revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
10 ANOS

SOMATÓRIOS: ONDE E COMO SÃO ABORDADOS?

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.24.395-420

Ágda Talita Galvão[1]
Jocemar de Quadros Chagas[2]

Resumo: O tema central deste trabalho é o uso da simbologia de somatórios no ensino, incluindo sua interpretação e propriedades. Aceitamos a premissa que, em geral, estudantes se sentem desconfortáveis em realizar manipulações algébricas ou resolver problemas onde a notação Sigma está presente. Com o objetivo de auxiliar docentes a mediar com propriedade o aprendizado referente ao tema e suas aplicações, apresentamos um levantamento de "quando" e "como" a notação de somatório é inserida no Ensino Médio e no Ensino Superior nos cursos de licenciatura em matemática. Como resultado de tal levantamento, percebemos que, normalmente, em nenhum momento a notação de somatório é objeto explícito de estudo, o que pode justificar a premissa aceita. Concluímos com as sugestões de que: (i) em algum momento de sua formação inicial ou continuada, professores e professoras de matemática realizem estudos detalhados de notação e propriedades dos somatórios visando melhorar sua própria compreensão sobre o tema; (ii) cada turma de estudantes do Ensino Médio tenha, em algum momento, pelo menos uma aula dedicada ao estudo e compreensão da notação Sigma para somatórios. Adicionalmente, apontamos referências nas quais a teoria de somatórios clássicos (com uma quantidade finita de termos) é apresentada de forma estruturada e concisa. Indicamos ainda uma proposta de módulo didático que pode ser aplicada no Ensino Médio.
Palavras-chave: Aritmética. Formação Inicial do Professor. Formação Continuada do Professor.

SUMMATIONS: WHERE AND HOW ARE THEY APPROACHED?

Abstract: The central theme of this work is the use of summation symbology in teaching, including its interpretation and properties. We accept the premise that, in general, students feel uncomfortable in performing algebraic manipulations and solving problems where the Sigma notation is present. Aiming to help teachers mediate the learning related to this topic and its applications, we present a survey of "when" and "how" the notation of summation is present in secondary education and higher education in the degree courses in mathematics. As a result of this survey, we realized that, in general, at no time is the notation of summation an explicit object of study. This fact can justify the accepted premise. We conclude with the suggestion that: (i) at some point in their initial or continuing education, mathematics teachers carry out detailed studies of the notation and the properties of summation to improve their understanding of the subject; (ii) each class of high school students has, at some point, at least one lesson dedicated to the study and understanding of Sigma notation for sums. Additionally, we point out some references to find structured and concise classical summation theory (with a finite amount of terms). We also indicate one didactic module applicable in high school.
Keywords: Arithmetic. Initial Teacher Education. Continuing Teacher Education.

Introdução

Neste artigo investigamos a forma que a simbologia de *somatório* (utilizada para

[1] Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG). Professora na Rede Estadual de Educação do Paraná (SEED-PR) E-mail: agdatg@gmail.com - Orcid: https://orcid.org/0000-0003-0791-4481
[2] Doutor em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), na Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG). Ponta Grossa-PR, Brasil. E-mail: jocemarchagas@uepg.br - Orcid: https://orcid.org/0000-0001-6828-3340

cc BY NC ND

sucintamente representar um dos conceitos mais básicos da matemática: a soma) se encontra inserida na Educação Básica, e no Ensino Superior especificamente nos cursos de licenciatura em matemática, e em quais momentos tal simbologia é inserida. Buscamos entender o que motiva a dificuldade geralmente encontrada por estudantes dos mais diversos níveis de ensino quando precisam manipular somatórios. Tal dificuldade é abordada em Ozkan (2015) e está relatada, por exemplo, em Cargnin (2016), onde se estuda a compreensão pelos estudantes do conceito de integral definida.

A conjuntura exposta neste artigo pode ser enriquecida com a leitura da dissertação indicada na referência Galvão (2020), onde da Seção 3 até a Seção 5, concisamente, e cada vez com um acréscimo no nível de dificuldade em relação ao contexto anterior, são expostas as teorias que nos auxiliam a manipular e calcular somatórios. Tais teorias podem ser vistas com mais detalhes, por exemplo, nas referências Graham (1994) para somatórios finitos; Matos (2017) para séries numéricas e de funções; e Müller (2011) ou Galvão (2021) para as recentemente introduzidas somas finitas fracionárias. Como suplemento, indicamos um módulo didático, proposto por Galvão (2020) no Apêndice B de sua dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Tal módulo didático foi desenvolvido com o intuito de prover subsídios a professore(a)s de matemática que auxiliem a apresentar para suas turmas de estudantes a notação Sigma para somatórios de uma maneira estruturada, contribuindo para desmistificar seu uso.

Acreditamos que um estudo sobre somatórios, mais aprofundado em relação ao grau de dificuldade que terá que ensinar, é recomendável a todo(a) professor(a) de matemática, em atuação ou em formação. Apresentamos neste texto uma contribuição inicial à busca do atendimento a este objetivo, especificamente, o mapeamento de “onde” e “como” a notação de somatório aparece na Educação Básica e no Ensino Superior nos cursos de licenciatura em matemática. Esperamos que, com o passar do tempo, esta pequena contribuição possa refletir na prática de um grande número de professore(a)s de matemática, promovendo a desenvoltura de cada vez mais estudantes na manipulação de somatórios.

Este artigo está estruturado como segue: na Seção “Falemos de somas” fazemos uma breve introdução histórica à notação Sigma, utilizada para denotarmos somas longas de uma forma concisa e elegante.

Na Seção “Somas na Educação Básica” apresentamos um mapeamento de “onde” a notação de somatório pode ser inserida nos conteúdos básicos constantes nos documentos que orientam a execução da Educação Básica, e de “como” de fato tal notação parece ser abordada em sala de aula, com base em 5 coleções de livros didáticos amplamente utilizadas.

Na seção "Somas no Ensino Superior: inserções em cursos de licenciatura em matemática" apresentamos as possibilidades de inserção da notação de somatório nas disciplinas constantes em duas propostas de estruturação de currículos para estes cursos: uma apresentada pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) em 2015, outra pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) em 2003. Além disso, mapeamos o currículo vigente em dois cursos de licenciatura em matemática, pontuando disciplinas onde a notação de somatório pode/necessita ser abordada/utilizada, bem como a disposição destas disciplinas na grade curricular.

Na seção "Uma proposta de módulo didático" indicamos uma proposta de módulo didático, adaptada de Galvão (2020), com o intuito de prover subsídios a professore(a)s de matemática para apresentar a notação Sigma de uma forma estruturada a seus alunos e alunas.

Por fim, em "Considerações finais", apresentamos nossas preocupações quanto à apresentação da notação Sigma para o(a)s estudantes, bem como indicamos que todo(a) professor(a) de matemática, em algum momento de sua formação inicial e/ou continuada, possa realizar um estudo aprofundado acerca das possibilidades de uso da notação de somatório, bem como de suas propriedades.

Falemos de somas

Iniciamos do ponto mais básico da matemática que conseguimos pensar: falando de quantidades, de contagem e de soma.

Desde pequenos, as primeiras noções de matemática com as quais nos deparamos são as de quantidades e de números. Logo em seguida (ou até imediatamente) somos apresentados às ideias de juntar e de acrescentar quantidades, base do conceito de *soma* ou *adição*.

