revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UM ESTUDO SOBRE OS SISTEMAS LINEARES SOB A ÓTICA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2021.10.22.242-266

Gabrielle Nunes dos Santos[1]
Thais Philipsen Grützmann [2]
Maria Arlita da Silveira Soares[3]

Resumo: A presente pesquisa visa investigar como acadêmicos resolvem atividades que envolvam transformações cognitivas de tratamento e conversão, e quais são os registros mobilizados por eles, assim como, elencando quais os métodos escolhidos para a resolução dos sistemas lineares. Para atender o objetivo o texto discorre sobre a teoria dos Registros de Representação Semiótica, aporte teórico da pesquisa. Trata-se de uma pesquisa de caráter qualitativo definida como um estudo de caso. Os participantes dessa pesquisa são acadêmicos dos cursos de Licenciatura em Matemática, Bacharelado e Licenciatura em Física e Ciências Econômicas, que estavam matriculados nas disciplinas de Álgebra Linear I e II no segundo semestre de 2018. Os dados foram produzidos a partir de duas das atividades envolvendo o conteúdo já mencionado. Na análise referente aos Registros de Representação Semiótica as resoluções dos acadêmicos evidenciaram os registros de representação em língua natural, algébrica, matricial e, por último, a gráfica, nesta ordem. Ao analisar os métodos apresentados para a resolução de Sistemas Lineares, identificou-se que em ambas as turmas os métodos escolhidos em maioria foram Substituição e Escalonamento/Eliminação Gaussiana.
Palavras-chave: Sistemas Lineares. Registro de Representação Semiótica. Álgebra Linear. Ensino Superior.

A STUDY ON LINEAR SYSTEMS FROM THE PERSPECTIVE OF SEMIOTIC REPRESENTATION RECORDS

Abstract: This research aims to investigate how academics solve activities that involve cognitive transformations of treatment and conversion and what are the mobilized registers by them, as well as listing which methods are chosen to solve linear systems. To answer the general objective, the text discusses about the theory of Registers of Semiotic Representation, the theoretical basis to the research. This is a qualitative research defined as a case study. The participants in this research are academics from the Mathematics, Physics and Economics Sciences Degree, from Linear Algebra I and II courses in the second half of 2018. The data were produced from two activities involving the content already mentioned. In the analysis regarding the Registers of Semiotic Representation, the resolutions of the academics showed the registers of representation in natural language, algebraic, matrix and finally, the graphic, in that order. By analyzing the methods presented for solving linear systems, it was identified that in both classes the methods chosen were in the majority Substitution and Scaling/Gaussian Elimination.
Keywords: Linear Systems. Register of Semiotic Representation. Linear Algebra. Higher Education.

Introdução

A problemática, expressa neste artigo, teve início no Trabalho de Conclusão de Curso

[1] Mestra em Educação Matemática, Universidade Federal do Pampa. E-mail: gabrielledossantos15@gmail.com - ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3839-4482
[2] Doutora em Educação, Universidade Federal de Pelotas. E-mail: thaisclmd2@gmail.com – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6015-1546
[3]Doutora em Educação nas Ciências, Universidade Federal do Pampa. E-mail: mariasoares@unipampa.edu.br – ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5159-8653

(TCC) da primeira autora, tendo por objetivo analisar os encaminhamentos dados pelos livros-textos de Álgebra Linear do Ensino Superior quanto ao ensino de Sistemas Lineares, Matrizes e Determinantes. A análise seguiu alguns pressupostos da teoria dos Registros de Representação Semiótica (RRS)[4], em particular, as transformações cognitivas de tratamento e conversão. Os livros-texto analisados foram o livro *Álgebra Linear* de José Luiz Boldrini *et al*., 3ª edição, de 1980 (livro A) e o livro *Álgebra linear com aplicaçõe*s de Howard Anton e Chris Rorres, 10ª edição[5], de 2012 (livro B).

Karrer (2006), que também realizou uma pesquisa com livros-texto, destaca que os livros não são a única fonte para o trabalho docente. No entanto, estes assumem um papel de destaque no processo de ensino. Logo, o estudo de livros-texto de Álgebra Linear representa uma forma de pesquisa, que auxiliaria a obtenção de "um referencial para a elaboração de conjecturas com relação ao ensino que está sendo desenvolvido, sem, contudo, ter a pretensão de esgotar as diversas variáveis que possam intervir na prática docente" (KARRER, 2006, p. 62).

Os livros-texto são uma das principais ferramentas utilizadas pelos professores para o planejamento das aulas, bem como dão suporte aos estudantes para o entendimento dos conteúdos (GRANDE, 2006; KARRER, 2006). Entende-se que, a maneira como conceitos são apresentados, nesses materiais, pode influenciar o modo como as transformações cognitivas são propostas aos estudantes e a forma como mobilizam e articulam os registros de representação semiótica, necessários à resolução de problemas. Além disso, considera-se que a análise de como os livros-textos apresentam conceitos matemáticos pode contribuir para identificar e compreender dificuldades geradas no processo de ensino.

Os entendimentos expressos por Karrer (2006) e Grande (2006) a respeito dos livros-texto, e os resultados da investigação de TCC supracitada contribuíram para a primeira autora, deste artigo, decidir a problemática de sua pesquisa de mestrado, a qual teve por objetivo mapear os entendimentos de acadêmicos do Ensino Superior sobre Sistemas Lineares sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica.

Os participantes da produção de dados foram acadêmicos que cursavam as disciplinas de Álgebra Linear I (AL I) e Álgebra Linear II (AL II) no segundo semestre letivo de 2018. Disciplinas que fazem parte da matriz curricular dos cursos de Licenciatura em Matemática. O grupo era constituído por 16 discentes (AL I) e sete discentes (AL II), dentre os quais havia acadêmicos da Licenciatura em Matemática, Licenciatura e Bacharelado em Física e Ciências

[4] Pressupostos dessa teoria serão expostos no próximo tópico do texto.
[5] Optou-se por analisar a 10° ed., pois era a única que foi possível ter acesso à versão impressa.

Econômicas.

Destaca-se que a opção por Sistemas Lineares justifica-se pelo fato deste conteúdo estar presente no currículo matemático da Educação Básica (Ensino Fundamental e Médio) e nos Projetos Pedagógicos de vários cursos do Ensino Superior (Matemática – Bacharelado e Licenciatura, Física, Química, Engenharias, Ciência da Computação). Os Sistemas Lineares estão presentes em componentes curriculares como a Álgebra Linear, que abordam conceitos que serão ensinados pelo futuro professor de Matemática. Nesses componentes é desejável que tais conceitos sejam abordados de modo a proporcionar conhecimento abrangente da Matemática, relacionando aspectos desta com sua construção histórica, suas aplicações, métodos empregados ao longo dos tempos, assim como, as questões percebidas, atualmente, nesta área de conhecimento, como, por exemplo, avanços e desafios (SBEM, 2003).

Neste artigo, apresenta-se um recorte da pesquisa realizada na dissertação citada anteriormente, contendo a análise aprofundada de duas atividades aplicadas aos discentes participantes das turmas de Álgebra Linear, com o objetivo de entender como esses acadêmicos resolvem atividades que envolvam transformações cognitivas de tratamento e conversão, e quais são os registros mobilizados por eles. Assim como, elencar quais os métodos escolhidos para a resolução dos sistemas lineares (escalonamento – eliminação gaussiana; método de Gauss-Jordan; Regra de Cramer; outros).

A teoria dos Registros de Representação Semiótica no contexto da pesquisa

A teoria dos Registros de Representação Semiótica, desenvolvida pelo pesquisador francês Raymond Duval (psicólogo e filósofo), foi sistematizada na obra *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*[6], publicada em 1995. Conforme o autor, "[...] ela visa à modelagem do funcionamento semio-cognitivo que está subjacente ao pensamento matemático. Sem o desenvolvimento deste não podemos nem compreender e nem conduzir uma atividade matemática" (DUVAL, 2013, p. 18).

Segundo Brandt e Moretti (2014, p. 24), a pesquisa de Duval tem contribuído com a área da Educação Matemática, possibilitando "reflexões sobre o funcionamento cognitivo do pensamento humano na aprendizagem matemática", associando os registros de representação semiótica com as atividades de apreensão conceitual.

