of Defined Integral, by the students when working in an inquiry-based teaching environment, took place in a collective and participatory way, in which the previous knowledge of students; group work; collective discussions; and the construction of knowledge in collaboration with peers (teachers and students).
Keywords: Mathematical Tasks. Defined Integral. Inquiry-based Teaching. Design-Based Research.

[1] Doutora em Educação Matemática. E-mail: viol.juliana@gmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0057-9847.
[2] Doutor em Educação Matemática. Docente do Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC) da Universidade Federal do ABC (UFABC) e do Programa de Pós-Graduação em Ensino e História das Ciências e Matemática, Santo André, São Paulo, Brasil. E-mail: alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9647-0274.

CC BY NC ND

Introdução

Nossas experiências profissionais e acadêmicas, bem como pesquisas em Educação Matemática, têm nos mostrado que a abordagem que prevalece nos processos de ensinar e de aprender Cálculo Diferencial e Integral (CDI) não se mostra satisfatória para a formação dos estudantes (JAWORSKI; MALI; PETROPOULOU, 2016), sendo assim, é necessária uma abordagem que privilegie uma formação global, crítico e reflexiva dos estudantes, que os coloquem na posição de co-construtores do conhecimento e não como meros expectadores capazes de aplicar o conhecimento em diferentes contextos (PONTE, 2014). Além disso, as dificuldades dos estudantes com a Matemática escolar refletem no seu desempenho em diferentes disciplinas do Ensino Superior (CASTRO, 2008; FARIAS, 2015), em especial, aquelas que abordam conceitos que envolvem o CDI (VERZOSA *et al.*, 2014; HITT; GONZÁLEZ-MARTÍN, 2016; TREVISAN; MENDES, 2018).

Diante desse cenário, destacamos que uma prática de ensino que privilegie abordagens metodológicas em que o aluno participe ativamente dos processos de ensino e de aprendizagem dos conceitos de CDI pode contribuir para o rompimento da abordagem de “ensino direto”, ou ao menos, propor alternativas para uma nova abordagem (JONES; WATSON, 2017; TREVISAN; MENDES, 2018; WAGNER, 2018; RAMOS; TREVISAN; MENDES, 2019; RIBEIRO; PAULIN, 2020). Por este motivo, o trabalho em sala de aula, que privilegia o desenvolvimento e a aplicação de tarefas matemáticas, pode favorecer a discussão de conceitos matemáticos entre os estudantes, sempre fomentados pelo professor, e contribuir para o processo de aprendizagem deles em um ambiente diferente do usual (TREVISAN; MENDES, 2018; RAMOS; TREVISAN; MENDES, 2019; RIBEIRO; PAULIN, 2020). Na literatura, observamos que em consequência do trabalho com tarefas matemáticas, aliado à uma prática de ensino que privilegie o envolvimento dos estudantes com as tarefas, bem como permita as discussões coletivas e interações entre todos os envolvidos, observa-se o surgimento de oportunidades de aprendizagem aos estudantes (HEYD-METZUYANIM; TABACH; NACHLIELI, 2016; YACKEL; COBB; WOOD, 1991).

Com base nas pesquisas que temos desenvolvido relacionadas aos processos de ensino e de aprendizagem de CDI, consideramos que uma metodologia de ensino pautada no uso de tarefas matemáticas exploratórias pode possibilitar aos estudantes o refinamento de concepções intuitivas e de conhecimentos prévios, bem como estabelecer relações entre os novos conceitos matemáticos (RAMOS; TREVISAN; MENDES, 2019; TREVISAN; MENDES, 2018). Além do mais, observamos que tal metodologia pode propiciar certo envolvimento dos estudantes no desenvolvimento das tarefas, resultando na construção do conhecimento matemático, sempre priorizando a discussão e a sistematização dos conceitos, além de possibilitar uma vivência diferenciada durante a disciplina, por meio de discussões coletivas (RIBEIRO; PAULIN, 2020).

Considerando tal problemática, discutimos neste artigo uma abordagem de ensino exploratório que privilegia o uso de tarefas desenvolvidas no contexto do ensino superior e temos por objetivo *identificar oportunidades de aprendizagem experimentadas por estudantes da disciplina de Funções de Uma Variável (FUV), quando estes desenvolvem tarefas matemáticas exploratórias relacionadas ao cálculo de área de regiões planas como ferramentas introdutórias ao conceito de Integral Definida e compreender como essas oportunidades favoreceram os processos de ensino e de aprendizagem deste conceito.*

Para tal, elencamos duas questões de pesquisa que buscamos responder no artigo: (i) quais conhecimentos matemáticos prévios são mobilizados pelos estudantes a partir do desenvolvimento das tarefas matemáticas exploratórias para a introdução ao estudo do conceito de Integral Definida? (ii) como se deram os processos de ensino e de aprendizagem do conceito de Integral Definida, quando estudantes trabalham em um ambiente de ensino exploratório? Desta forma, a primeira questão parece-nos permitir analisar quais conceitos os estudantes mobilizaram, por meio das tarefas matemáticas exploratórias e como estes são pertinentes ou importantes para a construção do conceito de Integral Definida e, com a segunda questão, o foco se coloca em, a partir de uma abordagem de ensino exploratório, levantar quais potencialidades, limitações, erros, e explicar como esses podem ter contribuído para que os estudantes construíssem o conceito de Integral Definida.

O contexto no qual a pesquisa foi realizada e os dados foram recolhidos insere-se em uma disciplina de Funções de Uma Variável (FUV), de uma universidade pública no estado de São Paulo, lócus no qual se deu o processo de ensino exploratório realizado. Vale destacar que, de maneira mais ampla, nosso estudo aborda tarefas matemáticas exploratórias que contemplam os conceitos de Derivada, de Integral e o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)[3]. Entretanto, no presente artigo, especificamente, focamos nas tarefas que abordaram o cálculo de área de regiões planas e na aula que privilegiou e possibilitou a introdução do conceito de Integral Definida de uma função aos estudantes universitários, como explicado anteriormente.

No que segue, apresentamos o referencial teórico-metodológico que fundamenta nossa

[3] Para maior aprofundamento sobre o processo de desenvolvimento e aplicação das tarefas matemáticas consultar Ribeiro e Paulin (2020).

investigação, assim como o contexto no qual o estudo foi desenvolvido, em especial, destacando os aspectos particulares da tarefa matemática sobre o cálculo de áreas de regiões planas para a introdução do conceito de Integral Definida. Passamos às análises dos dados e, ao final, trazemos as conclusões do artigo, momento no qual apresentamos as respostas às nossas questões de pesquisa e, em seguida, considerações finais e encaminhamentos futuros.

Enquadramento Teórico

Nesta investigação problematizamos aspectos inerentes aos processos de ensino e de aprendizagem de CDI, focando especificamente no conceito de Integral Definida, em um ambiente de ensino exploratório que nos permite propiciar aos estudantes diferentes oportunidades de aprendizagem relacionadas à temática investigada. Por este motivo, nesta seção, dialogamos com diferentes pesquisadores em Educação Matemática que fundamentam nossa pesquisa e nos ajudarão no processo de análise dos dados.

a) Os Processos de Ensino e de Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral

Muitos pesquisadores da área de Educação Matemática têm se dedicado à investigação relacionada aos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática no Ensino Superior. Temáticas como os altos índices de reprovação, o baixo rendimento acadêmico e as dificuldades enfrentadas pelos alunos têm recebido atenção especial (TREVISAN; MENDES, 2018), principalmente no que diz respeito aos conceitos de CDI, dada a importância desta disciplina no Ensino Superior, nas áreas de ciências exatas, humanas e saúde.

