



A influência do uso do Origami no desenvolvimento do Pensamento Geométrico: um olhar a partir do Programa Origametria de Israel

Daniel Albernaz de Paiva Brito¹
Pontifícia Universidade Católica – SP – PUC-SP

Gabriel Loureiro de Lima²
Pontifícia Universidade Católica – SP – PUC-SP

RESUMO

Este artigo é originado de uma pesquisa de mestrado financiada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Brasil (CNPq) e apresenta perspectivas a respeito do Pensamento Geométrico e do uso do Origami para o seu desenvolvimento por meio da apresentação de um recorte de trabalhos atuais sobre o tema e da análise das estratégias didático-pedagógicas implementadas com crianças de 4 a 8 anos no âmbito do Programa Origametria de Israel. Como principais resultados apresentados, se destacam a importância dos ambientes de ensino e de aprendizagem que pretendem proporcionar o desenvolvimento do Pensamento Geométrico articularem diferentes modelos de desenvolvimento cognitivo e do Origami poder contribuir para isso.

Palavras-chave: Pensamento Geométrico; Origami; Origametria.

The influence of the use of Origami in the development of Geometric Thought: a look from the Israel Origametry Program

ABSTRACT

This article is originated from a Master's in Mathematics Education research funded by the National Council for Scientific and Technological Development of Brazil (CNPq) and presents perspectives on Geometric Thinking and the use of Origami for its development through the presentation of an excerpt of current academic works on the theme and the analysis of the didactic-pedagogical strategies implemented with children from 4 to 8 years old under the Israel Origametry Program. As the main result presented, we highlight the importance of teaching and learning environments that aim to provide the development of Geometric Thinking to articulate different models of cognitive development and the possibility of Origami being able to contribute to this.

Keywords: Geometric Thinking; Origami; Origametrics.

Submetido em: 28/10/2021

Aceito em: 06/05/2022

Publicado em: 03/06/2022

¹ Mestre em Educação Matemática pela PUC-SP. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2451-7886>. Email: daniel.albernaz@hotmail.com

² Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas e Doutor em Educação Matemática pelo Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP. É Professor Assistente-Doutor da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia (FCET) da PUC-SP, Professor do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP e Assistente Especializado da Pró-Reitoria de Graduação na mesma Universidade. ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5723-0582>. E-mail: glouirerolima@gmail.com.

La influencia del uso del origami en el desarrollo del pensamiento geométrico: una mirada desde el programa Origametria en Israel)

RESUMEN

Este artículo tiene su origen en una investigación de maestría financiada por el Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico de Brasil (CNPq) y presenta perspectivas sobre el Pensamiento Geométrico y el uso del Origami para su desarrollo a través de la presentación de un extracto de trabajos actuales sobre el tema y la Análisis de las estrategias didáctico-pedagógicas implementadas con niños de 4 a 8 años en el marco del Programa de Origametria de Israel. Como principales resultados presentados, se destaca la importancia de los entornos de enseñanza y aprendizaje que tienen como objetivo facilitar el desarrollo del Pensamiento Geométrico, articular diferentes modelos de desarrollo cognitivo y la posibilidad de que Origami pueda contribuir a ello.

Palabras clave: Pensamiento geométrico; Origami; Origametria.

INTRODUÇÃO

O objetivo deste artigo é apresentar algumas reflexões acerca da influência do uso do Origami no desenvolvimento do Pensamento Geométrico, adotando como objeto de estudo, além de trabalhos atuais sobre o tema, a análise das estratégias didático-pedagógicas implementadas por professores de Israel, no âmbito do Programa *Origametria*, com crianças de 4 a 8 anos de idade, dos níveis escolares equivalentes à parte da Educação Infantil (zero a 5 anos de idade) e dos Anos Iniciais (6 a 10 anos de idade) do Ensino Fundamental brasileiro.

A respeito deste Programa, consideramos relevante destacar que os seus principais organizadores são o "Centro Israelita de Origami" (*Israeli Origami Center - IOC*), a artista plástica e educadora israelense, Miri Golan, e o artista plástico inglês, Paul Jackson, e que as principais referências que utilizamos são as informações disponibilizadas na *Web* por meio dos endereços eletrônicos do Centro e do Programa e as publicações que resultaram das apresentações de Miri Golan e de Paul Jackson na quarta, quinta e sexta edições do "Encontro Internacional de Ciência do Origami, Matemática e Educação" (*International Meeting on Origami Science, Mathematics and Education - OSME*).