Assim como na escola o sinal usado para indicar uma soma é um dos primeiros com que tomamos contato, o sinal conhecido como "mais" (+) foi um dos primeiros sinais matemáticos a aparecer registrado na escrita. Entretanto, a notação com a qual uma soma é representada nem sempre foi escrita com o símbolo que usamos hoje. O sinal de adição ("+" e os símbolos que o precederam) não foi utilizado inicialmente em operações algébricas, mas em matemática financeira. Os primeiros registros desse sinal mostram que ele era inicialmente usado para simbolizar excesso em operações comerciais. Como comenta Tahan (1973, p. 31):

> [...] o sinal "mais" era denotado pela letra *p* que era a primeira letra da palavra

Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, PR, Brasil,
v.11, n.24, p.395-420, jan.-abr. 2022.

> em latim "*plus*" que tem como significado "está em excesso". Com o passar dos anos e com as transformações da escrita na Matemática a letra *p* tomou a forma de cruz, e ingressou, em caráter permanente, nos setores da Matemática.

Assim como a maior parte dos demais símbolos matemáticos, o sinal de adição usado hoje é resultado de um processo histórico de evolução construído por inúmeras pessoas. De acordo com Garbi (2006, p. 453):

> Os sinais de soma e subtração $+$ e $-$ surgiram na Alemanha, por volta de 1480. Manuscritos da época, ainda existentes, produzidos por autores alemães desconhecidos, já os contêm. Apareceram impressos pela primeira vez em 1489, em uma aritmética comercial de Johann Widmann (1460 -1526). Michael Stifel (1487 – 1567) é considerado seu grande popularizador. É provável que $+$ seja uma abreviação do Latim "*et*" e $-$ uma forma da letra "m", de "*minus*".

Ainda sobre a origem dos símbolos, "é possível que Widmann tenha colhido as ideias de "$+$" e "$-$" dos homens que trabalhavam no comércio, pois o fato de ter usado esses símbolos como se fossem amplamente conhecidos aponta para a possibilidade" (TAHAN, 1973, p. 31). Certamente demorou algum tempo antes de esses símbolos serem universalmente adotados, contudo é notável que os mesmos, que surgiram há menos de 5 séculos, se tornaram tão importantes para linguagem matemática, que hoje são amplamente usados.

A partir da compreensão básica da operação de adição, podemos ser levados ao entendimento de inúmeros outros conceitos matemáticos, possibilitando a descoberta de resultados decorrentes das mais complexas operações matemáticas. Porém quanto mais complexas as situações estudadas, mais elas levarão a somas maiores e mais demoradas, que podem ter um número muito grande (e até infinito) de parcelas. Por isso se fez necessário introduzir uma forma abreviada para expressar somas de muitos números, de forma que ainda as possamos manipulá-las. Atualmente, podemos recorrer à notação de somatório para representar de forma condensada uma soma com uma quantidade específica qualquer de termos.

A notação que usamos para representar um somatório, usando o símbolo $\sum$, nos permite escrever uma soma longa em uma expressão curta. Referimo-nos a esta forma de denotar um somatório como *notação Sigma*, pois "Euler estabeleceu a notação de somatório que usamos hoje, usando Sigma, uma letra grega maiúscula, para simbolizar a soma." (ROSA, 2012, p. 259). A origem deste símbolo é também explanada por Cajori (1993, p. 61):

> O sinal de somatório é devido a Euler (1755), que diz: "*summam indicabimus signo* $\sum$", ou seja, $\sum$ indica o sinal de soma. Este símbolo foi utilizado por Lagrange, mas, de resto, recebeu pouca atenção durante o século décimo oitavo. O $\sum$ para expressar a soma ocorre novamente em 1829 na Teoria do

Calor de Fourier, publicada em 1822, e em funções elípticas de Jacobi de 1829. Cauchy utilizou três índices m, n, r, como em

$$\sum_{m}^{n} r \quad f r .$$

Por ser uma notação compacta, elegante, e por ter propriedades que facilitam operações algébricas, a notação Sigma para somatórios é muito importante em vários campos da matemática, bem como em outras áreas como estatística, física, química, etc. Algumas destas propriedades são explanadas na Seção 3 de Galvão (2020) e no Capítulo 2 de Graham (1994).

Somas na Educação Básica

Iniciamos agora a descrição textual do mapeamento que realizamos sobre o "onde" e "como" a notação de somatório é introduzida/utilizada na Educação Básica. Registramos, como uma primeira observação, que o cálculo de somas permeia o ensino de matemática em toda a Educação Básica. A partir da ideia inicial da operação de adição, o conceito de soma vai sendo aprofundado para adição de várias parcelas, propriedades da soma e suas aplicações, etc., e em algum momento são (ou deveriam ser) introduzidos os somatórios. Nos anos finais do Ensino Fundamental há situações em que somas finitas longas aparecem. Por exemplo, a notação de somatório pode ser utilizada no estudo de estatística para somar as frequências das variáveis ou calcular a média, como podemos observar em Giovanni Júnior (2018). Até mesmo situações envolvendo somas infinitas podem ser abordadas no Ensino Fundamental, como no estudo de dízimas periódicas. Por exemplo, o número 0,666666… pode ser escrito na forma 0,6 + 0,06 + 0,006 + …, ou seja, como uma soma de infinitos termos. Outras possibilidades de uso do somatório podem ser proporcionadas, a exemplo de Theodorovski (2022), que usa somatório no registro de um sistema linear de equações de primeiro grau necessário para a análise dos dados coletados pelo(a)s estudantes. Porém, como somas longas são mais frequentes no Ensino Médio, nesta seção vamos nos restringir a relatar os usos que encontramos para o símbolo de somatório no contexto do Ensino Médio.

Para nos orientarmos por onde iniciar a busca dos conteúdos de matemática destinados ao Ensino Médio que envolvessem a ideia e a simbologia de somatórios, iniciamos por examinar os documentos que orientam a execução deste nível de ensino em nosso estado (Paraná) e em nosso país. O apanhado geral dos conteúdos que são indicados em tais documentos encontra-se nos quadros que expomos à frente.

Considerando a Diretrizes Curriculares do Paraná (DCE's) (PARANÁ, 2008), que são as orientações propostas para a Educação Básica da rede pública estadual do Paraná, apresentamos no Quadro 1 conteúdos básicos onde há possibilidades de inserir somatórios no Ensino Médio. Após o Quadro 4, apresentamos alguns exemplos de tais possibilidades.

Quadro 1: Conteúdos sugeridos nas Diretrizes Curriculares do Paraná

CONTEÚDOS	CONTEÚDOS BÁSICOS	AVALIAÇÃO
Funções	Progressão Aritmética; Progressão Geométrica	Reconheça, nas sequências numéricas, particularidades que remetam ao conceito das progressões aritméticas e geométricas.
Tratamento da Informação	Estatística	Generalize cálculos para a determinação de termos de uma sequência numérica.
Tratamento da Informação	Binômio de Newton	Realize cálculos utilizando Binômio de Newton.

Fonte: Adaptado de Galvão (2020)

Considerando as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) para Ensino Médio da área de ciências da natureza, matemática e suas tecnologias (BRASIL, 2000), apresentamos no Quadro 2 unidades temáticas e conteúdos básicos em que é possível utilizar a notação de somatórios.

Quadro 2: Conteúdos sugeridos nas Orientações Educacionais Complementares aos PCN's

EIXO ESTRUTURANTE	UNIDADE TEMÁTICA	CONTEÚDOS BÁSICOS
Álgebra	Números e Funções	Sequências numéricas: progressões e noção de infinito.
Análise de dados	Estatística	Análise de dados: médias, moda e mediana, variância e desvio padrão. Obter médias e avaliar desvios de conjuntos de dados ou informações de diferentes naturezas.