Apesar desta preocupação, a abordagem de ensino que prevalece na universidade está pautada no rigor imposto pela apresentação dos conceitos de CDI, bem como na resolução de "[...] listas de exercícios de caráter puramente algébrico e mecânico, sem levar em conta o significado de tais conceitos" (RICHIT, 2010, p. 27). Assim, vemos que, de forma geral, as aulas seguem o modelo "tradicional" de ensino, baseadas quase que unicamente na exposição do conteúdo e com pouco estímulo e favorecimento à criatividade e à aprendizagem dos estudantes.

Além disso, quando os estudantes ingressam nas disciplinas que envolvem os conteúdos de CDI, geralmente apresentam

> [...] características oriundas de sua rotina de estudos na Educação Básica, tais como: falta de experiências anteriores com tarefas de caráter

> investigativo; expectativa de aulas expositivas, sucedidas pela resolução de tarefas similares aos exemplos apresentados pelo professor; concepções equivocadas acerca de alguns conceitos matemáticos (muitas vezes decorridas do foco na mecanização de processos, em vez de compreensão e atribuição de significado); hábito de trabalhar, na maioria das vezes, de forma individual, tendo dificuldade em expor e discutir suas ideias em grupo ou para toda a sala (TREVISAN; MENDES, 2018, p. 213-214).

No que diz respeito às dificuldades com alguns conceitos de CDI, Verzosa *et al.* (2014) enfatizam que, mesmo que os estudantes compreendam a relação entre as operações de derivação e de integração, esta não é uma condição que lhes garanta habilidades para identificar a conexão existente entre os conceitos de área e de taxa de variação, por exemplo. Tais dificuldades estão, em sua maioria, relacionadas ao conhecimento limitado que os estudantes possuem em relação ao conceito de função; ao pouco entendimento acerca da ideia de taxa de variação e acumulação; às poucas habilidades para trabalhar com o conceito de covariação; e a falta de compreensão da ordem na qual as duas "partes" do TFC são apresentadas em cursos introdutórios de Cálculo (PONCE-CAMPUZANO, 2013).

Buscando por metodologias alternativas às comumente desenvolvidas nas aulas das disciplinas matemáticas do Ensino Superior – apresentações de definições, exemplos e ilustrações de conceitos presentes na ementa da disciplina, resolução de exercícios-tipo e realização de prova escrita – Trevisan e Mendes (2018) desenvolveram uma proposta de ensino e de aprendizagem de CDI baseada em episódios de resolução de tarefas, enfatizando que propostas nesta perspectiva precisam levar em conta os aspectos apontados pelas pesquisas em Educação Matemática e diferirem das aulas centradas unicamente no livro didático.

Para esses autores, esta perspectiva de trabalho em sala de aula propicia que os estudantes tenham papel ativo "trabalhando, quando possível, em grupos e em tarefas não precedidas de exemplos, que sejam desencadeadoras de discussões e que contribuam para elaborações conceituais" (MENDES; TREVISAN, 2018, p. 211).

Nesse sentido, investigando e refletindo acerca dos aspectos destacados acima, identificamos no ensino exploratório uma oportunidade para criar um ambiente de ensino e aprendizagem[4] de conceitos de CDI que privilegie o resgate de conhecimentos anteriores, o trabalho em grupos e a construção do conhecimento por meio da exploração e discussão com os pares.

[4] Ambiente de ensino e de aprendizagem é entendido nesta pesquisa como "[...] um lugar previamente organizado para promover oportunidades de aprendizagem e se constitui de forma única na medida em que é socialmente construído por alunos e professores, a partir das interações que estabelecem entre si e com as demais fontes materiais e simbólicas do ambiente" (MOREIRA, 2009, p. 40).

b) *Ensino Exploratório*

No caso de nossa investigação, a intervenção educacional aconteceu por meio da elaboração e aplicação de tarefas matemáticas fundamentadas nos aspectos destacados por Ponte (2005; 2014), por meio dos quais a prática docente envolve o planejamento da unidade didática, em que o professor desenvolve uma estratégia de ensino que pode ser (i) direta, privilegiando a aula expositiva e a resolução de exercícios, ou (ii) ensino-aprendizagem exploratório, que tem como principal característica o fato de o professor não explicar tudo, "mas deixar uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os estudantes realizarem" (PONTE, 2005, p. 13). Assim, a prática docente baseada em tarefas enfatiza a discussão professor-estudantes e estudantes-estudantes.

Ponte (2005) recomenda que sejam propostas aos estudantes diferentes tarefas, pois cada tipo exerce uma função específica na aprendizagem. Para ele, as *tarefas fechadas* – comumente, conhecidas como exercícios e problemas – são importantes para o desenvolvimento da capacidade de relacionar de forma precisa a informação dada. Já as *tarefas aberta*s – explorações e investigações – auxiliam os estudantes a desenvolverem a capacidade de lidar com situações complexas, interpretando-as matematicamente. Além destas tarefas, Ponte (2005) apresenta as *tarefas com um grau de desafio reduzido*, que se caracterizam por favorecer o sucesso dos estudantes e promover sua autoconfiança e as *tarefas mais desafiantes*, caracterizadas por problemas e investigação, que proporcionam ao estudante uma experiência matemática mais profunda.

A seguir, apresentamos a Figura 1, que traz um diagrama que nos auxilia e resume de forma sucinta a natureza das tarefas:

Figura 1: Natureza das Tarefas Matemáticas

Fonte: Ponte (2005, p. 8)

Logo, por meio da proposição de tarefas, tem-se por objetivo apoiar a aprendizagem dos estudantes envolvidos, e "são usualmente (mas não necessariamente) propostas pelo professor, mas, uma vez propostas, têm de ser interpretadas pelo aluno e podem dar origem a atividades muito diversas (ou a nenhuma atividade)” (PONTE, 2014, p. 14-15). Nesse contexto, a tarefa conduz os estudantes ao desenvolvimento de diferentes atividades e na direção de sua resolução. Com isso, “a aprendizagem resulta da atividade, não das tarefas, e o mais determinante são sempre as atitudes e concepções dos atores envolvidos” (PONTE, 2014, p. 15).

De acordo com esta abordagem de ensino exploratório, as tarefas propostas visam “[...] fornecer um processo consistente de aprendizagem, que facilite a construção de conceitos e a compreensão de procedimentos e que alargue o conhecimento de representações relevantes e de conexões entre a Matemática e outras áreas” (PONTE *et al.*, 2015, p. 112). Além disso, as tarefas matemáticas podem ser caracterizadas como “uma oportunidade de trabalhar certos conceitos e procedimentos matemáticos” atendendo a “aspectos fundamentais da aprendizagem relacionados com o modo como o aluno constrói o seu conhecimento trabalhando em diversos contextos” (PONTE, 2014, p. 26).