Duval (2009) classifica as representações de três formas: mentais, computacionais e

[6] "Semiose e pensamento humano: registros semióticos e aprendizado intelectual" (tradução nossa).

semióticas. As representações mentais têm por intuito a objetivação, ou seja, uma expressão particular independente da comunicação, isto é, que não depende da expressão para o outro. No caso das representações computacionais, estas se referem ao tratamento, pois já não podem ser satisfeitas apenas pelas representações mentais. No que confere as representações semióticas, estas "[...] realizam de maneira indissociável, uma função de objetivação e uma função de expressão. Elas realizam de alguma forma uma função de tratamento, porém este tratamento é intencional, função fundamental para a aprendizagem humana" (DAMM, 2012, p. 174).

As representações semióticas são "produções constituídas pelo emprego de sinais (enunciados em língua natural, fórmula algébrica, gráfico, figura geométrica, ...)" (DUVAL, 2009, p. 15), compreendidas, por alguns, como forma de exteriorizar as representações mentais. Ou seja, as representações semióticas seriam "inteiramente subordinadas às representações mentais e contemplariam apenas as funções de comunicação" (DUVAL, 2009, p. 15). No entanto, conforme Duval (2009), além de estas serem essenciais para fins de comunicação, elas também são necessárias para o desenvolvimento de qualquer atividade matemática.

Na Matemática, a importância das representações semióticas se explica pelo fato de que os objetos matemáticos só podem ser acessados através de suas representações semióticas, o que a diferencia das demais áreas, e o modo como se dá a apreensão dos conceitos matemáticos (DUVAL, 2011). Duval (2009, 2011, 2012, 2013) designa como Paradoxo Cognitivo da Matemática o questionamento: Como não confundir o objeto matemático com a sua representação semiótica se só se tem acesso a ele por meio delas? Os números, as funções, as retas, etc., por exemplo, com suas representações, decimais ou fracionárias, simbólicas, gráficas (DUVAL, 2009). Além disso, Duval (2009) destaca que muitas vezes, devido às diferentes representações de um mesmo objeto matemático, os estudantes acabam por não reconhecerem um objeto em uma representação diferente. Os Sistemas Lineares, por exemplo, são definidos como um conjunto de equações lineares (ANTON; RORRES, 2012) e podem ser representados por registros de representação distintos, por exemplo, registro de representação algébrica (equações), registro de representação gráfica (retas e planos), registro de representação matricial (matrizes dos coeficientes).

As dificuldades de aprendizagem resultantes do paradoxo cognitivo do pensamento matemático, para Duval (2012, p. 270, grifos do autor), "se dão pelo fato de que não há *noesis* sem *semiósis*"[7], portanto, enquanto o ensino não considerar essa questão, tais dificuldades permanecerão. Pois, segundo o autor

> [...] existe uma palavra que é ao mesmo tempo, importante e marginalizada em Matemática, é a palavra "representação": ela é frequentemente empregada sob sua forma verbal, "representar". Uma escrita, uma notação, um símbolo, representam um objeto matemático: um conjunto, uma função, um vetor [...] o que significa dizer que os objetos matemáticos não devem ser confundidos com suas representações. Toda confusão implicará uma perda de compreensão e, consequentemente, os conhecimentos adquiridos se tornam inutilizáveis no seu contexto de aprendizagem (DUVAL, 1993 *apud* HENRIQUES; ALMOULOUD, 2016, p. 467).

Para a aprendizagem matemática é necessário, primeiramente, que haja a diferenciação entre o objeto matemático ensinado e sua representação, como também, reconhecer a importância dos diferentes registros e como mobilizá-los para representar/ensinar estes (HENRIQUES; ALMOULOUD, 2016).

A atividade matemática, para Duval (2009, 2012, 2013), é constituída por dois tipos de transformações, a saber: tratamento e conversão. Atualmente, o autor chama essas transformações de "gestos intelectuais específicos em qualquer atividade matemática" (DUVAL, 2013, p. 16). "Um tratamento é uma *transformação de representação interna a um registro* de representação ou a um sistema" (DUVAL, 2009, p. 57, grifos do autor), no qual cada registro de representação possui regras específicas a serem seguidas para a realização do tratamento. "A conversão é então uma *transformação externa em relação ao registro de representação de partida*" (DUVAL, 2009, p. 58-59, grifos do autor), ou seja, há uma mudança da representação de partida, para uma representação em outro registro (HENRIQUES; ALMOULOUD, 2016), o registro de chegada.

No que tange ao estudo dos Sistemas Lineares, Abrantes, Morais e Barros (2018) afirmam que, além do registro da língua natural, outros dois registros são considerados importantes, o registro algébrico e o registro gráfico. Assim como, é necessário que se saiba realizar a conversão de um Sistema de Equações Lineares no registro de representação algébrica para o registro de representação gráfica e a recíproca, importantes para a compreensão do conteúdo.

É importante que na realização de uma atividade matemática, o discente possa e consiga mobilizar diferentes registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural), bem como, saiba qual registro pode ser utilizado para que o

[7] Entende-se nas palavras de Duval (2009, p. 15, *grifos do autor*) que, "*semiósis* é a apreensão ou produção de uma representação semiótica, e *noésis* os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto".

tratamento envolva um número reduzido de etapas e a atividade seja resolvida (DUVAL, 2012). Pois, segundo o autor, compreender um conceito do ponto de vista cognitivo é "reconhecer o mesmo objeto em diferentes representações semióticas que podem ser feitas a partir dele, [...] substituir uma dada representação semiótica por outra representação semiótica útil para um tratamento" (DUVAL, 2013, p. 20).

Para isso, a conversão é considerada fundamental para esse processo de compreensão cognitiva. No entanto, segundo Duval (2013), ela é negligenciada no ensino de Matemática, e quando é utilizada há o privilégio de apenas um sentido de conversão (KARRER, 2006).

Álgebra Linear e Registros de Representação Semiótica: apresentando algumas pesquisas sobre o assunto

Com intuito de aprofundar os conhecimentos sobre o processo de ensino e aprendizagem de Sistemas Lineares, em especial, no componente curricular de Álgebra Linear foi realizado um mapeamento de pesquisas na área de Educação Matemática que abordaram conceitos desse componente sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica, aporte teórico das investigações conduzidas pela primeira autora, deste texto (TCC e dissertação). O mapeamento foi realizado na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações[8] utilizando como recorte temporal os últimos 15 anos, e tendo como descritores: 1° Registros de Representação Semiótica; 2° Matemática; e, 3° Álgebra Linear, resultando em oito dissertações e quatro teses. A partir do mapeamento dois grupos de pesquisa foram identificados: os relacionados a Educação Básica; e, os referentes ao Ensino Superior.

Pode-se aferir que o conteúdo Sistemas Lineares no contexto da Educação Básica, especificamente, no Ensino Médio, foi o mais abordado nas pesquisas mapeadas, pois, dentre às cinco dissertações realizadas no contexto da Educação Básica, identificadas no mapeamento, todas abordavam esse conteúdo, o que revela a preocupação dos pesquisadores com as dificuldades de aprendizagem desse conceito. Pantoja (2008), Jordão (2011), Freitas (2013) e Boemo (2015) desenvolveram sequências didáticas abordando diferentes RRS, em especial, registro gráfico de sistemas de ordem 2x2 e 3x3 e as transformações cognitivas: tratamento e conversão. O escalonamento foi o método de resolução de Sistemas Lineares explorado nas sequências de ensino. Já as pesquisas de Battaglioli (2008) e Boemo (2015) se atentaram em realizar a análise dos livros didáticos de modo a verificar como o conceito de

[8] Disponível em: http://bdtd.ibict.br/vufind/.

Sistemas Lineares é proposto nesses materiais e como são mobilizados os RRS nos exemplos e atividades. As pesquisadoras Battaglioli (2008) e Boemo (2015) constataram que há ênfase ao registro algébrico, sendo os outros registros, por exemplo, o gráfico pouco explorado, além de ser priorizado o ensino de algoritmos como a Regra de Cramer.