Fonte: Adaptado de Galvão (2020)

Homologada em 2018, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio (BRASIL, 2017) é um documento que pretende nortear o que é ensinado nas escolas de todo o país, e cujas recomendações encontram-se em processo de implantação nas escolas do estado do Paraná. A BNCC é um instrumento que busca orientar a elaboração do currículo específico de cada escola, e estabelece os objetivos de aprendizagem que se quer alcançar, por meio da definição de competências e habilidades essenciais, enquanto o currículo irá determinar como esses objetivos serão alcançados, traçando as estratégias pedagógicas mais adequadas.

Para a área do conhecimento matemática e suas tecnologias são propostas unidades temáticas, que incluem as competências específicas de área que devem ser desenvolvidas e as habilidades que devem ser alcançadas em cada etapa do Ensino Médio. Destacamos, no Quadro

3, competências nas quais a ideia e/ou notação de somatório pode ser trabalhada.

Quadro 3: Competências encontradas na Base Nacional Comum Curricular

UNIDADE TEMÁTICA	COMPETÊNCIA ESPECÍFICA	HABILIDADES
Probabilidade e Estatística	2) Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da matemática.	(EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
Probabilidade e Estatística	3) Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT316) Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
Números e Álgebra	5) Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Fonte: Adaptado de Galvão (2020)

Em 2021 foi lançado o Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná. Este é o documento que deve ser utilizado por todas as redes de ensino (privadas, municipais e estadual) do estado do Paraná como norteador para a elaboração do currículo do Ensino Médio (PARANÁ, 2021). A área do conhecimento matemática e suas tecnologias é composta por um único componente curricular, a própria matemática. São propostas competências específicas, desdobradas em habilidades a ser desenvolvidas no Ensino Médio, articuladamente com os objetos de conhecimento que são organizados em unidades temáticas. Destacamos, no Quadro 4, conteúdos nos quais a ideia e/ou notação de somatório pode ser trabalhada.

Quadro 4: Conteúdos sugeridos no Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	CONTEÚDOS
Números e Álgebra	Funções	Soma dos termos de uma progressão aritmética. Fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica.
Tratamento da Informação	Estatística	Medidas de tendência central (média, mediana, moda). Medidas de dispersão (variância e desvio padrão).
Tratamento da Informação	Probabilidade	Binômio de Newton.

Fonte: Adaptado de Paraná (2021)

Para exemplificar pelo menos alguns dos contextos indicados nos Quadros 1, 2 e 4 em que a notação de somatório se faz necessária no Ensino Médio, selecionamos três conteúdos presentes em coleções de livros didáticos muito usadas. Em estatística, que está dentro do escopo do que professore(a)s de matemática precisam lecionar, somatórios são usados para descrever média aritmética, medidas de dispersão, desvio médio, desvio padrão e variância, como pode ser visto em Leonardo (2016). Nos conteúdos progressão aritmética (PA) e progressão geométrica (PG) pode-se usar somatórios para registrar o conceito de soma dos termos de uma PA. De acordo com Dante (2014), para uma PA finita de razão r $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, podemos indicar a soma dos n primeiros termos por

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i) = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n\ ,$$

ou usando a fórmula mais abreviada

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i) = \frac{(a_1 + a_n)\cdot r}{2}.$$

Já para uma PG finita de razão q $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n)$, podemos usar um somatório para indicar a soma dos n primeiros termos e para escrever a fórmula abreviada:

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i) = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Ao analisarmos as propostas curriculares dos documentos (BRASIL, 2000, 2017; PARANÁ, 2008, 2021), conseguimos observar que é comum encontrarmos conteúdos na matemática em que a notação de somatórios pode ser utilizada, seja com somas finitas ou infinitas. Por exemplo, em assuntos relacionados à álgebra, como o estudo de progressões e sequências. Muitas das sequências numéricas apresentadas são apenas curiosidades matemáticas, mas existem aquelas que surgem naturalmente, por exemplo, durante um processo de resolução de problemas, e por isso tem potencial para ser mais interessantes. Em qualquer caso, a manipulação destas sequências requer o conhecimento de uma variedade de tópicos de matemática que fazem parte do currículo escolar básico.

Ainda com relação ao estudo de sequências numéricas no Ensino Médio, podemos evidenciar o seguinte trecho das Orientações Curriculares aos PCN's (BRASIL, 2000, p. 121):

> Com relação às sequências, é preciso garantir uma abordagem conectada à ideia de função, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas. O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno estender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adição e tendo a oportunidade de se defrontar com as ideias de convergência e de infinito. Essas ideias foram e são essenciais para o desenvolvimento da ciência, especialmente porque permitem explorar regularidades.

Já os tipos de somas que aparecem no estudo de progressões geométricas infinitas requerem do(a) aluno(a) um estudo mais profundo do assunto, pois é necessária a análise de convergência da soma. Quando se trabalha com estes tipos de sequência, é necessário o desenvolvimento de um estudo que contemple as propriedades dos somatórios infinitos, incluindo critérios de convergência. Aprofundamento nos estudos, como este, aparecem como característica do Ensino Médio, como é possível observar ao estudar os documentos que trazem as diretrizes para esse nível de ensino. Salientamos que tais documentos evidenciam que é de grande importância que "os conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam a estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos[...]" (BRASIL, 2017, p. 529).

Ainda relacionado aos aprofundamentos de estudos que caracterizam o Ensino Médio, a BNCC para o Ensino Médio (BRASIL, 2017, p. 530) ressalta que:

> Para tanto, eles (os estudantes) devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. [...] Assim, as aprendizagens previstas para o Ensino Médio são fundamentais para que o letramento matemático dos estudantes se torne ainda mais denso e eficiente, tendo em vista que eles irão aprofundar e ampliar as habilidades propostas para o Ensino Fundamental e terão mais ferramentas para compreender a realidade e propor as ações de intervenção especificadas para essa etapa.

Além disso, as Orientações Curriculares complementares aos PCN's (BRASIL, 2000, p. 111) frisam que no Ensino Médio:

> A Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza. Enquanto

> ciência, sua dimensão histórica e sua estreita relação com a sociedade e a cultura em diferentes épocas ampliam e aprofundam o espaço de conhecimentos não só nesta disciplina, mas nas suas inter-relações com outras áreas do saber.

As orientações disponíveis, conforme pontuadas, evidenciam que a matemática deve ser compreendida como uma parcela do conhecimento essencial para a formação do ser humano. Deve contribuir para a construção de uma visão de mundo, como ferramenta auxiliar para ler e interpretar a realidade, bem como para desenvolver capacidades exigidas ao longo da vida social e profissional.

Uma vez identificadas as possibilidades de uso da notação de somatórios nos documentos que orientam a execução do Ensino Médio, buscamos na sequência identificar "como" e "quando" a notação de somatório é, de fato, inserida em sala de aula no Ensino Médio.

Cientes da individualidade de cada professor(a) de matemática, que pode abordar cada assunto de forma mais ou menos aprofundada de acordo com suas escolhas e habilidades, usamos como balizador para esta busca o fato de que a utilização de livros didáticos em aulas de matemática é uma prática comum entre professore(a)s da área, e realizamos um levantamento em livros didáticos de matemática para o Ensino Médio, buscando por conteúdos que envolvessem explicitamente a notação de somatório.

Escolhemos, para esta busca, 5 coleções de livros didáticos de matemática para o Ensino Médio amplamente utilizados nas escolas do país, participantes do plano nacional do livro didático (PNLD) do Ministério da Educação, editados no período de 2014 a 2016. O critério para a escolha das coleções foi a disponibilidade das coleções nos colégios estaduais a que tivemos acesso no momento da pesquisa (esta pesquisa foi conduzida durante a pandemia da Covid-19, enquanto os prédios das escolas permaneciam fechados e as aulas ocorriam remotamente). As coleções de livros escolhidas foram:

(1) Matemática: ciência e aplicações - Ensino Médio; de Gelson Iezzi, (IEZZI, 2016);
(2) Matemática: contexto & aplicações; de Luiz Roberto Dante, (DANTE, 2014);
(3) Contato Matemática; de Joamir Roberto de Souza e Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia, (SOUZA, 2016);
(4) Matemática: interação e tecnologia; de Rodrigo Balestri, (BALESTRI, 2016); e
(5) Conexões com a Matemática; de Fabio Martins de Leonardo, (LEONARDO, 2016).