Em uma abordagem de ensino exploratório (PONTE *et al.*, 2017), nota-se que o foco está na atividade que o estudante realiza mediado pela tarefa matemática proposta e, ainda, envolve uma forte componente de discussão (STEIN; ENGLE; SMITH; HUGHES, 2008), que favorece a argumentação matemática e leva a descobertas e construção de conjecturas. A primeira fase de uma aula exploratória é determinante (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013) e, dela, dependem todas as demais fases, tendo em vista que é necessário que os estudantes entendam a tarefa e o que está sendo solicitado a eles. Na fase de realização da tarefa, cabe ao professor apoiar o trabalho dos estudantes, buscando perceber as necessidades de cada grupo e diversificando suas intervenções (CHRISTIANSEN; WALTHER, 1986). Por fim, na fase de discussão da tarefa, é o momento em que estudantes compartilham suas resoluções sob a orquestração do professor (STEIN *et al.*, 2008), o qual deve gerir este momento de modo a propiciar sistematização e fechamento para as discussões.

Pressupostos Metodológicos, Contexto de Investigação e Tarefas Matemáticas

A investigação que apresentamos neste artigo fundamenta-se na metodologia de pesquisa qualitativa-interpretativa (ESTEBAN, 2010), por meio da realização de ações de intervenção didática, principalmente, junto aos estudantes da disciplina de Funções de Uma

Variável (FUV), oferecida ao Bacharelado Interdisciplinar (BI)[5] de uma universidade pública do estado de São Paulo, privilegiando os processos de aprender e de ensinar conceitos de CDI.

Com base em nosso objetivo de investigação, propomos uma pesquisa inspirada nos métodos da investigação baseada em design (IBD) (PONTE *et al.* 2016). Trata-se de uma abordagem de pesquisa em que são estudadas "[...] intervenções educacionais tendo em vista promover certas aprendizagens ou mudanças sistemáticas e compreender os processos que lhes estão subjacentes" (PONTE *et al.*, 2016, p. 77).

Nessa perspectiva, tendo identificado o problema de investigação, em nosso estudo, as oportunidades de aprendizagem do conceito de Integral Definida, passamos ao desenvolvimento da "[...] intervenção que deve ser materializada por meio de algum tipo de produto educacional. Este, passa pelo processo de análise e refinamento, de modo que, ao fim da investigação, possa ser utilizado por outras pessoas em outros contextos" (BARBOSA; OLIVEIRA, 2015, p. 530). No caso de nossa investigação, a intervenção educacional aconteceu por meio da elaboração e aplicação de tarefas matemáticas exploratórias tomando-se os princípios e fundamentos da abordagem de ensino exploratório (PONTE, 2005, 2014).

a) Tarefas Matemáticas sobre o Cálculo de Área de Regiões planas

Baseados nos pressupostos teórico-metodológicos elencados anteriormente, e considerando que as produções dos estudantes foram nossa principal fonte de dados para as análises, julgamos essencial apresentar e explicitar o conteúdo e a forma das tarefas matemáticas utilizadas em nosso estudo. Faremos isso na sequência.

Por ora, informamos que a turma da disciplina de FUV, na qual se deu nosso estudo, era composta por 89 estudantes[6], que trabalharam durante 4 sessões de 2 horas cada. As sessões do IBD ocorreram na sala de aula da disciplina e foram conduzidas pelos autores deste estudo, os quais atuavam como professores da disciplina. Os estudantes trabalharam em duplas durante 6 horas e, na sequência, seguiu-se uma sessão plenária de discussão coletiva, na qual os professores-pesquisadores promoveram a socialização das produções dos estudantes e fomentaram o debate e a troca de ideias entre todos os participantes.

Retornando às tarefas matemáticas exploratórias que elaboramos e aplicamos em

[5] Nesta universidade os "calouros" são admitidos para dois tipos de BI, o Bacharelado em Ciências e Tecnologias (BC&T) e o Bacharelado em Ciências e Humanidades (BC&H). Após a conclusão de um dos bacharelados interdisciplinares é que o estudante escolhe um outro curso para prosseguir, podendo escolher entre cursos de engenharias, matemática (bacharelado e licenciatura), ciência da computação e cognição.

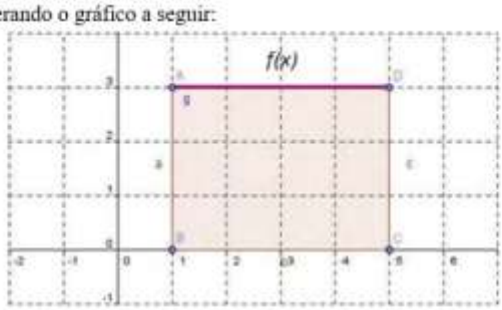
[6] Dos 89 estudantes matriculados, 69 concluíram a disciplina, sendo: 21 do BC&T e 48 do BC&H. Para nosso estudo optamos por analisar apenas as tarefas desenvolvidas pelos estudantes do BC&T, por serem aqueles que, em geral, prosseguem em carreiras profissionais ligadas à Matemática.

revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

nosso estudo, as mesmas envolveram os conceitos de Derivada, Integral e Teorema Fundamental do Cálculo. Entretanto, neste artigo discutimos a tarefa que abordou o cálculo de área de regiões planas para a introdução do conceito de Integral Definida e Integral Definida e que, diferentemente das demais, foi desenvolvida com os estudantes antes da introdução destes conceitos em sala de aula. Com esta tarefa tivemos por objetivo promover uma reflexão e discussão inicial sobre o problema de cálculo de área, para a introdução do conceito Integral Definida, uma vez que a interpretação deste conceito é de grande valia para compreender o conceito de Integração em contextos de aplicação, como por exemplo na Física e Engenharias (WAGNER, 2018; JONES, 2015). De modo geral, trabalhamos com o conceito de cálculo de área de uma região limitada pelo gráfico de uma função e o eixo x em um determinado intervalo, sendo que a tarefa matemática exploratória foi dividida em três momentos.

Primeiramente, trabalhamos com as diferentes possibilidades do cálculo de área de uma região limitada pelo gráfico da função constante e o eixo x em um determinado intervalo (Tarefa 1 – ver Figura 2). Nesta tarefa foi apresentado aos estudantes a representação gráfica da função constante $f(x)$, solicitando que eles identificassem sua lei algébrica e domínio. Posteriormente, pedimos que apresentassem duas maneiras diferentes de se calcular a área da região plana limitada pelo gráfico de $f(x)$ e pelo eixo x no intervalo em que a função estava definida.

Figura 2: Tarefa sobre o cálculo da região limitada pelo gráfico da função constante e o eixo x



Tarefa 1: Considerando o gráfico a seguir:

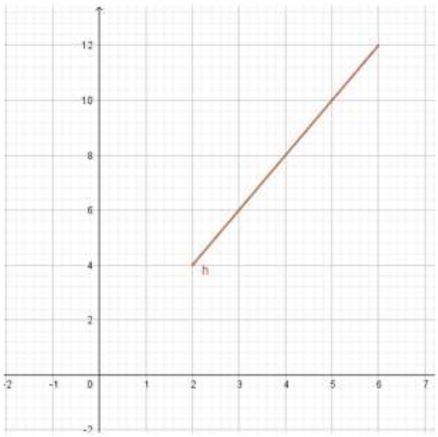
a) Escreva a lei algébrica da função $f(x)$ e o determine o domínio desta função;
b) Calcule a área da figura limitada pelo gráfico da função e pelo eixo x, no intervalo em que a função está definida.
c) Calcule novamente a área da figura descrita no item b, utilizando-se de procedimentos distintos daqueles utilizados no item anterior.