No que diz respeito às pesquisas realizadas no âmbito do Ensino Superior (GRANDE, 2006; FRANÇA, 2007; ANDRADE, 2010; KARRER, 2006; CARDOSO, 2014; KRIPKA, 2018), essas tratam de conceitos como transformações lineares, vetores, base, dependência e independência linear. Grande (2006) lança um olhar sobre os livros-texto de Álgebra Linear no que tange ao ensino de dependência e independência linear, investigando se os livros utilizam-se dos RRS e exploram as transformações cognitivas: tratamento e conversão. Este estudo permitiu ao autor inferir que, nas seções destinadas a abordar noções de dependência e independência linear há uma escassez da abordagem de alguns registros de representação, à saber: geométrico e registro em língua natural. Também, verificou a pouca abordagem de conversões nas atividades propostas pelos livros.

França (2007) propõe e aplica uma sequência didática, baseada na teoria dos RRS, com discentes de um curso de Licenciatura em Matemática, sobre vetores e coordenadas, dependência linear, base e transformações lineares. No decorrer da pesquisa, França (2007) constatou a facilidade na mobilização do registro de representação algébrica, bem como um domínio mais amplo das representações gráficas, algébrica e geométrica, realizando as conversões em ambos os sentidos. O trabalho com o *software*, segundo a autora, contribuiu para a elaboração de conjecturas, a validação experimental das hipóteses e estratégias levantadas durante a resolução das atividades devido ao uso de diferentes ferramentas do *software* dinâmico.

Andrade (2010) explora as potencialidades de uma sequência didática sobre vetores linearmente dependentes com discentes de um curso de Licenciatura em Matemática EaD, produzindo e utilizando um *software* para auxiliar nesse processo. O protótipo de *software* criado possui características de *software* colaborativo de geometria dinâmica com ferramentas específicas para a aprendizagem de vetores, dependentes ou independentes, sendo possível a manipulação direta dos vetores e de botões de adicionar e multiplicar os vetores por escalares, por exemplo. A análise do protótipo mostrou que o uso desse sistema favoreceu a compreensão informal dos objetos e a pesquisadora identificou que os acadêmicos possuíam dificuldades referentes à manipulação das representações dos objetos e à comunicação necessária para a aprendizagem no contexto da Educação a Distância (EAD).

Referente às teses, Karrer (2006) desenvolveu, com um grupo de acadêmicos do curso de Engenharia da Computação, uma sequência de ensino para a aprendizagem de transformações lineares, destacando a articulação entre geometria e álgebra. Realizando, também, uma análise de livros-texto de Álgebra Linear para embasar sua sequência. Durante a aplicação da sequência de ensino, Karrer (2006) verificou que o uso de tecnologias digitais e as atividades propostas proporcionaram aos acadêmicos a ampliação do conhecimento sobre transformações lineares, além de ampliar o domínio das representações semióticas e a realização de conversões.

Lino (2014) realizou um estudo teórico sobre transformações geométricas, tendo como finalidade trazer uma concepção ampla desse conteúdo, assim como, uma visão geométrica com uma nova organização destas transformações, com o intuito de significar o estudo das mesmas. Como conclusão de sua pesquisa a autora destaca que através dela foi possível compreender as transformações geométricas e "apresentá-las em um estudo desde as séries iniciais com dobraduras até o ensino superior" (LINO, 2014, p. 8).

Cardoso (2014) investigou as contribuições do uso da metodologia de vídeos didáticos no ensino de conceitos da Álgebra Linear. Para tanto, trabalhou com duas turmas do Ensino Superior, em uma delas foram realizadas aulas expositivas-dialogadas seguindo o cronograma presente no plano de ensino e em outra foram inseridos o uso de vídeos didáticos, utilizando a proposta de aulas reversas[9]. A teoria dos RRS foi utilizada para a realização da análise dos exercícios resolvidos presentes em cinco livros didáticos de Álgebra Linear. O autor pode verificar que em alguns conceitos de Álgebra Linear as atividades que envolvem conversões são poucas, a exemplo, no ensino de espaços vetoriais. Também, foi identificado que o registro de representação mais utilizado foi o simbólico-algébrico e os menos utilizados foram simbólico-matricial, geométrico-figural e gráfico. Com relação às considerações sobre a análise das aulas, percebeu-se que o método das aulas reversas contribui com a aproximação entre os acadêmicos e o professor, com isso, facilitou a conceitualização dos conceitos abordados.

Kripka (2018) buscou identificar as potencialidades e fragilidades percebidas pelos discentes e pela docente de Álgebra Linear sobre o uso de recursos tecnológicos digitais nas tarefas propostas. Participaram do estudo três turmas de Álgebra Linear do curso de Engenharia Civil, destas, duas fizeram uso de recursos tecnológicos em todas as tarefas e uma

[9] Nessa metodologia, o professor grava previamente todo o curso, dividindo-o em vídeos digitais de, no máximo, 5 minutos e, semanalmente, indica aos estudantes quais vídeos deverão ser assistidos e quais as páginas do livro-texto devem ser lidas para as aulas da próxima semana. Nas aulas presenciais, o professor fornece listas de exercícios e discute com os estudantes as possíveis dúvidas e a resolução dos exercícios propostos (CARDOSO, 2014, p. 105).

utilizou tais recursos em apenas uma tarefa. Um dos pontos levantados pela autora diz respeito à dificuldade dos discentes em expressar-se utilizando o registro de língua natural, pois faltava no momento da escrita clareza ao relatar os procedimentos utilizados e nas justificativas para as respostas apresentadas. O uso dos recursos tecnológicos digitais influenciou nos momentos de aprendizagem, pois exigiam que os estudantes tivessem o entendimento necessário sobre o objeto de estudo para transitar entre os diferentes registros semióticos (KRIPKA, 2018).

O mapeamento realizado possibilitou concluir que a maioria das pesquisas, em ambos os contextos, evidenciam e expõem a importância da mobilização dos registros de representação semiótica no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de Álgebra e as potencialidades da utilização de recursos tecnológicos digitais nesse processo, pois estes auxiliam no trabalho com diversos registros de representação de um mesmo objeto, bem como permitem a visualização no registro de representação gráfico de alguns conceitos (vetores, planos, transformações lineares, dentre outros).

Algumas lacunas, identificadas nas pesquisadas mapeadas, podem ser apontadas, tais como: a falta de estudos sobre outros conteúdos a serem abordados na Educação Básica, por exemplo, vetores e transformações lineares; e, o número restrito de pesquisas no Ensino Superior, preocupadas com os livros-textos presentes das bibliografias básicas das disciplinas de Álgebra Linear. Ademais, ressalta-se a necessidade de pesquisas sobre conteúdos de Álgebra Linear tendo como participantes da pesquisa futuros professores de Matemática, dos sete trabalhos mapeados apenas França (2007) realizou um trabalho com acadêmicos de licenciatura em Matemática.

Opções metodológicas

A pesquisa seguiu uma abordagem qualitativa, pois segundo Borba e Araújo (2004), este tipo de metodologia é utilizado por estudos que visam analisar a percepção, através do trabalho com discursos e linguagens, para aqueles que priorizam entender, interpretar e problematizar os dados obtidos, e não apenas expô-los quantitativamente.

O estudo foi realizado em uma universidade federal, os participantes da pesquisa foram os acadêmicos que estavam cursando as disciplinas de Álgebra Linear I (AL I) e Álgebra Linear II (AL II), no segundo semestre letivo de 2018, sendo 16 acadêmicos da disciplina de Álgebra Linear I e sete de Álgebra Linear II[10]. A participação dos discentes se deu de maneira voluntária, os quais assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, autorizando o uso de seus dados. A produção dos dados se deu pela realização de nove atividades sobre Sistemas Lineares que foram escolhidas a partir dos dados obtidos no mapeamento de pesquisas sobre o tema e a partir dos dados resultantes do TCC da primeira autora. Os objetivos e as justificativas para as escolhas das atividades são descritos a seguir.

A atividade 5 teve por finalidade verificar como os acadêmicos resolvem atividades que envolvam o registro de representação gráfica e o registro de representação numérica. A escolha dessa atividade se deu pelo fato de que durante a pesquisa de TCC da pesquisadora foram identificadas poucas atividades com esta ênfase, tendo por registro de partida o registro de representação gráfica, por exemplo. O propósito da questão 8 foi verificar quais os métodos escolhidos para a resolução dos Sistemas Lineares: escalonamento ou eliminação gaussiana; método de Gauss-Jordan; Regra de Cramer; outros.