Todos os livros destas coleções foram totalmente revisados, porém a ideia e/ou notação de somatório foi identificada apenas nos conteúdos “progressões aritmética e geométrica”, “binômio de Newton” e “estatística”. Da análise realizada, pontuamos os seguintes aspectos:

- Os conteúdos de progressões aritmética e geométrica são encontrados nos livros do 1° ano, em todas as coleções. Pudemos observar que todos apresentam a definição de sequências numéricas finitas e infinitas. Porém, quando se trata das somas dos termos das sequências, a ideia de somatório é utilizada, mas usa-se nas fórmulas o símbolo S_n no lugar de $\sum$. A fórmula para o cálculo das somas parciais é mostrada em todos os livros do 1º ano, exceto na coleção (2).
- Notamos que, em todas as coleções, para calcular a soma dos infinitos termos de uma PG são introduzidas as ideias de limite no infinito e de convergência. Em um livro, (4), encontramos ainda a denominação série convergente ou divergente para as somas de termos de uma PG do tipo série geométrica, de acordo com a razão da progressão.
- Encontramos o conteúdo binômio de Newton nos livros de 2º ano de três coleções: (2), (3) e (4). Estas coleções trazem a ideia de soma de termos de uma sequência, ou seja, de somatório, entretanto sem a utilização do símbolo $\sum$.
- Em estatística analisamos especificamente os conteúdos medidas de tendência central e dispersão, que se encontravam nos livros de 2º e 3º anos. Percebemos que em todas as coleções os autores utilizam a ideia de somatório e a notação Sigma em suas definições.

Figura 1: Notas de rodapé com pequenas observações sobre somatório

O símbolo $\sum_{i=1}^{n}$ representa o somatório dos valores absolutos dos desvios $|x_i - \bar{x}|$, com i variando de 1 a n, isto é, do primeiro $|x_1 - \bar{x}|$ ao n-ésimo $|x_n - \bar{x}|$.

Fique atento!

O símbolo $\sum_{i=1}^{n} x_i$ significa o somatório dos números x_i, com i variando de 1 a n.

Observação

A letra grega maiúscula Σ (sigma) é usada para indicar uma soma.

A indicação $\sum_{i=1}^{n} x_i$ significa o **somatório** dos valores **x** para i variando de 1 até n.

Veja outros exemplos:

- $\sum_{k=2}^{100} k = 2 + 3 + ... + 100$
- $\sum_{i=m}^{n} f_i = f_m + f_{m+1} + f_{m+2} + ... + f_n$, para $m < n$

Fonte: Adaptado das coleções (1), (2), (3), (4) e (5)

Verificamos que existem momentos no Ensino Médio em que a notação de somatórios é utilizada, especificamente “progressões aritmética e geométrica”, “binômio de Newton” e “estatística”. Entretanto, observamos com preocupação que apesar de utilizar livremente a notação de somatório, em nenhum livro das coleções analisadas há uma seção prévia específica para se introduzir a notação de somatório e esclarecer sua interpretação e suas propriedades.

Em 3 das coleções observadas (Figura 1) identificamos pequenas observações em notas de rodapé, que apenas exemplificam o que seria um somatório. As outras duas coleções não apresentam. Essa percepção corrobora com a hipótese de que as dificuldades que alunos e alunas sentem ao visualizar, compreender e manipular somatórios são negligenciadas.

Somas no Ensino Superior: inserções em cursos de licenciatura em matemática

Iniciamos esta seção destacando alguns princípios, que em um contexto de discussão para a formação inicial de professore(a)s de matemática, foram considerados prioritários na discussão sobre uma proposta curricular norteadora para os cursos de licenciatura em matemática no país, elaborada pela SBM (SBM, 2015):

> i. Um princípio básico para um ensino efetivo de Matemática é que o professor conheça profundamente o conteúdo que ensina. Claro que a formação de um professor de Matemática não se encerra na própria Matemática, pois ainda há que dominar a conexão entre o conhecimento e sua prática de sala de aula.
> ii. O ensino da matemática na Educação Básica não pode prescindir da abordagem de conteúdos elementares para a Matemática como Ciência e como linguagem para outras áreas do conhecimento, como a Física, a Química, a Computação, etc. Portanto, a formação do professor deve contemplar esses conteúdos como tal e garantir que sejam aprofundados e articulados no contexto da própria Matemática, visando oferecer ao professor uma visão ampla e abrangente do edifício da Matemática.

Destacados estes princípios, pontuamos que as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática (BRASIL, 2001) enfatizam que:

> As habilidades e competências adquiridas ao longo da formação do matemático tais como o raciocínio lógico, a postura crítica e a capacidade de resolver problemas, fazem do mesmo um profissional capaz de ocupar posições no mercado de trabalho também fora do ambiente acadêmico, em áreas em que o raciocínio abstrato é uma ferramenta indispensável.

Fica evidenciado que, tal como explanado nas diretrizes da SBM (SBM, 2015, pag. 7), o reconhecimento de que a formação do(a) professor(a) exige um conhecimento de matemática próprio para a sua prática não sugere o entendimento de uma separação rigorosa entre a matemática escolar e a matemática como ciência, mas evidencia que estas precisam ser observadas a partir de suas especificidades. Tanto o(a) bacharel em matemática como o(a) professor(a) de matemática do Educação Básica deve conhecer a definição formal de uma operação, como por exemplo da operação de divisão envolvendo números naturais (divisão Euclidiana), deve saber que o algoritmo usual dessa operação se baseia na estrutura posicional do sistema de numeração decimal, e deve ser capaz de demonstrar detalhadamente esse algoritmo, justificando cada uma das etapas que o compõe. No entanto, para um(a) professor(a), é necessário também identificar as diferentes situações que são resolvidas por meio de tal operação e relacioná-las com tal operação, pois para um(a) aluno(a) não são tão claras, por exemplo, as relações entre as ideias de repartição e de comparação ou medida para que sejam modeladas por uma mesma operação.

Ainda neste sentido, as diretrizes da SBM (SBM, 2015, p. 10) sugerem que:

> Não há diferença de valor entre o que é elementar e o que é superior - são partes que se fundem e se articulam compondo, sob a mesma importância, a Matemática como ciência. Nesse sentido, cabe à escola não só a tarefa de difundir o conhecimento elementar, como também contribuir para a elementarização e para o desenvolvimento da própria Matemática.

Dentre as disciplinas constantes na proposta curricular da SBM (SBM, 2015) que apresentam em suas ementas conteúdos que podem envolver aplicações de somatórios, destacamos as elencadas no Quadro 5.