Fonte: Elaborado pelos autores

Na segunda parte (Tarefa 2 – ver Figura 3), tratamos das diferentes maneiras de se calcular a área da região limitada pelo gráfico de uma função linear e o eixo x em um determinado intervalo. Nesta parte da tarefa matemática exploratória foi apresentada aos estudantes a representação gráfica da função $h(x)$ em um determinado intervalo e, em seguida, questionamos quais eram as possíveis maneiras de se determinar a área da região limitada pelo gráfico da função $h(x)$ e pelo eixo x, no intervalo em que a função estava definida.

Figura 3: Tarefa sobre o cálculo da região limitada pelo gráfico da função linear e o eixo *x*

Tarefa 2: Considerando o gráfico da função $h(x) = 2x$, no intervalo de $[2,6]$, a seguir:



a) Calcule a área da figura limitada pelo gráfico da função e pelo eixo x, no intervalo em que a função está definida.
b) Calcule novamente a área da figura descrita no item a, utilizando-se de procedimentos distintos daqueles utilizados no item anterior.

Fonte: Elaborado pelos autores

Finalmente, na terceira parte (Tarefa 3 – ver Figura 4) abordamos a possibilidade de se calcular a área da região limitada pelo gráfico de uma função quadrática e o eixo x em um determinado intervalo, por meio da divisão da região em quatro e oito retângulos, respectivamente, abordando assim, implicitamente, o conceito de Integral Definida para o cálculo de áreas. Solicitamos aos estudantes que construíssem a representação gráfica da função $g(x) = x^2$ em um papel quadriculado, visando facilitar o processo de construção dos retângulos para a determinação da área. Além disso, pedíamos que calculassem a área da figura limitada pelo gráfico da função $g(x)$ no intervalo de $[0, 4]$ e o eixo x, sem sinalizar nenhum tipo de procedimento para este cálculo. Após isso, apresentamos a possibilidade de se calcular a área da figura limitada pelo gráfico da função $g(x)$ no intervalo de $[0, 4]$ e o eixo x, a partir a inserção de retângulos de mesma medida de base abaixo do gráfico da função. A partir disso, questionamos qual era a soma das áreas dos retângulos.

Após calcularem a somatória da área da região limitada pelo gráfico da função $g(x)$ no intervalo de $[0, 4]$ e o eixo x, a partir de quatro e de oito retângulos, questionamos se era possível estabelecer alguma relação entre os procedimentos utilizados e os valores das áreas. Perguntamos, ainda se, a partir dos procedimentos desenvolvidos, seria possível calcular o valor exato da área formada pelo gráfico da função $g(x)$ no intervalo de $[0, 4]$ e o eixo x, e por fim, solicitamos aos estudantes para destacarem o que aconteceria com o número de retângulos necessários para o cálculo de tal área.

Figura 4: Tarefa sobre o cálculo da região limitada pelo gráfico da função quadrática e o eixo *x*

Tarefa 3: Seja g a função definida por $g(x) = x^2$:

a) Construa o gráfico da função g(x) no intervalo [0,4];
b) Descreva um procedimento para determinar a área da figura limitada pelo gráfico da função $g(x) = x^2$ no intervalo [0,4] e o eixo x. Qual o valor da área da figura?
c) Um outro procedimento para o cálculo da área desta figura, constitui-se na inserção de retângulos de mesma medida de base abaixo do gráfico da função. No gráfico construído no item a, insira quatro retângulos, de modo que preencha a figura limitada pelo gráfico da função $g(x)$ no intervalo [0,4] e o eixo x;
d) Determine as medidas da base, da altura e da área de cada retângulo construído no item c:

Retângulo	Base	Altura	Área
Retângulo 1 (R1)			
Retângulo 2 (R2)			
Retângulo 3 (R3)			
Retângulo 4 (R4)			

e) Dando continuidade ao procedimento do item c, calcule agora a soma das áreas dos retângulos R1, R2, R3 e R4, denominando esta soma como S_4. (Dica: escreva o resultado utilizando-se de $S_4 = b_1 \cdot h_1 + b_2 \cdot h_2 + b_3 \cdot h_3 + b_4 \cdot h_4$);
f) Repita o mesmo procedimento desenvolvido nos itens c, d, e, tomando-se agora o número de retângulos igual a 8;
g) Você consegue estabelecer alguma relação entre os procedimentos utilizados para se determinar as medidas das áreas S_4 e S_8?
h) Utilizando-se esse processo de construção de retângulos, seria possível calcular o valor exato da área formada pelo gráfico de g(x) no intervalo [0,4] e o eixo x? Em caso afirmativo, o que aconteceria com os retângulos necessários para calcular a área exata da figura?

Fonte: Elaborado pelos autores

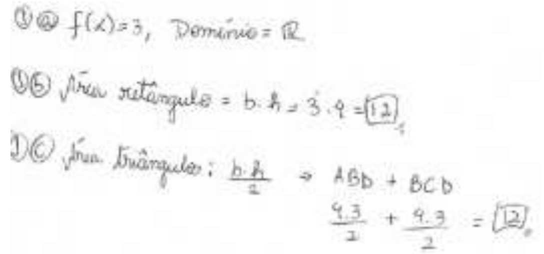
As tarefas matemáticas propiciaram aos estudantes o desenvolvimento de atividades e suas resoluções foram tomadas como protocolos e fonte principal de dados para nossa pesquisa. No entanto, cabe destacar que nos valemos da observação participante durante o trabalho dos estudantes para recolher outros dados, que foram também utilizados para as nossas análises. Logo, os protocolos produzidos pelos estudantes, alinhado às observações recolhidas pelos professores-pesquisadores, foram analisados a partir de um movimento de identificação das oportunidades de aprendizagens dos estudantes ao desenvolverem as tarefas e da forma como tais oportunidades se relacionavam com o ensino exploratório.

Protocolos dos Estudantes e as Oportunidades de Aprendizagem

Aqui apresentamos uma análise das atividades desenvolvidas pelos estudantes a partir das tarefas matemáticas propostas sobre o cálculo de área de regiões planas para a introdução do conceito de Integral Definida. O fato de termos desenvolvido uma tarefa que privilegiava conteúdos vistos anteriormente pelos estudantes na Educação Básica propiciou aos estudantes um bom desempenho durante as tarefas para o cálculo de área, o que será explorado com detalhes ao longo desta seção.

Identificamos que os estudantes facilmente calcularam a área da região delimitada pela representação gráfica da função constante e o eixo x no intervalo $[1,5]$ – um retângulo, multiplicando a medida da base pela medida da altura. Entretanto, ao serem questionados sobre uma maneira diferente de se calcular esta mesma área, alguns estudantes optaram por dividir este retângulo em quadrados de lado igual a uma unidade e calcular a área total, a partir da soma da área de cada um dos quadrados, ou dividir este retângulo em dois triângulos. A dificuldade que prevaleceu nesta tarefa foi a determinação do domínio da função constante, já que os estudantes destacaram o domínio apenas como todos os números reais, ao invés de limitar o intervalo (ver Figura 5).