A análise do material produzido foi realizada seguindo as ideias de Bardin (2004) referente à metodologia de Análise de Conteúdo, que conforme a autora é

> [...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 2004, p. 42).

Nesta investigação, as comunicações analisadas são as resoluções escritas das atividades realizadas pelos acadêmicos participantes da pesquisa, aqui intitulados protocolos dos discentes, que constituem o seu corpus[11].

Posteriormente, foi efetuada a exploração do material presente nos protocolos. Esta etapa compreendeu a análise, codificação ou enumeração dos dados obtidos, separando-os por meio das categorias de análise definidas. Trata-se da etapa mais cansativa e trabalhosa, exigindo interpretação das resoluções e das respostas dos acadêmicos (BARDIN, 2004).

Dando seguimento à análise os dados obtidos, por meio dos protocolos dos discentes das turmas, foram organizados em tabelas (separadas por atividade) e as resoluções classificadas como satisfatória, parcialmente satisfatória, equivocada, nula e em branco, baseado na análise exposta em Boemo (2015). Para tanto, foram elaboradas as categorias de

---

[10] De modo a preservar a identidade de cada um dos participantes desta pesquisa, cada discente está sendo representado por uma letra do alfabeto, das letras A até P tratam-se dos acadêmicos da turma de Álgebra Linear I e de Q ao X os acadêmicos da turma de Álgebra Linear II.

[11] "O corpus é o conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos" (BARDIN, 2004, p. 96).

análise. Estas categorias estão descritas na sequência, definidas conforme as atividades propostas e o objetivo de cada uma delas.

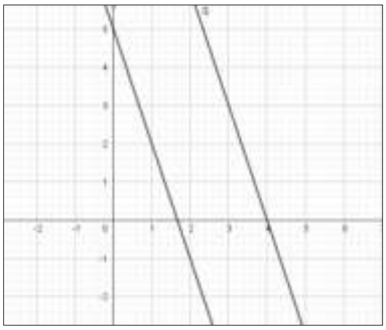
As atividades que serão foco de discussão, deste texto, são a 5 e a 8, conforme já mencionado. A escolha destas atividades se deu pelo fato de que durante a pesquisa de Trabalho de Conclusão de Curso da pesquisadora e nas pesquisas mapeadas - Boemo (2015) e Karrer (2006) - foram identificadas poucas atividades com esta ênfase, tendo por registro de partida o registro de representação gráfica, por exemplo. Entende-se como registro de partida a representação em que a atividade é apresentada, inicialmente, havendo a conversão para uma representação em outro registro, o registro de chegada (DUVAL, 2009).

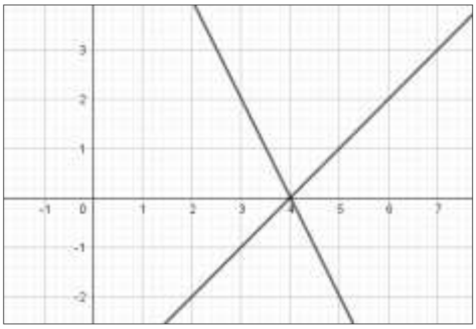
Análise e discussão dos resultados

Nesta seção são apresentadas a análise e discussão das atividades e suas resoluções. Iniciando pela atividade 5 (Quadro 1), a qual teve por finalidade verificar como os acadêmicos resolvem atividades que envolvam o registro de representação gráfica e o registro de representação numérica.

Quadro 1: Atividade 5

5. Determine o sistema linear e encontre a solução quando possível, justifique sua resposta

a) 

b) 

c) A reta a: passa pelos pontos (3, 1) (2, 2) e a reta b: passa pelos pontos (0, 4) (5, – 1).

d) A reta a: passa pelos pontos (1, 4) (2, 2) e a reta b: passa pelos pontos (5, 4) (3, 2).

Fonte: Elaboração da autora, 2019.

A Tabela 1 contém os dados quantitativos das resoluções da atividade 5 dos discentes da turma de Álgebra Linear I. A simbologia (→) indica que houve uma conversão da representação do objeto em questão.

Tabela 1: Análise da resolução atividade 5, turma de Álgebra Linear I

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	--	--	--
Parcialmente Satisfatória	RG→RLN; RN→RLN	2	12,50%
Equivocada	RG→RA, RN→RA, RN→RG	4	25,00%
Nula	--	--	--
Em branco	--	10	62,50%
Total de respostas		16	100%

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL I.

Para considerar uma resposta como satisfatória esta teria que conter, para cada Sistema Linear, a sua classificação e, para aqueles que possuíssem solução, apresentá-la. Havia a possibilidade de os discentes realizarem a interpretação da representação gráfica, como também, aos que preferissem, realizar a conversão para a representação algébrica e recorrer a um método conhecido para a resolução de sistemas. Com isso, esperavam-se como possíveis interpretações:

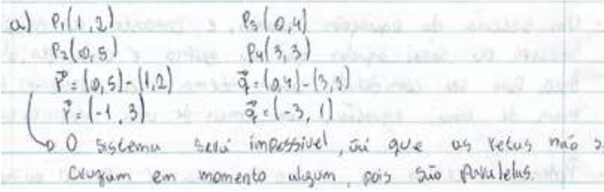
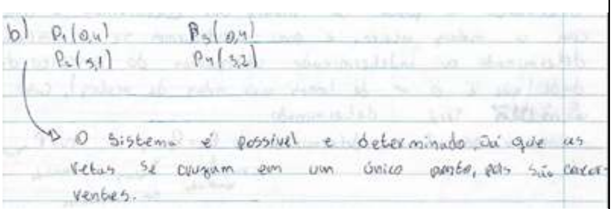
Tabela 2: Resolução da atividade 5

Representação Gráfica	Tipo de sistema	Sistema Linear	Solução do sistema (x,y)
Retas paralelas	Sistema impossível	$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$	
Retas concorrentes	Sistema possível e determinado	$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ -x + y = -4 \end{cases}$	$(4,0)$
Retas coincidentes	Sistema possível e indeterminado	$\{-x - y = -4$	$(x, 4 - x)$
Retas concorrentes	Sistema possível e determinado	$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$	$\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Fonte: Elaboração da autora, 2019.

A resolução do acadêmico L (Quadro 2) foi identificada como parcialmente satisfatória, tendo em vista que realizou a metade da atividade, pois não lembrou como determinar a equação da reta, conhecidos dois pontos. Dito isto, ao analisar a sua resolução, nota-se que ele optou por realizar a interpretação da atividade seguindo algumas noções referentes ao ensino de vetores (linearmente dependentes ou independentes), com isso, foi possível descrever, em linguagem natural, o comportamento das retas que representam estes Sistemas Lineares, a fim de aferir se os mesmos possuíam solução ou não.

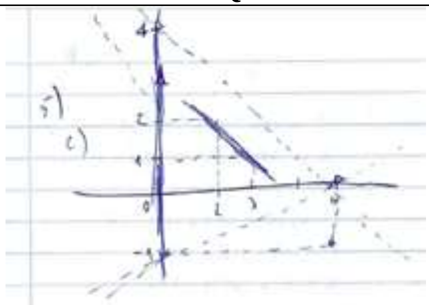
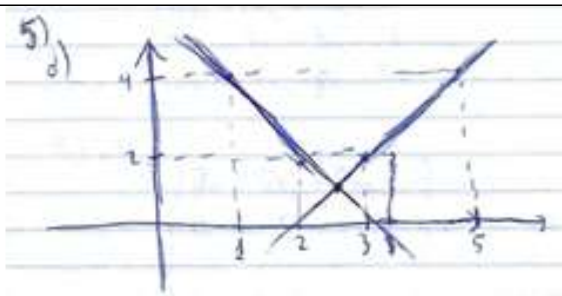
Quadro 2: Resolução do discente L da atividade 5

 Transcrição $P_1(1{,}2)$ $\quad$ $P_3(0{,}4)$ $P_2(0{,}5)$ $\quad$ $P_4(3{,}3)$ $a)$ $\vec{r} = (0{,}5) - (1{,}2)$ $\quad$ $\vec{q} = (0{,}4) - (3{,}3)$ $\vec{r} = (-1{,}3)$ $\quad$ $\vec{q} = (-3{,}1)$ O sistema será impossível, já que as retas não se cruzam em momento alguma, pois são paralelas.	 Transcrição $b)$ $P_1(0{,}4)$ $\quad$ $P_3(0{,}4)$ $P_2(5{,}1)$ $\quad$ $P_3(3{,}2)$ O sistema é impossível e determinado, já que as retas se cruzam em um único ponto, pois são concorrentes.