Quadro 5: Conteúdos com possibilidades de aplicação de somatórios em disciplinas da proposta curricular da SBM para cursos de licenciatura em matemática

DISCIPLINA	CONTEÚDOS OBSERVADOS
Cálculo de uma Variável A	- Séries de Taylor das funções elementares.
Cálculo de uma Variável B	- Integrais definidas. - Equações diferenciais lineares de 1ª ordem. - Equações diferenciais de 2ª ordem com coeficientes constantes.
Cálculo II	- Caminhos e equações paramétricas de curvas. - Integrais duplas sobre retângulos.
Combinatória	- Sequências recorrentes lineares.
Introdução à Análise	- Definições de e via sequências e séries.
Cálculo com Variável Complexa	- Séries de potências.
Equações Diferenciais	- Aplicações de séries na resolução de equações diferenciais ordinárias. - Soluções de equações diferenciais em séries de potências. - Séries de Fourier e equações diferenciais parciais clássicas.
Probabilidade e Estatística A	- Medidas de posição: moda, média e mediana.
Probabilidade e Estatística B	- Média e desvio padrão. - Modelos e aplicações de variáveis discretas e contínuas.
Matemática Discreta	- Triângulo de Pascal, identidades diversas envolvendo números binomiais: demonstrações algébricas e combinatórias.
Geometria Analítica	- Operações com vetores: adição, multiplicação por escalar e produto interno.

Fonte: Adaptado de Galvão (2020)

Convém destacar que há assuntos na grade curricular proposta pela SBM tratados como linhas norteadoras para a composição de um currículo para um curso de licenciatura em matemática, que são entendidos como elementares na formação do(a) professor(a) de matemática, a saber (SBM, 2015, p. 17):

> Fundamentos de Funções Reais, de Cálculo Diferencial e Integral, de Análise Real e de Equações Diferenciais: O Cálculo Diferencial e Integral (de uma e de várias variáveis) sustenta grande parte da Matemática e da Física e ilustra de várias maneiras processos infinitos da Matemática. De fato, vários conceitos fundamentais para a Matemática só poderão ser completamente entendidos com o uso do Cálculo Diferencial e Integral e até mesmo conceitos de Física usualmente abordados no Ensino Médio só poderão ser entendidos plenamente com o uso de limites e derivadas. [...] Também outras representações para os números reais aparecem, agora podendo ser tratadas de forma precisa: como limite de uma sequência convergente, como uma série, como uma fração contínua. [...] Por um lado, não cabe a formalização dos conceitos de limite, derivada e integral, que envolvem processos infinitos no modelo atual de Ensino Médio brasileiro, mas, por outro lado, os processos infinitos estão presentes em vários tópicos próprios do Ensino Básico, como, por exemplo, números reais e soma dos infinitos termos de progressões geométricas. Assim, para um futuro professor, é necessário que a discussão sobre os processos infinitos vá além da formalização de conceitos, mas que se estabeleça de forma crítica e sedimentada, visando a sua abordagem no Ensino Básico.

Também sobre a proposição de grade curricular para um curso de licenciatura em matemática, um estudo de 2003 conduzido pela SBEM identifica os conteúdos de disciplinas como cálculo diferencial e integral, análise matemática, álgebra, geometria, estatística, combinatória, probabilidade, entre outros, como conhecimentos substantivos do(a) futuro(a) professor(a), que "devem ser selecionados e abordados de forma a possibilitar ao(à) professor(a) em formação, conhecimento amplo, consistente e articulado da Matemática" (SBEM, 2003, p. 15).

Quando consideramos mapear as inserções e aplicações da notação de somatórios nas disciplinas dos cursos de graduação de licenciatura em matemática, sabíamos que a dificuldade em fazer um mapeamento adequado seria maior que aquele referente ao Ensino Médio, em parte por não haver tantos documentos norteadores, em parte por cada universidade contar com liberdade acadêmica para construir sua grade curricular de forma autônoma. Dessa forma, ao buscar responder ao questionamento "onde" e "como" aparece a notação de somatórios em um curso de licenciatura em matemática, optamos por focar em fazer uma varredura nos currículos dos dois cursos de graduação (modalidade presencial e a distância) em licenciatura em matemática ofertados pela instituição onde estamos inseridos, a Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG).

Das disciplinas do currículo pleno do curso superior de graduação em licenciatura em matemática da UEPG na modalidade presencial, em seu currículo 7 (vigente desde 2009), consideramos as disciplinas de formação básica geral e as disciplinas de formação específica profissional. As disciplinas apresentadas no Quadro 6 possuem em suas ementas conteúdos em que é necessária a utilização da notação de somatórios.

Quadro 6: Disciplinas do currículo 7 do curso de licenciatura em matemática (presencial) da UEPG

DISCIPLINA	CONTEÚDOS OBSERVADOS
101159 Cálculo Diferencial e Integral I	- Integrais definidas.
101078 Cálculo Diferencial e Integral II	- Integrais múltiplas: duplas, triplas. - Cálculo vetorial: integrais de linha.
101160 Álgebra	- Somatórios. - Sistemas numéricos.
101161 Álgebra Linear	- Matrizes. - Sistemas de equações lineares homogêneos e não homogêneos. - Combinação linear.
101162 Análise Real	- Integral de Riemann.
101163 Fundamentos da Matemática	- Análise combinatória: princípio aditivo e multiplicativo, fatorial, permutação e combinação. - Triângulo de Pascal. Binômio de Newton.
101164 Geometria Analítica	- Produtos de vetores: escalar, vetorial e misto.
101172 Cálculo Numérico	- Sistemas Lineares: métodos diretos e métodos iterativos. - Sistemas de equações não-lineares: métodos de resolução - Soluções numéricas de equações diferenciais ordinárias. - Introdução à solução numérica de equações diferencias parciais: método das diferenças finitas.
101173 Estatística e Probabilidade	- Estatística Descritiva. - Distribuições de probabilidade.
101174 Séries e Equações Diferenciais	- Séries: testes de convergência e divergência. - Séries de Potências. - Solução das equações por séries. - Introdução às Séries de Fourier.
101179 Matemática Financeira	- Juros compostos.

Fonte: Adaptado de Galvão (2020)

Das disciplinas do currículo pleno do curso superior de graduação em licenciatura em matemática da UEPG na modalidade a distância (EAD), em seu currículo 1 (vigente desde 2009), foram consideradas disciplinas de formação básica geral e disciplinas de formação específica profissional. As disciplinas que apresentam em sua ementa conteúdos que permitem utilizar a notação de somatórios estão apresentadas no Quadro 7.

Quadro 7: Disciplinas do currículo 1 do curso de licenciatura em matemática (EAD) da UEPG

DISCIPLINA	CONTEÚDOS OBSERVADOS
101501 Álgebra Linear I	- Matrizes. - Sistemas de equações lineares homogêneos e não homogêneos. - Combinação linear.
101502 Álgebra Linear II	- Espaços com produto interno.
101503 Análise Real	- Integral de Riemann.

101505 Cálculo Diferencial e Integral II	- Integrais: indefinida e definida e propriedades. - Teorema Fundamental do Cálculo.
101506 Cálculo Diferencial e Integral III	- Séries: testes de convergência e divergência. - Séries de Potências. Polinômio de Taylor.
101507 Cálculo Diferencial e Integral IV	- Integrais múltiplas: duplas, triplas. - Cálculo vetorial: integrais de linha.
101508 Fundamentos de Álgebra	- Somatórios.
101511 Fundamentos da Matemática III	- Análise combinatória: princípio aditivo e multiplicativo, fatorial, permutação e combinação. - Triângulo de Pascal. Binômio de Newton.
101513 Geometria Analítica II	- Produtos de vetores: escalar, vetorial e misto.
101525 Cálculo Numérico	- Sistemas Lineares: métodos diretos e métodos iterativos. - Soluções numéricas de equações diferenciais ordinárias.
101526 Estatística e Probabilidade I	- Estatística Descritiva.
101527 Estatística e Probabilidade II	- Distribuições de Probabilidade.
101528 Equações Diferenciais	- Solução das equações por séries. - Introdução às Séries de Fourier.
102501 Física Geral I	- Cinemática vetorial.
102502 Física Geral II	- Eletromagnetismo.