Figura 5: Protocolos das duplas Ana e Pamela e Henrique e Mikael para a Tarefa 1



Fonte: Dados da pesquisa

Na segunda parte da tarefa (Tarefa 2 – Figura 3), que questionava diferentes maneiras de se calcular a área da região limitada pelo gráfico de uma função linear e o eixo x no intervalo $[2,6]$, os estudantes optaram por desenvolver o cálculo da área, primeiramente dividindo a figura em um retângulo e um triângulo, calculando a área de cada uma dessas figuras e encontrando a área total (área do trapézio), por meio da soma das áreas encontradas. Além disso, outros estudantes desenvolveram diretamente o cálculo por meio da área do trapézio (ver Figura 6).

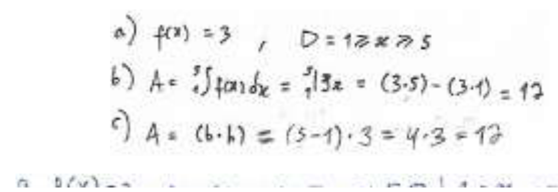
Destacamos que apesar de terem identificado que o quadrilátero presente na região limitada pelo gráfico da função linear e o eixo x no intervalo $[2,6]$ ter lados iguais, apenas duas duplas o nomearam como quadrado, sendo que a maioria das duplas o nomeou de retângulo (ver Figura 6). Acreditamos que isto se deve à apresentação do gráfico da função linear ter sido desenvolvido fora de escala, e neste caso, visualmente, a figura se aproximava de um retângulo.

Figura 6: Protocolos das duplas Guilherme e Fábio e Luan e Ian para Tarefa 2

Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 7, explicitamos o uso do conceito de Integral Definida para o cálculo da área das regiões constituídas pelos gráficos das funções e o eixo *x* das tarefas matemáticas propostas, identificamos que os estudantes utilizaram este conceito para propor uma maneira diferente de se calcular a área. No caso da Tarefa 1, alguns deles calcularam primeiramente a área usando o conceito de Integral Definida e, quando questionados sobre uma nova maneira de se calcular a área, identificaram se tratar de um retângulo e que poderiam calcular a área multiplicando a medida da base pela medida da altura:

Figura 7: Protocolo das duplas Henrique e Mikael e Juliana e Lucas para a Tarefa 1



Fonte: Dados da pesquisa

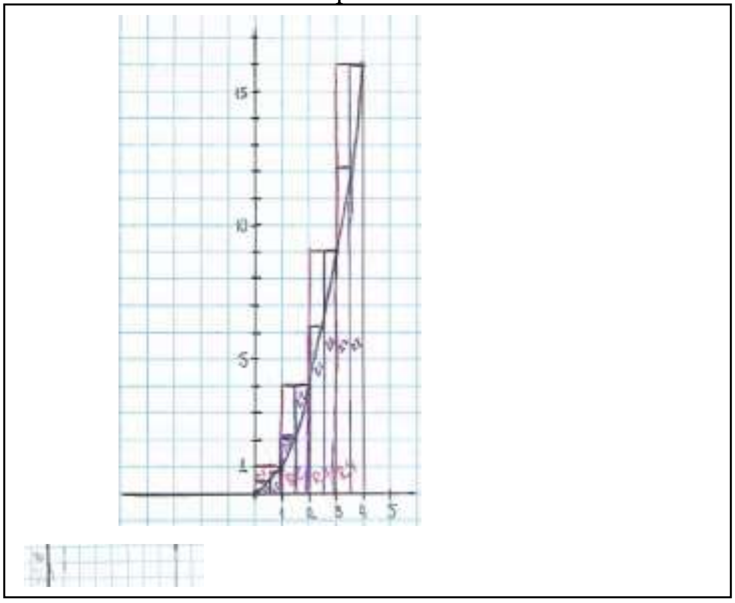
É possível observar este fato também nas Tarefas 2 e 3 (ver Figura 6), em que as duplas optaram por realizar o cálculo aplicando o conceito de Integral Definida. O uso deste conceito para o cálculo de áreas de figuras geométricas planas pode ser creditado ao fato de muitos estudantes já terem cursado a disciplina uma vez ou mais[7], ou seja, já haviam estabelecido algum contato com a aplicação do conceito de Integral Definida para o cálculo de área de regiões planas. Além disso, estando em uma disciplina que aborda este conceito, é compreensível que os estudantes, que já tenham tido contato com o conceito de Integral Definida, o utilizem para resolver uma tarefa como a que foi proposta, mesmo que este ainda

[7] No caso da disciplina de FUV, contexto de nossa investigação, 17 estudantes já haviam cursado esta disciplina pelo menos uma vez.

não tivesse sido abordado em sala de aula.

Tratando especificamente da Tarefa 3, em que apresentamos a possibilidade de se calcular a área da figura limitada pelo gráfico da função quadrática e o eixo x no intervalo de $[0, 4]$, a partir a inserção de retângulos de mesma medida de base abaixo do gráfico da função, na Figura 8 trazemos as construções de duas duplas de estudantes, pois notamos que eles trabalharam com retângulos cujas alturas ultrapassavam o gráfico, fato que traria um valor da medida da área acima do valor da área real:

Figura 8: Esboço do gráfico da função quadrática desenvolvido pelas duplas Isabela e Davi e Heber e Gustavo para a Tarefa 3



Fonte: Dados da pesquisa

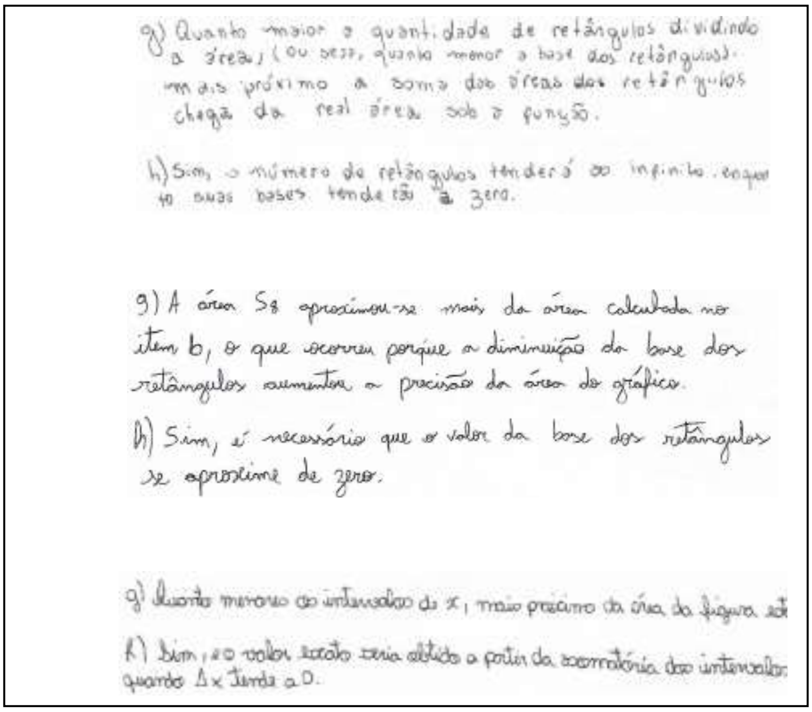
Outro fato que também chamou a atenção na Tarefa 3 foi a dificuldade dos estudantes para a determinação do valor da medida da base dos retângulos, que seriam inseridos abaixo do gráfico da função quadrática. Acreditamos que isto se deve à função fornecida aos estudantes ($g(x) = x^2$) e ao intervalo iniciar em 0, ou seja, o primeiro retângulo teria medida de base igual a 1 e medida da altura igual a 0. Isto também nos ajuda a compreender o fato de alguns estudantes terem optado por inserir retângulos que ultrapassassem o gráfico da função, sendo assim um retângulo com medida de base igual a 1 e medida da altura igual a 1.