Fonte: Protocolo do discente L da turma AL I.

Em contrapartida, o discente P (Quadro 3) optou por efetuar a conversão da representação numérica para a representação gráfica, cabe ressaltar que esta foi a única resolução deste tipo.

Quadro 3: Resolução do discente P da atividade 5

Fonte: Protocolo do discente P da turma AL I.

Esta resolução (Quadro 3) foi classificada como equivocada, pois, o acadêmico realizou de maneira correta apenas uma parte da atividade. Foi possível perceber que na letra (c) há um equívoco na conversão da representação numérica para a gráfica, nos pontos da segunda reta (a reta b passa pelos pontos $(\mathbf{0},\ \mathbf{4}), (\mathbf{5},\ -\mathbf{1})$). Note, no Quadro 3, que o mesmo plotou três retas, uma passando pelos pontos $(\mathbf{0}, -\mathbf{1}), (\mathbf{5}, \mathbf{0})$ e outra pelos pontos $(\mathbf{0}, \mathbf{4}), (\mathbf{5}, \mathbf{0})$, o que revela uma confusão durante a conversão das representações em sistemas semióticos diferentes.

Salienta-se que, por ser o único acadêmico a apresentar uma resolução gráfica entre 16 participantes, é possível que o número reduzido de atividades existentes nos livros-texto possa ter influenciado nestes resultados, por isso a importância da inserção de atividades deste tipo, que possibilitem a conversão entre registros de representação.

Na Tabela 3 estão dispostas as informações quantitativas das resoluções da atividade 5 dos acadêmicos da turma de Álgebra Linear II.

Tabela 3: Análise da resolução atividade 5 turma de Álgebra Linear II

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	RG→RA, RN→RA	2	28,57%
Parcialmente Satisfatória	RG→RA, RN→RA	2	28,57%
Equivocada	RG→RM,RN→RM, RN→RG	2	28,57%
Nula	--	--	--
Em branco	--	1	14,28%
Total de respostas		7	100%

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL II.

As resoluções aferidas como satisfatórias continham as classificações dos Sistemas Lineares, além das respostas, estarem corretas. Neste caso, os discentes optaram por realizar a interpretação da representação gráfica e a conversão para a representação algébrica e usar um método de resolução nas demais. Um exemplo dos procedimentos escolhidos pelos acadêmicos pode ser observado no Quadro 4, o qual apresenta a resolução do acadêmico T.

Quadro 4: Resolução do discente T da atividade 5

Transcrição

5- a) A solução será a interseção das retas. Porém, não existe solução já que as retas são paralelas.

b) A solução será $x = 4$ e$y = 0$, já que o ponto (4,0) é a interseção das duas retas.

c) reta a $\begin{cases} 1 = 3c_1 + d_1 \ (1) \\ 2 = 2c_1 + d_1 \ (2) \end{cases}$

$(1) - (2)$

$$1 - 2 = 3c_1 - 2c_1 + d_1 - d_1$$

$c_1 = -1$, em (2):

$$2 = -2 + d_1 \Rightarrow d_1 = 4$$

$$a: y = -x + 4$$

reta b $\begin{cases} 4 = d_2 \\ 5 = -c_2 + d_2 \end{cases}$

$$5 = -c_2 + 4 \Rightarrow c_2 = -1$$

Transcrição

d) a $\begin{cases} 4 = c_1 + d_1 \ (1) \\ 2 = 2c_1 + d_1 \ (2) \end{cases}$

$(1) - (2)$

$$4 - 2 = c_1 - 2c_1 + d_1 - d_1$$

$2 = -c_1$, $c_1 = -2$ em (2):

$$4 = -2 + d_1 \Rightarrow d_1 = 6$$

$$a: y = -2x + 6$$

b $\begin{cases} 4 = 5c_2 + d_2 \ (3) \\ 2 = 3c_2 + d_2 \ (4) \end{cases}$

$(3) - (4)$

$$4 - 2 = 5c_2 - 3c_2 + d_2 - d_2$$

$2 = 2c_2$, $c_2 = 1$ em (4):

$$2 = 3 + d_2 \Rightarrow d_2 = -1$$

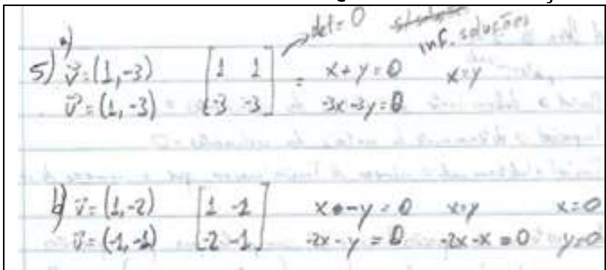
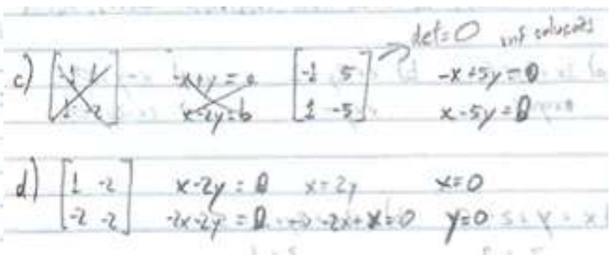
$$b: y = x - 1$$

$b: y = -x + 4$ As soluções são infinitas, pois as retas são coincidentes.	$\begin{cases} y + 2x = 6 \ \ (5) \\ y - x = 1 \ \ (6) \end{cases}$ $(5) - (6)$ $2x + x = 6 + 1$ $3x = 7 \qquad x = \frac{7}{3}$ Em (6) $y = \frac{7}{3} - 1 \quad y = \frac{7}{3} - \frac{3}{3} \quad y = \frac{4}{3}$ A solução é o par $(x, y) = (\frac{7}{3}, \frac{4}{3})$

Fonte: Protocolo do discente T da turma AL II.

As resoluções consideradas equivocadas apresentavam erros com relação à conversão entre representações, acarretando a resolução incorreta da atividade, caso do discente V, que optou pelo método de Cramer para a realização desta atividade. O uso deste método e a maneira como foram explorados os resultados obtidos através dele demonstram a influência da abordagem das resoluções de Sistemas Lineares na Educação básica apresentada por Battaglioli (2008) em que é priorizado o ensino de algoritmos como a Regra de Cramer, para a solução de um Sistema Linear, não explorando o significado do resultado obtido.

Quadro 5: Resolução do discente V da atividade 5

 Transcrição 5) a) $\vec{v} = (1, -3) \quad \vec{u} = (1, -3)$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \ det = 0 \quad \begin{matrix} x + y = 0 \\ -3x - 3y = 0 \end{matrix}$ inf. Soluções b)) $\vec{v} = (1, -2) \quad \vec{u} = (-1, -1)$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x - y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = y \\ -2x - x = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$	 Transcrição c) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \ det = 0 \quad \begin{matrix} -x + 5y = 0 \\ x - 5y = 0 \end{matrix}$ inf. Soluções d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x - 2y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 2y \\ -2x - x = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$

Fonte: Protocolo do discente V da turma AL II.

Na resolução percebem-se as limitações do uso da Regra de Cramer como método de resolução de Sistemas Lineares, já que a mesma só pode determinar a solução nos casos em que o determinante da matriz for diferente de zero, ou seja, possui uma única solução. Se o determinante for igual à zero, determina-se que, ou o sistema é impossível (SI), ou é possível e indeterminado (SPI), não sendo possível, através deste método, afirmar, exatamente, qual é seu tipo (BATTAGLIOLI, 2008).