Fonte: Adaptado de Galvão (2020)

Para exemplificar pelo menos um dos contextos indicados nos Quadros 6 e 7 em que a notação de somatório se faz necessária no Ensino Superior, escolhemos dentre as disciplinas constantes nos currículos da UEPG a disciplina “Cálculo Diferencial e Integral I”, que consta na grade do 1º ano do curso de licenciatura em matemática na modalidade presencial. A definição rigorosa da integral definida necessita o uso da notação de somatório. Para uma função real f, contínua sobre um intervalo $[a, b]$, a integral definida é obtida ao somar n elementos de área sob a curva $y = f(x)$, entre a e b, e passar tal soma ao limite com n tendendo ao infinito, como define Stewart (STEWART, 2013, p. 10):

> Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Suponha que este intervalo seja dividido em n partes iguais de largura $\Delta x = (b - 1)/n$ e seja x_j um número pertencente ao j-ésimo intervalo, para $j = 1, 2, \ldots, n$. Neste caso, a integral definida de f em $[a, b]$, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, é dada por
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\, \Delta x \right),$$
>
> se este limite existir.

No entanto, ao observarmos atentamente a grade curricular e o ementário do curso em questão, observamos que a definição de somatório e suas propriedades só é apresentada formalmente na disciplina “Álgebra”, a qual é oferecida apenas no segundo ano. Uma vez que cada instituição tem liberdade para construção da grade de seu curso, é possível que apenas tenhamos identificado um equívoco na proposição do currículo do curso de licenciatura em matemática da instituição analisada, a saber, a disparidade entre o momento de abordagem da notação de somatório e a sua necessidade em uma disciplina anterior. Porém, consideramos isto um indicativo de que, assim como no Ensino Médio, o(a)s aluno(a)s podem apresentar certa dificuldade ao lidar com somatórios por não receberem de forma estruturada uma breve introdução ao tema anteriormente à exigência de sua utilização.

Uma proposta de módulo didático

Nesta seção, em consonância com os objetivos apresentados na Introdução e em complemento a este artigo, apresentamos uma proposta de módulo didático pensada para o Ensino Médio, baseada na metodologia Módulo Didático elaborada por Delizoicov e Angotti (1990). Tal módulo didático (que usa uma linguagem coloquial, onde o interlocutor se dirige diretamente ao(à) estudante), foi proposto com o intuito de fornecer subsídios a professore(a)s de matemática que queiram apresentar a suas turmas de estudantes a notação Sigma para somatórios de uma maneira minimamente estruturada. Mais detalhes podem ser encontrados no Apêndice B de Galvão (2020), dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), disponível para download no banco de dissertações do PROFMAT (PROFMAT, 2021).

Complemento: Módulo Didático

SOMATÓRIOS

O conceito que estudaremos hoje é o mais simples na matemática: “adição” ou “soma”. Todos sabem somar dois números; o que às vezes complica é somar muitas parcelas de uma vez só... Vamos conhecer agora uma ferramenta muito útil para escrever somas compridas.

Quando alguém precisa escrever uma expressão em que muitos termos são somados, ou onde os termos obedecem a uma certa lei de formação, pode usar a *notação* de somatório (e o símbolo $\sum$), escrevendo uma expressão matemática com a forma

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k).$$

Esta notação nada mais é que uma forma abreviada de escrever a soma de um conjunto de parcelas que obedecem a algum padrão que pode ser identificado (e que representamos através do *termo geral* a_n), tanto faz se a quantidade de parcelas que devem ser somadas seja finita ou infinita. Se você vir uma expressão deste tipo e tiver dificuldade de entender o que diz a expressão onde o símbolo de somatório aparece, sempre é possível “abrir” a soma, ou seja, escrever as parcelas uma a uma (ou todas elas ou pelo menos as primeiras, até conseguir entender o que está acontecendo), como em

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Por exemplo, olhe a soma

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2.$$

Como essa expressão está escrita, é fácil entender o que é necessário fazer para calcular a soma de todas as parcelas. Mas agora estamos preocupados em como reescrever esta soma de uma forma abreviada (e entender claramente o que significam os símbolos usados na escrita da forma abreviada), para que quando for necessário fazer o caminho inverso, ou seja, quando você olhar para um somatório dado e precisar calcular o valor numérico da soma, você consiga fazer o raciocínio inverso e encontrar o valor correto que está procurando.

Para reescrevermos a expressão $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2$ de forma abreviada, usamos o símbolo de somatório ∑ (este símbolo é inspirado em uma letra grega: a letra Sigma maiúscula: "∑", que é equivalente à nossa letra "S").

Como o padrão que existe na soma é "elevar ao quadrado um número que varia entre 1 e 10", podemos escrever genericamente a *k-ésima* parcela da soma como k^2. Assim, quando trocamos *k* por 1 obtemos a primeira parcela 1^2; quando trocamos *k* por 2 encontramos a segunda parcela 2^2, e assim por diante, até trocarmos *k* por 10, pois a soma vai até 10^2.

Uma vez que compreendemos o sentido do *termo geral* e conseguimos identificar quais são o primeiro termo e o último termo da soma (que neste caso são 1 e 10, respectivamente), podemos escrever a soma na forma abreviada, usando a expressão:

$$\sum_{k=1}^{10} k^2,$$

que se lê: "somatório de *k* elevado ao quadrado, com *k* variando desde $k = 1$ até 10". A letra *k* faz o papel de *índice* da soma (ou do somatório) e pode ser trocada por qualquer outra (que não atrapalhe na interpretação da expressão), como por exemplo: *i*, *j*, *l*, *m*, *n*, etc.

A notação genérica

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k)$$

representa "a soma das parcelas a_k, com o índice *k* variando, de um em um, todos os números inteiros entre o *índice inferior* (ou *limite inferior*) do somatório, que é 1; e o *índice superior* (ou *limite superior*) do somatório, que é *n*". O índice inferior de um somatório não precisa ser sempre 1. Podemos tranquilamente escrever $\sum_{k=m}^{n}(a_k)$ desde que o número inteiro *m* seja menor que o número inteiro *n*.

EXEMPLOS

1) Como poderia ser escrita abreviadamente a soma dos 100 primeiros números naturais?

Na forma expandida, esta soma é escrita com a expressão

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100.$$

O número 1 é o limite inferior, pois é o primeiro número a ser somado, e o número 100 é o limite superior, pois é o último número a ser somado. A letra k, que pode fazer o papel de *índice* do somatório, pode ser usada para representar todos os números que variam de parcela para parcela, que neste caso vão de 1 até 100. Então a expressão buscada é

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 = \sum_{k=1}^{100} k.$$

2) Como poderia ser a soma dos primeiros n números naturais?

Na forma expandida, esta soma é escrita como

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

O número 1 será o limite inferior do somatório, pois é o primeiro número a ser somado e o número n é o limite superior, pois é o último número a ser somado. A letra k pode ser usada como índice do somatório, que irá assumir os valores de 1 a n (essas informações são colocadas abaixo e acima do símbolo $\sum$, respectivamente). Assim:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k.$$

3) Como podemos escrever brevemente a soma $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$?

Esta é a soma dos n primeiros números pares, então o número 1 será o limite inferior do somatório, pois $2 = 2 \times 1$ é o primeiro número a ser somado, e o número n é o limite superior do somatório, pois $2n = 2\ \times n$ é o último número a ser somado. A letra k pode ser usada como índice do somatório, e irá variar entre 1 e n. Assim, podemos escrever

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = \sum_{k=1}^{n} (2k).$$

Obs.: O *termo geral* $(2k)$ do somatório é também chamado de *argumento* do somatório. Ao efetuarmos a soma, o índice k deve ser substituído no argumento do somatório por todos os valores desde o limite inferior 1 até o limite superior n.