Com o desenvolvimento das tarefas, pudemos perceber que parte dos estudantes chegou à compreensão da ideia intuitiva do conceito de Soma de Riemann[8] (Figura 9), percebendo que quanto maior a quantidade de retângulos inseridos abaixo do gráfico de uma

[8] Aqui tratamos o conceito de soma de Riemann como uma soma de “pedaços muito pequenos” ou infinitesimais, de modo que os pedaços infinitesimais são tidos como um produto do valor de alguma função e uma alteração infinitesimal (“muito pequena”) na variável independente da função ao longo de um determinado intervalo de integração. Além disso, assumimos uma função contínua e com valor real de uma única variável.

função, mais próximo se está do valor exato da área da região plana.

Figura 9: Protocolo das duplas Isabela e Davi, Heber e Gustavo e Luan e Ian para os itens g e h da Tarefa 3


g) Quanto maior a quantidade de retângulos dividindo a área, (ou seja, quanto menor a base dos retângulos) mais próximo a soma das áreas dos retângulos chega da real área sob a função.

h) Sim, o número de retângulos tenderá ao infinito enquanto suas bases tenderão a zero.

g) A área S_8 aproximou-se mais da área calculada no item b, o que ocorreu porque a diminuição da base dos retângulos aumentou a precisão da área do gráfico.

h) Sim, é necessário que o valor da base dos retângulos se aproxime de zero.

g) Quanto menores os intervalos de x, mais próximo da área da figura est

h) Sim, o valor exato seria obtido a partir da somatória dos intervalos quando Δx tende a 0.

Fonte: Dados da pesquisa

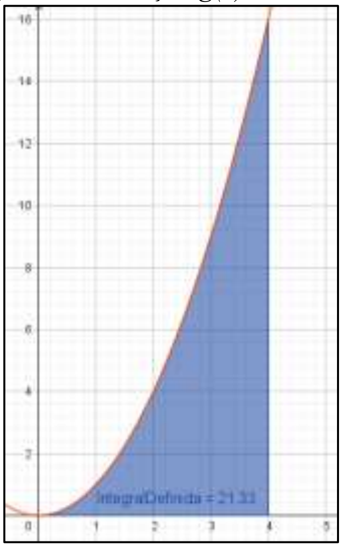
Consideramos que o nível de dificuldade das tarefas matemáticas evoluía à medida que os estudantes avançavam em seu desenvolvimento, de modo a chegar ao cálculo de áreas abaixo do gráfico da função, em que a região plana não tivesse um formato conhecido para o cálculo de área, e necessitariam de outros recursos. Esta estrutura da tarefa reflete o bom desempenho dos estudantes em seu desenvolvimento, tendo em vista as diferentes estratégias corretas de resolução apresentadas pelos estudantes, tanto em relação ao cálculo da área da região que se formava sob a representação gráfica da função constante em um certo intervalo – um retângulo, quanto no que se refere a região abaixo da função linear no intervalo estabelecido.

Diante das análises apresentadas, as quais, em especial, consideraram os momentos em que os estudantes estavam reunidos em duplas, destacamos que *o trabalho com as tarefas matemáticas exploratórias sobre o cálculo de área de regiões planas para a introdução do conceito de Integral Definida permitiu que os estudantes mobilizassem alguns conhecimentos matemáticos prévios* como: (i) o cálculo de área de figuras geométricas planas (retângulo, quadrado, triângulo, trapézio); (ii) a interpretação e construção de representações gráficas das funções constante, linear e quadrática; (iii) determinação do domínio das funções; bem como (iv) o próprio conceito de Integral Definida, que foi utilizado por algumas duplas para os cálculos de área.

Além disso, considerando-se a abordagem de ensino adotada em nosso estudo, após o desenvolvimento das tarefas matemáticas exploratórias com os estudantes trabalhando em duplas, tivemos um momento de discussão coletiva e formalização dos conceitos de Soma de Riemann e Integral Definida em sala de aula. Nesse momento, que ocorreu em outra aula, retomamos a discussão das tarefas com os estudantes, apresentando possíveis soluções para cada uma delas, em especial, discutimos o cálculo da área da região formada pelo gráfico da função quadrática e o eixo *x* no intervalo proposto.

Utilizando o software Geogebra[9], inserimos retângulos abaixo do gráfico de $g(x) = x^2$ no intervalo [0, 4]. Calculamos os valores das áreas para 4, 8, 16, 32, 64, 128, 1024 retângulos (ver Figura 10), discutindo com os estudantes o que estava acontecendo, até que chegássemos à conclusão do problema de área e introduzíssemos o conceito de Integral Definida. Assim, finalmente, calculamos a integral definida $\int_0^4 g(x)\,dx = \int_0^4 x^2\,dx = 21{,}33\ u.a.$

Figura 10: Representação gráfica da função *g(x)* e cálculo da área no intervalo $[0, 4]$



Fonte: Elaborado pelos autores

Voltando nosso olhar para nossa prática, este se mostrou um momento muito rico na disciplina, pois pudemos vivenciar o empenho dos estudantes na participação e discussão, colocando seus pontos de vista e suas estratégias para a resolução das tarefas propostas. Além disso, pudemos identificar a satisfação dos estudantes em relação à metodologia utilizada para a introdução do conceito de Integral Definida, desenvolvida por meio da tarefa introdutória e

[9] O software Geogebra permite por meio de um comando que se calcule a área abaixo de curvas através da inserção de um número definido de retângulos.

posterior discussão em sala de aula, favorecendo a compreensão dos conceitos trabalhados.

Diante dos protocolos dos estudantes e análises apresentadas, podemos dizer que a introdução ao *processo de construção do conceito de Integral Definida por parte dos estudantes, ao trabalharem em um ambiente de ensino exploratório* se deu de forma coletiva e participativa, em que foram privilegiados (i) os conhecimentos anteriores dos estudantes; (ii) o trabalho em grupo; (iii) as discussões coletivas; e (iv) a construção do conhecimento em colaboração com os pares (professores e estudantes).

No que segue trazemos uma articulação dos aspectos enfatizados acima com o referencial teórico que sustenta nossa investigação, finalizando com nossas conclusões, encaminhamentos futuros e sugestões de pesquisa.