Por exemplo, no Quadro 5, nas letras (a) e (c) o determinante da matriz de coeficientes é zero, logo o discente classificou-os como sistemas com infinitas soluções. No entanto, na letra (a), o sistema dado não possui solução, o que poderia ter sido contornado se o acadêmico recorre-se a representação gráfica disponível na atividade, verificando que se tratava de retas paralelas, logo o sistema é impossível.

Em sua maioria, os acadêmicos optaram por utilizar os registros de representação algébrica e matricial para a resolução desta atividade, tratam-se dos registros aos quais eles estão mais habituados em mobilizar quando o assunto é Sistemas Lineares, pois recorrem a regras predefinidas para a resolução dos sistemas. No entanto, o tratamento, nesses dois registros, gera um custo cognitivo desnecessário que poderia ser facilitado pelo uso do registro gráfico.

Para complementar é preciso mencionar que mesmo os acadêmicos avançando nas componentes curriculares alguns erros conceituais permanecem, talvez, porque as representações enfatizadas e suas articulações sejam limitadas, assim como, o uso do método de Cramer, ensinado na Educação Básica, ainda esteja presente e enraizado no imaginário dos acadêmicos.

Em relação à atividade 8 (Quadro 6), esta tinha o propósito de verificar quais os métodos escolhidos para a resolução dos Sistemas Lineares: escalonamento ou eliminação gaussiana; método de Gauss-Jordan; Regra de Cramer; outros.

Quadro 6: Atividade 8

8. Resolva o seguinte Sistema de Equações Lineares, utilizando dois métodos de resolução.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = a} \\ \boldsymbol{2x_1 + 2x_3 = b} \\ \boldsymbol{3x_2 + 3x_3 = c} \end{cases}$$

Fonte: Elaboração da autora, 2019.

Na Tabela 4 estão expostas as informações quantitativas das classificações das resoluções dos acadêmicos da turma de Álgebra Linear I, assim como, os registros de representação mobilizados.

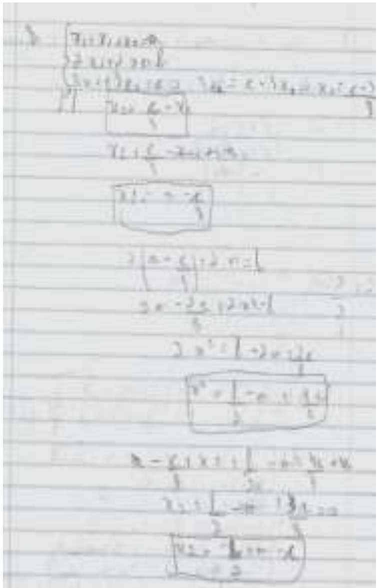
Tabela 4: Análise da resolução atividade 8, turma de Álgebra Linear I

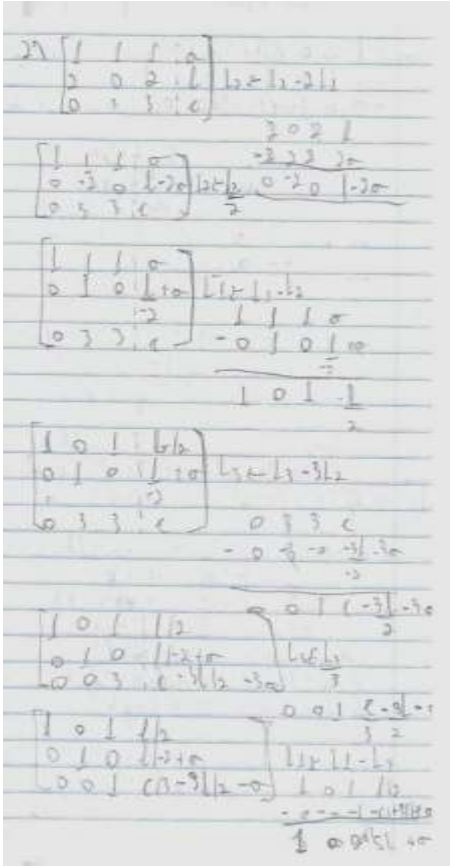
Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	--	--	--
Parcialmente Satisfatória	RA, RA→RM, RM→RA	1	6,25%
Equivocada	RA, RA→RM, RM→RA	9	56,25%
Nula	--	2	12,50%
Em branco	--	4	25,00%
Total de respostas		16	100%

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL I.

Para ser classificada como satisfatória a resolução deveria recorrer a dois métodos distintos de resolução, conforme apresentados anteriormente, e conter a solução correta do Sistema Linear, em ambos os casos, o que não ocorreu na turma de Álgebra Linear I. Já a considerada parcialmente satisfatória utilizou dois métodos distintos para a resolução do sistema, porém não encontrou as soluções corretas, por erros cometidos na finalização da atividade, nos quais o discente realizou a simplificação das respostas de forma errada, como mostra a resolução do acadêmico B (Quadro 7).

Quadro 7: Resolução do discente B da atividade 8

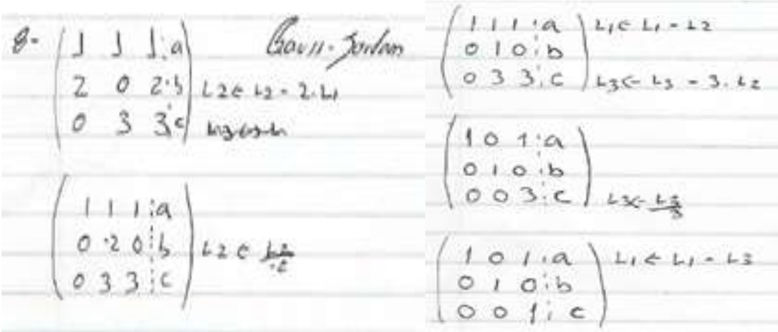
	Transcrição
	1° $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + 2x_3 = b \\ 3x_2 + 3x_3 = c \end{cases} \Rightarrow 3x_2 = c - 3x_3 \Rightarrow x_2 = \frac{c-3x_3}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{c}{3} - x_3$ $x_1 = -\frac{c}{3} + x_3 - x_3 + a$ $x_1 = -\frac{c}{3} + a$ $2\left(a - \frac{c}{3}\right) + 2x_3 = b$ $2a - \frac{2c}{3} + 2x_3 = b$ $2x_3 = b - 2a + \frac{2c}{3}$ $x_3 = \frac{b}{2} - a + \frac{4c}{3}$ $x_2 = a + \frac{c}{3} - a - \frac{b}{2} + a - \frac{4c}{3}$ $x_2 = -\frac{b}{2} + a - c$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Transcrição
2° $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ 2 & 0 & 2 & b\\ 0 & 3 & 3 & c\end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & b-2a\\ 0 & 3 & 3 & c\end{array}\right) L_2 \leftarrow \frac{L_2}{-2}$
$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b}{2}+a\\ 0 & 3 & 3 & c\end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - L_2$
$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & \frac{b}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b}{2}+a\\ 0 & 3 & 3 & c\end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$
$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & \frac{b}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b}{2}+a\\ 0 & 0 & 3 & c+\frac{3b}{2}-3a\end{array}\right) L_3 \leftarrow \frac{L_3}{3}$
$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & \frac{b}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b}{2}+a\\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{3}+\frac{b}{2}-a\end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - L_3$
$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & \frac{c}{3}+5b+a\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b}{2}+a\\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{3}+\frac{9b}{2}-a\end{array}\right)$
</td>
</tr>
</table>

Fonte: Protocolo do discente B da turma AL I.

As resoluções realizadas de maneira equivocada consistiam em realizar a solução do Sistema Linear proposto utilizando apenas um método e, também, encontrando a solução errada. Além disso, outro tipo de equívoco foi percebido, como no caso do discente D (Quadro 8), o qual realizou operações entre linhas na matriz de coeficientes do sistema, não realizando estas operações também na coluna de termos independentes.

Quadro 8: Resolução do discente D da atividade 8

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
Transcrição
8- Gauss-Jordan
$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ 2 & 0 & 2 & b\\ 0 & 3 & 3 & c\end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & b\\ 0 & 3 & 3 & c\end{array}\right) L_2 \leftarrow \frac{L_2}{-2}$
$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 1 & 0 & b\\ 0 & 3 & 3 & c\end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}$
</td>
</tr>
</table>

	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 3 & c \end{array}\right) L_3 \leftarrow \frac{L_3}{3}$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

Fonte: Protocolo do discente D da turma AL I.