4) Como podemos usar a notação de Somatório para reescrever a soma

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n\ ?$$

Nesta soma, as parcelas são potências de 2 consecutivas. Como a primeira parcela é 2^0, o número 0 é o limite inferior do somatório. O limite superior do somatório é n, pois a última parcela a ser somada é 2^n. Assim, o argumento do somatório é 2^j, e o índice j irá assumir todos os valores desde 0 até n:

$$\sum_{j=0}^{n} 2^j\ .$$

Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, PR, Brasil,
v.11, n.24, p.395-420, jan.-abr. 2022.

5) $\sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

6) $\sum_{i=1}^{4} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$.

CASOS ESPECIAIS

Existem casos especiais de somatórios, que é bom conhecer. Veja alguns deles a seguir.

1) $\sum_{i=m}^{n} 0 = 0$.

Neste caso, o argumento do somatório é a constante 0, que tem o valor 0 independentemente do valor do índice do somatório, e a soma de qualquer número de parcelas nulas é sempre zero.

2) $\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n\ parcelas} = n$.

Novamente o argumento do somatório é uma constante, 1, e agora se deve somar n parcelas iguais a 1, o que resulta na soma n. Somas de constantes podem ser efetuadas se lembrarmos deste exemplo, como na soma a seguir:

$$\sum_{i=1}^{100} 2 = \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{100\ parcelas} = 2 \times \left(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{100\ parcelas} \right) = 2 \times \sum_{i=1}^{100} 1 = 2 \times 100 = 200 \,.$$

PROPRIEDADES DOS SOMATÓRIOS

Quando você precisar fazer operações algébricas (manipulação de contas) com somatórios, pode usar as chamadas *propriedades operatórias* dos somatórios. Usar as propriedades simplificará muito os cálculos a fazer. As principais propriedades estão a seguir.

Considere que a_k e b_k são os termos gerais de duas sequências, que podem assumir valores no conjunto dos Números Reais $\mathbb{R}$; e que m e n são números no conjunto dos Naturais $\mathbb{N}$, com $m < n$; e que c é uma constante real; e que o índice k varia assumindo todos os números no conjunto $\{m, m + 1, \ldots, n\}$. Então, valem as seguintes *propriedades*:

a) O somatório de uma soma é igual à soma dos somatórios:

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \left(\sum_{k=m}^{n} a_k \right) + \left(\sum_{k=m}^{n} b_k \right).$$

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{3} (2^k + 2k) = \sum_{k=1}^{3} 2^k + \sum_{k=1}^{3} 2k = (2^1 + 2^2 + 2^3) + (2.1 + 2.2 + 2.3) = 14 + 12 = 26.$$

b) O somatório de produtos de uma constante por um termo geral é igual ao produto da constante pelo somatório do termo geral:

$$\sum_{k=m}^{n} (c \,.\, a_k) = c \sum_{k=m}^{n} a_k \,.$$

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{3}(5k^2) = 5 \times \sum_{k=1}^{3}(k^2) = 5 \times (1^2 + 2^2 + 3^2) = 5 \times 14 = 70\,.$$

c) O somatório de um argumento constante é igual ao produto dessa constante pela quantidade de parcelas da soma:

$$\sum_{k=m}^{n}(c) = c \times (n - m + 1)\,.$$

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{3}(10) = 10 \times (3 - 1 + 1) = 10 \times 3 = 30\,.$$

d) O somatório de um argumento que não depende do índice do somatório é igual ao produto desse argumento pelo número de parcelas da soma:

$$\sum_{k=m}^{n}(x_i) = x_i \times (n - m + 1)\,.$$

Exemplo:

$$\sum_{k=0}^{3}(x^2) = x^2 \times (3 - 0 + 1) = 4x^2\,.$$

SOMATÓRIOS DUPLOS

É muito comum, quando estudamos matrizes ou tabelas de dupla entrada (ou seja, tabelas onde os elementos dependem de dois índices variáveis independentes), encontrarmos somatórios tomados em relação as suas linhas e/ou colunas.

Como um elemento geral de uma matriz tem a forma $a_{i,j}$ (com dois índices independentes), é natural que quando estudamos estes casos apareçam somatórios com dois índices independentes: um índice para indicar a linha (normalmente, o índice i), e outro índice para indicar a coluna (normalmente, o índice j). São os chamados *somatórios duplos*, cuja representação na forma geral é

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\,.$$

O fato de aparecerem dois símbolos $\sum$ juntos não implica que a soma ficará mais difícil ou impossível: é apenas uma forma de indicarmos que estamos fazendo uma *soma de somas*; que podemos reescrever de uma maneira mais fácil de compreender:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\underbrace{a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{1m}}_{m\ parcelas}\right)\,.$$

Aqui, o segundo somatório duplo indica claramente que o argumento do somatório sobre o índice i é uma soma sobre o índice j. À direita aparece uma expressão escrita de uma forma mais clara, em que a notação do somatório aparece apenas sobre o índice i, enquanto as somas sobre o índice j para j variando desde 1 até m já foram efetuadas.

Exemplo:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{4}(i \times j) = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=2}^{4}(i \times j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}[(i \times 2) + (i \times 3) + (i \times 4)]$$

$$= \sum_{i=1}^{3}(9i) = [(9 \times 1) + (9 \times 2) + (9 \times 3)] = 9 + 18 + 27 = 54\ .$$

Por fim, é bom saber que mesmo se tratando de um somatório duplo, muitas vezes apenas um sinal $\sum$ é utilizado. Quando isso acontece, o símbolo $\sum$ denota uma soma sobre os argumentos indexados com todas as combinações possíveis entre os índices. Normalmente é usada uma notação com dois índices escritos ao mesmo tempo, como exemplifica a expressão a seguir (olhe o lado esquerdo):

$$\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\right).$$

EXERCÍCIOS

Ao finalizar o módulo didático, é recomendável que o(a)s estudantes realizem alguns exercícios para aplicar o conhecimento estudado. Por motivo de espaço, não incluímos aqui uma relação de exercícios propostos. Uma relação pode ser vista no Apêndice B de Galvão (2020).

Fonte: Adaptado de Galvão (2020)

Acreditamos que tal módulo didático possa ser aplicado a estudantes tanto do Ensino Médio quanto de cursos de graduação, utilizando uma ou no máximo duas aulas, imediatamente antes de o(a) professor(a) abordar pela primeira vez um conteúdo que faça uso da notação Sigma para o somatório clássico. O módulo didático proposto tem uma abordagem basicamente tradicional, o que pode ser fruto de críticas, mas o inserimos por acreditar que podemos inspirar outro(a)s professore(a)s de matemática a extrapolar.

Acreditamos ainda que uma pequena pausa no cumprimento da sequência indicada nas ementas, destinada a permitir aos alunos e alunas construírem um bom entendimento dos significados atribuídos aos símbolos usados na notação Sigma, pode representar uma contribuição significativa para a apreensão dos conteúdos que fazem uso de tal notação em suas expressões, cálculos e manipulações algébricas. Proporcionar um momento de dedicação à interpretação do significado pode evitar que estes símbolos, quando vistos em um texto escrito no livro, quadro ou caderno, causem ansiedade e sentimento de impotência no(a)s aluno(a)s.