Discussão dos Resultados e Conclusões

Ao desenvolver as tarefas matemáticas exploratórias para o cálculo de área de regiões planas (região limitada pelo gráfico de uma função e o eixo x em um determinado intervalo do domínio desta função) tínhamos o intuito de introduzir os conceitos de Soma de Riemann e Integral Definida. Para tal, levamos em consideração: situações distintas para o cálculo de área de uma região limitada pelo gráfico de uma função constante e o eixo x em um determinado intervalo; diferentes possibilidades de se calcular a área da região limitada pelo gráfico de uma função linear e o eixo x em um determinado intervalo; uma situação para se calcular a área da região limitada pelo gráfico de uma função quadrática e o eixo x em um determinado intervalo, utilizando-se da divisão da região em retângulos, com a finalidade de se abordar, implicitamente, o conceito de Integral Definida para o cálculo de áreas de regiões planas e propiciar uma reflexão acerca da ideia intuitiva do conceito de Soma de Riemann.

Podemos considerar que todo o processo realizado ao longo das 4 seções de trabalho, caracterizou-se como oportunidades de aprendizagem para os estudantes (HEYD-METZUYANIM; TABACH; NACHLIELI, 2016) e, ainda que não fosse o foco da pesquisa, oportunidade de aprendizagem também para os professores-pesquisadores (RIBEIRO; PONTE, 2019), uma vez que a introdução ao estudo do conceito de Integral Definida foi caracterizada por um momento de interação entre os estudantes e as tarefas, bem como, pelas discussões ocorridas entre os estudantes, e entre eles e os professores em sala de aula. Como dito acima, tal abordagem também acarretou como uma oportunidade de ressignificação da prática docente para nós, professores-pesquisadores.

A prática de ensino desenvolvida juntos aos estudantes da disciplina de FUV mostrou que a natureza das tarefas matemáticas exploratórias propostas e a abordagem adotada pelos professores conduziu os estudantes a uma nova dinâmica no processo de aprendizagem e propiciou a elaboração de respostas escritas, conjecturas e sistematizações a partir da discussão com os pares (PONTE *et al.*, 2016; JAWORSKI *et al.*, 2016). Logo, salientamos que o uso das tarefas matemáticas e a forma como foram trabalhadas com os estudantes contribuíram para um "percurso de aprendizagem coerente" (PONTE, 2005, p. 18), uma vez que permitiram (i) a construção de conhecimentos matemáticos acerca dos conceitos abordados por parte dos estudantes; (ii) a compreensão dos procedimentos matemáticos; (iii) o domínio parcial das notações e das formas de representação relevantes acerca do conceito de Integral Definida.

Entretanto, dificuldades como as que relatamos ao longo da apresentação dos resultados ocorreram, pois a maioria dos estudantes nunca havia vivenciado este tipo de experiência com tarefas exploratórias. Logo, enfatizamos que, com o passar do tempo, os estudantes evoluem para responder aos questionamentos das tarefas, já que reconhecem que as respostas os ajudam na articulação do que pensam ou do que querem dizer (JAWORSKI *et al.*, 2016).

Além disso, entendemos que as dificuldades dos estudantes, como a ocorrida com a Tarefa 3, quando da determinação do valor da medida da base dos retângulos que seriam inseridos abaixo do gráfico da função quadrática (Figura 9), pode ter sido ocasionada por uma limitação da própria tarefa, a qual, em uma nova versão, poderá indicar um intervalo e/ou uma função distintos dos que foram apresentados. Além disso, consideramos necessário, em uma próxima versão, explorar tanto os retângulos inseridos abaixo do gráfico da função quanto os retângulos cuja altura ultrapassa o limite do gráfico da função, a fim de que os estudantes possam comparar os valores da área em cada situação.

Destacamos, ainda, a importância da discussão do problema de cálculo de área para a introdução e compreensão dos conceitos de soma de Riemann e Integral Definida, uma vez que os estudantes, em sua maioria, privilegiam a abordagem algébrica da Integral Definida em detrimento da abordagem geométrica (WAGNER, 2018). Embora os estudantes estejam familiarizados com a aplicação do conceito de Integral Definida para o cálculo de áreas, utilizando-se da soma de Riemann e de métodos de integração, muitos deles concluem os cursos de Cálculo sem conseguir interpretar a Integral Definida como uma soma (JONES, 2015).

Assim, ao olharmos para a prática de ensino desenvolvida, consideramos a importância da formalização e da sistematização das ideias para a construção do conhecimento, visto que é nesse momento que o estudante elabora uma relação entre os cálculos algébricos desenvolvidos, a representação geométrica e o conceito abordado, culminando na produção de conhecimento acerca do conceito de Integral Definida. Logo, os estudantes se reconhecem como autônomos e responsáveis por sua aprendizagem (TREVISAN; MENDES, 2018).

No entanto, desenvolver uma prática de ensino como a apresentada neste artigo mostra-se como um desafio para os professores do ensino superior, uma vez que as condições reais de ensino nas universidades inviabilizam a realização de um trabalho que privilegie as tendências do ensino de Matemática privilegiadas pelos pesquisadores em Educação Matemática, como o ensino exploratório, a resolução de problemas, a investigação ou a modelagem matemática (RAMOS; TREVISAN; MENDES, 2019).

A título de conclusão, percebemos que o uso de tarefas matemáticas exploratórias, como as que desenvolvemos com os estudantes em nosso estudo, pode colaborar com a construção do conhecimento matemático em relação ao conceito de Integral Definida e introdução do conceito de Soma de Riemann. Creditamos esta construção à forma como estas tarefas foram desenvolvidas e trabalhadas com os estudantes, ao privilegiar um design de tarefa (CHRISTIANSEN; WALTHER, 1986) que buscasse resgatar conhecimentos anteriores dos estudantes, bem como os levassem a construir novos conhecimentos, por meio de tarefas e atividades a serem desenvolvidas, bem como com a discussão em duplas e com os professores.

Com o desenvolvimento deste artigo objetivamos identificar se *o trabalho com as tarefas matemáticas exploratórias sobre o cálculo de área de regiões planas para a introdução do conceito de Integral Definida permitiria aos estudantes a mobilização de conhecimentos matemáticos prévios*. Nossas análises mostraram que os estudantes lançaram mão de conhecimentos construídos na Educação Básica, como: (i) o cálculo de área de figuras geométricas planas; (ii) representação gráfica de diferentes funções; (iii) determinação do domínio das funções; (iv) o próprio conceito de Integral Definida.

Buscamos ainda conhecer e compreender como se deram *os processos de ensino e de aprendizagem do conceito de Integral Definida por parte dos estudantes, ao trabalharem em um ambiente de ensino exploratório*. A análise dos dados revelou que a experiência de ensino propiciou aos estudantes a construção do conhecimento matemático de forma coletiva e participativa, em que foram privilegiados (i) os conhecimentos anteriores dos estudantes; (ii) o trabalho em grupo; (iii) as discussões coletivas; e (iv) a construção do conhecimento em colaboração com os pares (professores e estudantes).

Salientamos, outrossim, que a análise das tarefas matemáticas exploratórias, assim como a vivência, a observação dos pesquisadores durante seu desenvolvimento e a aplicação das tarefas e da própria aula, revelou a necessidade de alguns ajustes, visando evitar novos equívocos e ampliar a abordagem de alguns conceitos, como o conceito de Integral Definida. Além disso, consideramos importante a elaboração de novas tarefas para a validação do conceito de Integral Definida, a discussão do conceito de Integral como soma e uma abordagem das técnicas de integração.