O tipo de resolução considerada nula, nesta turma, é o caso do discente J, que apenas reescreveu o sistema apresentado e não realizou a atividade, e do acadêmico N, que reescreveu o Sistema Linear substituindo as letras que representavam os valores independentes, por números inteiros, não realizando o solicitado na atividade.

Os métodos escolhidos pelos discentes da turma de Álgebra Linear I (considerando os acadêmicos que realizaram a atividades, somente dez, somando resoluções parcialmente satisfatórias e equivocadas) para realizar a atividade foram: Substituição, Escalonamento e Gauss-Jordan, dos quais dois dos discentes recorreram como um dos métodos a Substituição, seis o Escalonamento, um os métodos de Substituição e Escalonamento e um acadêmico o método de Gauss-Jordan.

Na Tabela 5 estão descritos os dados quantitativos das classificações das resoluções dos acadêmicos da turma de Álgebra Linear II, assim como, os registros de representação mobilizados.

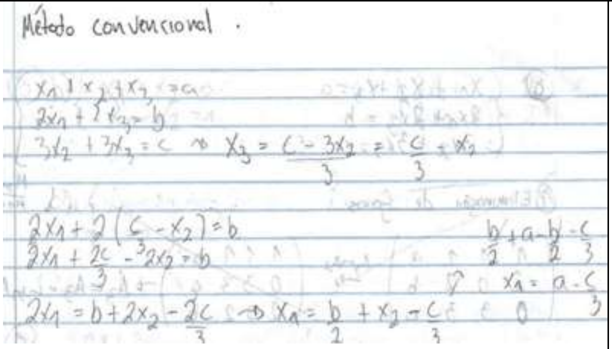
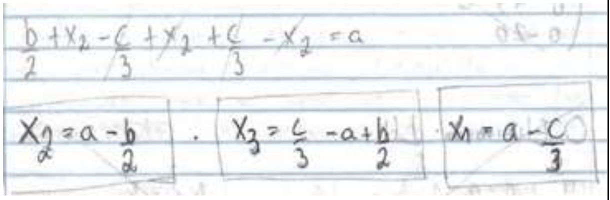
Tabela 5: Análise da resolução atividade 8, turma de Álgebra Linear II

Resolução	Registros Mobilizados	Quantidade	Percentual
Satisfatória	--	--	
Parcialmente Satisfatória	RA→RM, RM→RA, RLN	4	57,14%
Equivocada	RA→RM, RM→RA, RLN	2	28,57%
Nula	RA→RM, RM→RA, RLN	1	14,29%
Em branco	--	--	--
Total de respostas		7	100%

Fonte: Elaboração da autora, 2019, com base nos protocolos dos discentes da turma de AL II.

Para que as resoluções fossem classificadas como satisfatórias deveriam apresentar solução correta do Sistema Linear por dois métodos distintos de resolução, em ambos os casos, o que também não ocorreu na turma de Álgebra Linear II. Já as consideradas parcialmente satisfatórias utilizaram dois métodos distintos para a resolução do sistema, conforme solicitado, porém não encontraram as soluções corretas, apresentando erros na finalização, realizando a simplificação das respostas de forma errada. Um exemplo pode ser visto na resolução do discente U (Quadro 9).

Quadro 9: Resolução do discente U da atividade 8

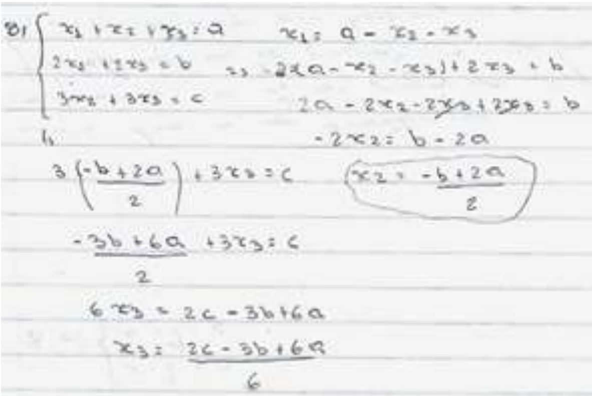
 Transcrição Método Convencional $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + 2x_3 = b \\ 3x_2 + 3x_3 = c \end{cases} \Rightarrow x_3 = \frac{c - 3x_2}{3} = \frac{c}{3} - x_2$ $2x_1 + 2(\frac{c}{3} - x_2) = b$ $2x_1 + \frac{2c}{3} - 2x_2 = b$ $2x_1 = b - \frac{2c}{3} + 2x_2 \rightarrow x_1 = \frac{b}{2} + x_2 - \frac{c}{3}$ $\frac{b}{2} + a - \frac{b}{2} - \frac{c}{3} \quad x_1 = a - \frac{c}{3}$	 Transcrição $\frac{b}{2} + x_2 - \frac{c}{3} + x_2 + \frac{c}{3} - x_2 = a$ $x_2 = a - \frac{b}{2} \qquad x_3 = \frac{c}{3} - a + \frac{b}{2} \qquad x_1 = a - \frac{c}{3}$

Fonte: Protocolo do discente U da turma AL II.

Para resolução correta da atividade, os valores de $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$, e $\boldsymbol{x_3}$ são, respectivamente, $\boldsymbol{\frac{3a-c}{3}}$, $\boldsymbol{\frac{2a-b}{2}}$, $\boldsymbol{\frac{-6a+3b+2c}{6}}$, no entanto, a maioria dos discentes, equivocadamente, realizou a simplificação das frações. Cabe ressaltar que, a simplificação de uma fração pode ser realizada se houver uma multiplicação de fatores no numerador e não uma adição ou subtração, como era o caso.

As resoluções classificadas como equivocadas consistiam na realização da atividade utilizando apenas um método e, também, encontrando a solução incompleta e com alguns erros, como no caso do acadêmico S (Quadro 10), que não escreveu o valor de $\boldsymbol{x_1}$, e cometeu um erro de sinais em $\boldsymbol{x_3}$.

Quadro 10: Resolução do discente S da atividade 8



Transcrição

$$8)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + 2x_3 = b \\ 3x_2 + 3x_3 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= a - x_2 - x_3 \\ 2(a - x_2 - x_3) + 2x_3 &= b \\ 2a - 2x_2 - 2x_3 + 2x_3 &= b \\ -2x_2 &= b - 2a \\ x_2 &= \frac{-b + 2a}{2} \end{aligned}$$

$$3\left(\frac{-b + 2a}{2}\right) + 3x_3 = c$$

$$\frac{-3b + 6a}{2} + 3x_3 = c$$

$$6x_3 = c - 3b + 6a$$

$$x_3 = \frac{2c - 3b + 6a}{6}$$

Fonte: Protocolo do discente S da turma AL II.

Na resolução classificada como nula, o discente X escreveu os métodos que utilizaria, substituição e escalonamento, mas não realizou a atividade.

Os métodos escolhidos pelos discentes da turma de Álgebra Linear II (levando em consideração os acadêmicos que realizaram a atividades, somente seis, somando resoluções parcialmente satisfatórias e equivocadas) para realizar a atividade foram: Substituição, Regra de Cramer e Escalonamento/Eliminação Gaussiana, dos quais um dos discentes recorreu apenas a Substituição como método, um somente a Regra de Cramer, um a Substituição e a Regra de Cramer, três a Substituição e o Escalonamento/Eliminação Gaussiana.

Considerando os métodos escolhidos, pelos discentes de ambas as turmas, evidencia-se que entre os métodos utilizados de maneira expressiva estão Substituição e Escalonamento/Eliminação Gaussiana. O primeiro envolvendo tratamento no registro de representação algébrica e o segundo podendo ser realizado o tratamento no registro de representação algébrica e, também, no registro de representação matricial, sendo este último o utilizado pelos discentes participantes desta pesquisa.