Considerações Finais

Durante a realização do estudo que apresentamos neste artigo, que teve como justificativa inicial uma preocupação com a dificuldade encontrada pelo(a)s estudantes dos mais diversos níveis de ensino quando precisam manipular somatórios (premissa aceita pelos autores deste estudo, com base em suas próprias experiências docentes e nos contextos observados nas escolas e universidades frequentadas, e respaldada pelas referências Ozkan (2015) e Cargnin (2016), entre outras), pudemos observar que existem vários momentos no Ensino Médio em que a notação de somatórios é utilizada (mesmo que com um símbolo diferente da notação Sigma, como no caso de somas parciais de uma sequência). Entretanto, percebemos que nas diretrizes para este nível de ensino a notação de somatório não é citada especificamente. Esta percepção transformou-se em preocupação quando, na amostra de livros didáticos consultada, não encontramos ao menos uma seção específica para introduzir a notação do somatório e esclarecer sua interpretação e suas propriedades, previamente à sua utilização no tratamento de outros assuntos abordados nos livros, parecendo haver um entendimento de que a compreensão dos significados embutidos na notação Sigma se dá de forma automática pelo(a)s estudantes, o que consideramos uma postura insuficiente para que o(a)s estudantes desenvolvam um domínio completo da leitura, escrita e manipulação desta notação.

Dentre todas as operações matemáticas, a soma é a mais básica de todas, estando presente por toda parte na matemática. É, portanto, imprescindível conhecermos e dominarmos as ferramentas básicas que permitem bem lidar com elas. Nesse sentido, acreditamos ser necessário que no Ensino Médio a abordagem às ferramentas relacionadas à operação de somar seja bem fundamentada, incluindo a ideia de somatório e a notação Sigma. Defendemos que é necessário dar à ideia de somatório o devido destaque, explicitando para o(a)s estudantes a simplicidade de sua notação e sua enorme aplicabilidade.

Como forma de ação objetivando permitir que o(a) professor(a) de matemática esteja apto(a) a ofertar a alunos e alunas do Ensino Médio uma mediação adequada para que compreendam completamente as ideias sintetizadas na notação Sigma e consigam desenvolver habilidades de manipulação algébrica com esta notação, sugerimos que o(a) professor(a) de matemática, em algum momento de sua formação inicial enquanto estudante em um curso de licenciatura em matemática, ou mesmo em formação continuada, realize um estudo aprofundado (não necessariamente longo) das técnicas que envolvem a notação de somatório em suas várias nuances, incluindo propriedades relativas a somas com uma quantidade finita de termos, estudo de sequências numéricas e de convergência de séries e até mesmo o conceito básico de somatórios fracionários (atualmente fora do que é ensinado nos cursos de graduação em matemática). Um tal estudo, aprofundado e detalhado, serviria para a expansão de sua própria compreensão das ideias envolvidas, o que frutificaria ao permitir a docentes de matemática melhor explanar a representação de somas através de somatórios na Educação Básica, facilitando a compreensão do(a)s estudantes a respeito da notação utilizada, e por conseguinte aumentando o seu rendimento no aprendizado dos conteúdos que fazem uso de tal notação.

Referências

BALESTRI, R. **Matemática**: interação e tecnologia. 2ª ed. São Paulo: Ed. Leya, 2016. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1, 2, 3).

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio** – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. Parecer CNE/CES n. 1.302, de 06 de novembro de 2001. Brasília, DF: Conselho Nacional de Educação, 2001. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf. Acesso em: 21 abril 2021.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 21 abril 2021.

CAJORI, F. **A History of Mathematical Notations**. New York: Dover Publications, 1993.

CARGNIN, C.; BARROS, R. M. O. O conceito de integral de Riemann do ponto de vista da congruência semântica. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 11, n. 1, pg. 16-35. 2016.

DANTE, L. R. **Matemática** Contexto e Aplicações. 2ª ed. São Paulo: Ed. Ática, 2014.

DELIZOICOV, D.; ANGOTTI, J. A. P. **Metodologia do Ensino de Ciências.** São Paulo: Cortez, 1990.

GALVÃO, A. T. **Somas, somatórios e termos não inteiros.** 2020. Dissertação (Programa de

Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2020.

GALVÃO, A. T.; CHAGAS, J. Q. Uma introdução a somatórios fracionários: aprendendo a somar uma quantidade não inteira de parcelas**. Revista Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, v. 2021, n.1, p.15-33. 2021.

GARBI, G. G. **A Rainha das ciências** – um passeio pelo maravilhoso mundo da Matemática. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2006.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**: 8° ano. Ensino Fundamental: anos finais, 4ª ed. São Paulo: FTD, 2018.

GRAHAM, R. L.; KNUTH, D. E.; PATASHNIK, O. **Concrete mathematics**: a foundation for computer science. 2nd ed. New York: Addison-Wesley Publishing, 1994.

IEZZI, G. et al. **Matemática**: ciência e aplicações - Ensino Médio. 9ª ed. São Paulo: Saraiva, 2016. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1, 2, 3).

LEONARDO, F. M. **Conexões com a matemática**. 3ª ed. São Paulo: Moderna, 2016. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1, 2, 3).

MATOS, M. P. **Séries e Equações Diferenciais.** Rio de Janeiro: Ed. Ciência Moderna, 2017. Disponível em: http://mpmatos.com.br/Serie_EDO/Series_EDO_2020.pdf. Acesso em: 21 abril 2021.

MÜLLER, M.; SCHLEICHER, D. How to add a noninteger number of Terms: From axioms to new identities. **The American Mathematical Monthly**, v. 118, n. 2, p. 136-152. 2011. Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.4169/amer.math.monthly.118.02.136. Acesso em: 21 abril 2021.

OZKAN, A.; OZKAN, E. M. Misconceptions on the Summation Symbol Subject and Solution Proposals. **Procedia: Social and Behavioral Sciences**, v. 186, pg. 670-673. 2015.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica** Matemática. Curitiba, PR: Secretaria de Estado da Educação, 2008. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf. Acesso em 21 abril 2021.

PARANÁ. **Referencial Curricular para o Ensino Médio do Paraná.** Secretaria de Educação e do Esporte do Estado do Paraná, 2021. Disponível em: https://professor.escoladigital.pr.gov.br/sites/professores/arquivos_restritos/files/documento/2022-02/ensino_medio_referencial_curricular_vol2_vf.PDF Acesso em: 02 abril 2022.

PROFMAT. **Dissertações do PROFMAT.** 2021. Disponível em: https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/. Acesso em: 01 mar. 2021.

ROSA, C. A. P. **História da ciência**: a ciência moderna. 2ª ed. Brasília: Editora FUNAG, 2012.

SBEM, Sociedade Brasileira de Educação Matemática. **Subsídios para a Discussão de Propostas para os Cursos de Licenciatura em Matemática**: Uma contribuição da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo: Editora SBEM, 2003.

SBM, Sociedade Brasileira de Matemática. **Diretrizes Curriculares para o Ensino de Matemática Proposta da Sociedade Brasileira de Matemática**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2015. Disponível em: https://sbm.org.br/wp-content/uploads/2015/01/Contribui%C3%A7%C3%A3o_da_SBM_Licenciatura_FINAL.pdf. Acesso em: 21 abril 2021.

SOUZA, J. R.; GARCIA, J. S. R. **Contato Matemática**. São Paulo: FDT, 2016. (Coleção do Professor de Matemática, v. 1, 2, 3).

STEWART, J. **Cálculo**. v. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TAHAN, M. **As Maravilhas da Matemática**. Rio de Janeiro: Edições Bloch, 1973.

THEODOROVSKI, R.; TREVISAN, A. L.; PINHEIRO, N. A. P. Uma experiência na Educação Básica com uso da calculadora HP-12C na investigação do comportamento de duas variáveis numéricas. **Revista Dynamis**, Blumenau, v. 28, n. 1, pg. 127-143, 2022.

Recebido em: 16 de agosto de 2021
Aprovado em: 21 de março de 2022