Por fim, enfatizamos que a prática docente que privilegia uma abordagem diferenciada para os processos de ensino e de aprendizagem dos conceitos de CDI, como por exemplo o ensino exploratório, mostra-se como um desafio para os professores do ensino superior e para pesquisadores em Educação Matemática (TREVISAN; MENDES, 2018; HITT; GONZÁLEZ-MARTÍN, 2016). Aspectos relacionados à priorização de ambientes fundamentados no ensino exploratório, que abarque o desenvolvimento de tarefas exploratórias e momentos de reflexão (STEIN *et al.*, 2008), tendo em vista os diferentes fatores que compõem o contexto do ensino superior, como, por exemplo, a quantidade de estudantes em sala de aula e o currículo, bem como questionamentos acerca de como proporcionar experiências formativas que favoreçam aos professores do ensino superior o trabalho com tal abordagem (JAWORSKI *et al.*, 2016), mostram-se como desafio e questões eminentes de pesquisa.

Logo, esperamos com os resultados de nosso estudo apresentados neste artigo, inspirar professores do ensino superior e pesquisadores em Educação Matemática na criação de ambientes de ensino e aprendizagem de CDI baseados no ensino exploratório, visando criar uma possível mudança na dinâmica dos cursos de Cálculo e uma ressignificação da prática docente no ensino superior.

Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), pelo financiamento concedido à primeira autora, por meio de bolsa do Programa Nacional Pós-Doutorado (PNPD).

Referências

BARBOSA, J. C.; OLIVEIRA, A. M. P. Por que a Pesquisa de Desenvolvimento na Educação Matemática? **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande, n. 8, p. 526-546, 2015.

CASTRO, C. M. O ensino médio: órfão de ideias, herdeiro de equívocos. **Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação**, Rio de Janeiro, v. 16, n. 58, p. 113-124, 2008.

CHRISTIANSEN, B.; WALTHER, G. Task and activity. In: CHRISTIANSEN, B.; HOWSON, A. G.; OTTE, M. (Eds.). **Perspectives on mathematics education**. Dordrecht: Reidel, 1986, p. 243-307.

ESTEBAN, M. P. S. **Pesquisa qualitativa em educação**: fundamentos e tradições. Trad. de Miguel Cabrera. Porto Alegre: AMGH, 2010

FARIAS, M. M. do R. **Introdução a noções de cálculo diferencial e integral no ensino médio no contexto das TIC**: implicações para prática do professor que ensina matemática. 2015. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.

HEYD-METZUYANIM, E.; TABACH, M.; NACHLIELI, T. Opportunities for learning given to prospective mathematics teachers: between ritual and explorative instruction. **Journal of Mathematics Teacher Education**, n. 19, p. 547-574, 2016. DOI: https://doi.org/10.1007/s10857-015-9311-1

HITT, F.; GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. Generalization, covariation, functions, and calculus. In: GUTIÉRREZ, Á.; LEDER, G. C.; BOERO, P. (Eds.). **The second handbook of research on the psychology of mathematics education**. Rotterdam: Sense Pubishers, 2016, p. 3-38. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_1

JAWORSKI, B.; MALI, A.; PETROPOULOU, G. Critical theorising from studies of undergraduate mathematics teaching for students' meaning making in mathematics. **International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education**, v. 3, n. 1, p. 168-197, 2016. DOI: 10.1007/s40753-016-0044-z

JONES, S. R. The prevalence of area-under-a-curve and anti-derivative conceptions over Riemann sum-based conceptions in students’ explanations of definite integrals. **International Journal of Mathematics Education in Science and Technology**, v. 46, n. 5, p. 721–736, 2015. DOI: 10.1080/0020739X.2014.1001454

JONES, S. R.; WATSON, K. L. Recommendations for a “Target Understanding” of the Derivative Concept for First-Semester Calculus Teaching and Learning. **International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education**, v. 4, p. 199–227, 2018. DOI: https://doi.org/10.1007/s40753-017-0057-2

MOREIRA, A. F. Modelos na ciência e no ensino de Ciências, **Educação & Tecnologia**, Belo Horizonte, v. 14, n. 3, p. 35-41, set./dez. 2009.

PONCE-CAMPUZANO, J. C. Developing prospective mathematics teachers in Mexico: a lesson on the relationship between integration and differentiation. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 44, n. 7, p. 996-1006, 2013. DOI: 10.1080/0020739X.2013.826386

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005, p. 11-34.

PONTE, J. P. Estudiando el conocimiento y el desarrollo professional del professorado de matemáticas. In: PLANAS, N. (Ed.). **Teoria, crítica y prática de la educación matemática**. Barcelona: Graó, 2012, p. 83-98.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014, p. 13-27.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. A aula de investigação. In: BROCARDO, J., SERRAZINA, L.; ROCHA, I. (Org.). **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. São Paulo: Autêntica, 2013, p. 25-54.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J.; BAPTISTA, M. Exercícios, problemas e explorações: Perspectivas de professoras num estudo de aula. **Quadrante**. Lisboa, v. 24, n. 2, p. 111-134, 2015. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/22628>. Acesso em: 27 jun. 2020.

PONTE, J. P.; CARVALHO, R.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante**. Lisboa, v. 25, n. 2, p. 77-98, 2016.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M.; VELEZ, I. Formação de professores dos primeiros anos em articulação com o contexto de prática de ensino de Matemática. **Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa**, v. 20, n. 1, p.71-94, 2017.

RAMOS, N. S.; TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. Delineamento de tarefas de cálculo diferencial e integral envolvendo sequências numéricas: análise de um processo. **Alexandria**, Florianópolis, v. 12, n. 2, p. 27-49, 2019. DOI: https://doi.org/10.5007/1982-5153.2019v12n2p27

RIBEIRO, A. J.; PAULIN, J. F. V. A Teaching Experience through the use of Tasks: Limits and possibilities for learning Mathematics in a university contexto. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 22, n. 2, p. 67-85, Mar./Abr., 2020. DOI: https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5411

RIBEIRO, A. J.; PONTE, J. P. Professional learning opportunities in a practice-based teacher education program about the concept of function. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 21, n. 2, p. 49-74, 2019. DOI: https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss2id5002

RICHT, A. **Aspectos conceituais e instrumentais do conhecimento da prática do professor de cálculo diferencial e integral no contexto das tecnologias digitais**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M.; HUGHES, E. K. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, n. 10, p. 313-340, 2008.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. Ambientes de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Curitiba, v. 11, n. 1, p. 209-227, 2018. DOI: 10.3895/rbect.v11n1.5702

VERZOSA, D.; GUZON, A. F.; DE LAS PEÑAS, M. L. A. N. Using dynamic tools to develop an understanding of the fundamental ideas of calculus. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 45, n. 2, p. 190-199, 2014. DOI: 10.1080/0020739X.2013.790513

WAGNER, J. F. Students' Obstacles to Using Riemann Sum Interpretations of the Definite Integral. **International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education**. v. 4, p. 327–356, 2018. DOI 10.1007/s40753-017-0060-7

YACKEL, E.; COBB, P.; WOOD, T. Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 22, n. 5, p. 390-408, 1991.

Recebido em: 25 de agosto de 2020
Aprovado em: 28 de outubro de 2020