Para Prado e Bianchini (2018), no que tange a resolução de Sistemas Lineares, prioriza-se o ensino através de "operações elementares, escalonamento, que deve ser justificado! E, quando possível fazer o uso de representações geométricas e software de geometria dinâmica para visualizar o efeito de cada operação sobre a solução do sistema" (PRADO; BIANCHINI, 2018, p. 87). Assim, o ensino de Sistemas Lineares não estaria restrito apenas a mera aplicação e reprodução de métodos de resolução sem justificativa. Bem como, é importante a realização da discussão das limitações de cada método, como apontado por Lima (2001 *apud* CHIARI; FREITAS, 2018), por exemplo, se fosse necessária à resolução de um Sistema Linear composto por vinte equações e vinte incógnitas, o uso da Regra de Cramer demandaria mais tempo que o uso do método do escalonamento para obter a solução do sistema.

Para isso, o uso da programação dos métodos numéricos para a resolução de Sistemas Lineares, seria uma maneira de verificar as potencialidades e limitações dos métodos, assim como, compreenderem as ligações entre os métodos estudados em Álgebra Linear e revisitados no Cálculo Numérico, relacionando as discussões elaboradas nestes dois componentes curriculares, integrando a Álgebra Linear e a programação. Os softwares, por exemplo, podem ser utilizados para facilitar a resolução de sistemas, pois através da programação, pode-se organizar um algoritmo para sua resolução, agilizando o processo e potencializando o trabalho com as várias representações matemáticas (numérica, algébrica e gráfica).

Considerações Finais

Este texto apresentou um recorte da pesquisa realizada na dissertação da autora, contendo a análise aprofundada de duas atividades aplicadas aos discentes participantes das turmas de Álgebra Linear, e teve como objetivo entender como esses acadêmicos resolvem atividades que envolvam transformações cognitivas de tratamento e conversão, e quais são os registros mobilizados por eles. Assim como, elencar quais os métodos escolhidos para a resolução dos sistemas lineares.

Referente à análise dos registros de representação semiótica as resoluções dos acadêmicos da turma de Álgebra Linear I focaram-se nos registros de representação, primeiro, registro de representação em língua natural, segundo, registro de representação algébrica, terceiro, registro de representação matricial e por último, registro de representação gráfica.

Com relação aos movimentos de tratamento e conversão, notou-se afinidade e escolha por tratamentos nos registros de representação algébrica e matricial, sobre as conversões estas foram realizadas nos sentidos RG→RLN, RN→RLN, RG→RA, RN→RA, RN→RG. Na turma de Álgebra Linear II as resoluções dos discentes mobilizavam os registros de representação, em língua natural, algébrica, matricial e gráfica, nessa ordem de intensidade. Referente ao tratamento e a conversão, os tratamentos foram efetuados nos registros de representação algébrica e matricial, já as conversões foram realizadas nos sentidos RG→RA, RN→RA, RG→RM, RN→RM, RN→RG, RF→RA→RM.

Como visto, na análise das resoluções das atividades, em ambas as turmas o registro de representação gráfica foi o menos mobilizado pelos acadêmicos. Para Abrantes, Morais e Barros (2018), é importante que no ensino de Sistemas Lineares haja ênfase para o registro de representação algébrica e para o registro de representação gráfica. Assim como, é necessário que se saiba realizar a conversão de um Sistema de Equações Lineares no registro de representação algébrica para o registro de representação gráfica, assim como, a recíproca é importante para compreensão desse conteúdo (ABRANTES; MORAIS; BARROS, 2018).

Ao analisar os métodos apresentados para a resolução de Sistemas Lineares, identificou-se que, em ambas as turmas, os métodos escolhidos, em maioria, foram Substituição e Escalonamento/Eliminação Gaussiana. O que corrobora com as indicações de Prado e Bianchini (2018), no que tange a resolução de Sistemas Lineares, pois prioriza-se o ensino da mesma através de operações elementares entre linhas, o escalonamento.

Referências

ABRANTES, W. G. B.; MORAIS, T. M. R.; BARROS, L. G. C. de. Um olhar sobre a face oculta dos Registros de Representação Semiótica envolvendo Sistemas Lineares. In: **VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática** – Foz do Iguaçu, Paraná, 2018. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII_SIPEM/paper/view/654/455. Acesso em: 15 mar. 2019.

ANDRADE, J. P. G. **Vetores:** Interações à distância para a aprendizagem de Álgebra Linear. 2010. 125 f. Dissertação (Mestrado Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra linear com aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2004.

BATTAGLIOLI, C. S. M. **Sistemas Lineares na segunda série do Ensino Médio:** Um olhar sobre os livros didáticos. 113 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BOEMO, M. S. **Registros de Representação Semiótica mobilizados no estudo de Sistemas Lineares no ensino médio.** 2015. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

BORBA, M. de C. ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2004.

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. O Cenário da Pesquisa no Campo da Educação Matemática à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. In: **Perspectivas da Educação Matemática.** Campo Grande: UFMS, v. 7, n. 13, p. 22-37, 2014. Disponível em: http://seer.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/488/361. Acesso em: 06 fev. 2019.

CARDOSO, V. C. **Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear:** uma discussão acerca de aulas Tradicionais, Reversas e de Vídeos Digitais. 2014. Tese (Doutorado Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

CHIARI, A. S. de S.; FREITAS, J. L. M. de. O uso do escalonamento como ferramenta para resolução de Sistemas Lineares no Ensino Médio. In: BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. **Álgebra Linear sob o ponto de vista da Educação Matemática.** São Paulo: Livraria da Física, 2018.

DAMM, R. F. Registros de Representação. In: MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática:** uma introdução. São Paulo. EDUC, p. 167-188, 2012.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, v. 5, p. 35-65, 1993 Disponível em: http://numerisation.univ-irem.fr/ST/IST93004/IST93004.pdf Acesso: 21 de maio de 2020.

DUVAL, R. **Semióses e pensamento humano:** registro semiótico e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat**: Florianópolis (SC), v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266. Acesso em: 12 abr. 2018.

DUVAL, R. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 2, n. 3, jul./dez. 2013. Disponível em: http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/view/963. Acesso em: 15 maio 2017.

FRANÇA, M. V. D. de. **Conceitos fundamentais de Álgebra Linear**: uma abordagem integrando Geometria Dinâmica. 2007. 140 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

FREITAS, N. A. de. **Sistemas de Equações Lineares:** uma proposta de atividades de diferentes abordagens de Registros de Representação Semiótica. 2013. 180 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

GRANDE, A. L. **O conceito de Independência e Dependência e os Registros de Representação Semiótica nos Livros didáticos de Álgebra Linear.** 2006. 208 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência & Educação**, Bauru, vol. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

JORDÃO, A. L. I. **Um estudo sobra a Resolução Algébrica e Gráfica de Sistemas Lineares 3×3 no 2° ano do Ensino Médio.** 2011. 193 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

KARRER, M. **Articulação entre Álgebra Linear e Geometria:** Um estudo sobre as Transformações Lineares na perspectiva dos Registros de Representação Semiótica. 2006. 435 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

KRIPKA, R. M. L. Uso de Tecnologias Digitais no ensino e na aprendizagem de Álgebra Linear na perspectiva das teorias da Aprendizagem Significativa e dos Registros de Representação Semiótica. 2018. Tese (Doutorado em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018.

LINO, E. P. **As Transformações Geométricas em um jogo interativo entre quadros:** Um estudo teórico. 2014. 114 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

PANTOJA, L. F. L. **A conversão de Registros de Representação Semiótica no Estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares**. 2008. 102 f. Dissertação (Mestrado de Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.

PRADO, E. de A.; BIANCHINI, B. L. A Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática. In: BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. **Álgebra Linear sob o ponto de vista da Educação Matemática.** São Paulo: Livraria da Física, 2018.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (SBEM). **Subsídios para a Discussão de Propostas para os Cursos de Licenciatura em Matemática:** Uma contribuição da Sociedade Brasileira de Matemática. São Paulo, 2003, 43 p. Disponível em: https://www.academia.edu/4256113/SUBS%C3%8DDIOS_PARA_A_DISCUSS%C3%83O_DE_PROPOSTAS_PARA_OS_CURSOS_DE_LICENCIATURA?auto=download. Acesso em: 06 set. 2019.

Recebido em: 26 de maio de 2021
Aprovado em: 04 de julho de 2021