Além disso, como apontam Golan e Jackson (2009), destacamos que o *Origametria* teve início em 1992 quando Golan e o IOC elaboraram um Programa que foi chamado de Origami como Ferramenta de Aprendizado (*Origami as a Learning Tool*) e que tinha como foco o desenvolvimento de habilidades motoras, da percepção espacial, do pensamento lógico, do pensamento sequencial, da coordenação entre o olhar e o movimento das mãos, do foco, da concentração, do senso estético e da percepção tridimensional. Devido a implementação desse Programa ter evidenciado, como discutem Golan e Jackson (2009), que o Origami poderia ser uma importante ferramenta para o desenvolvimento do

Pensamento Geométrico, ele foi reelaborado por diversos especialistas e integrado ao currículo oficial de Geometria em todas as escolas de Israel.

Como destacam Golan e Jackson (2009) e Golan (2011), a partir dessa reelaboração, que foi concluída em 2002, esse Programa recebeu o nome de *Origametria* (junção das palavras origami e Geometria); passou por um ano de testes durante o qual mostrou-se bem sucedido; foi instituído como um programa de formação de professores da Educação Infantil em 2005; foi aprovado pelo Ministério da Educação de Israel em 2008; foi novamente reelaborado e expandido em 2010; e, atualmente, é aplicado para mais de 10 mil alunos de escolas judaicas, árabes e cristãs, que continuam a atestar sua efetividade para o desenvolvimento do Pensamento Geométrico, obtendo melhores notas no teste de Matemática TIMMS³, do qual os estudantes israelenses participam desde 1999.

Por fim, consideramos importante ressaltar que o *Origametria* está em constante processo de transformação e que só tratamos das suas características que consideramos relevantes para o desenvolvimento do Pensamento Geométrico.

Quanto a estrutura deste artigo, destacamos que ele é originado de uma pesquisa qualitativa de natureza bibliográfica e que é constituído, além desta introdução, por mais quatro seções: na primeira, apresentamos perspectivas teóricas sobre o Pensamento Geométrico, explicitando algumas de suas definições; em seguida, analisamos modelos de desenvolvimento do Pensamento Geométrico, como o de van Hiele e o SOLO (*Structure of Observed Learning Outcome*) para, posteriormente, tecermos considerações sobre o papel do professor nesse processo. Depois disso, apresentamos uma perspectiva de desenvolvimento do Pensamento Geométrico com o uso do Origami por meio da análise da estratégia do Programa *Origametria* de Israel – que adotamos como objeto de estudo por este ter sido pioneiro dentre os programas Origametria hoje existente em diferentes países –, e, por fim, encerrando o artigo, apresentamos algumas considerações decorrentes do estudo realizado.

O PENSAMENTO GEOMÉTRICO: PERSPECTIVAS TEÓRICAS

Com base principalmente em Meneses e Neto (2017) é possível apontar que, embora não haja consenso acerca da definição de Pensamento Geométrico, entende-se que ele

³ O *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) é um exame que avalia os conhecimentos de Matemática e Ciências de estudantes em todo o mundo. É realizado pela organização cooperativa internacional não governamental *International Association for the Evaluation of Educational Achievement*.

envolve representar matematicamente uma experiência ou problemática na espacialidade, realizar o tratamento adequado dessa representação e desassociá-la da realidade que a ensejou de forma que os objetos matemáticos nela articulados se apresentem como entidades válidas de conhecimento sintéticas e gerais que possam ser utilizadas em outras experiências. Além disso, a partir de Schoenfeld (1985), é possível apontar que também se entende que há uma diferença entre Pensamento Geométrico Elementar e Pensamento Geométrico Avançado que se expressaria na necessidade de alguém conseguir realizar argumentação geométrica como uma ferramenta de descoberta matemática para evidenciar o desenvolvimento do Pensamento Geométrico Avançado.

De acordo com Costa (2020), o Pensamento Geométrico carece de uma caracterização conceitual, mas ela pode ser elaborada a partir da articulação dos trabalhos de Efraim Fischbein, Raymond Duval e Luiz Carlos Pais que, embora apresentem algumas divergências em suas proposições, sugerem que o Pensamento Geométrico pode ser caracterizado como a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos e de entender e aplicar a Geometria como uma ferramenta para a compreensão do mundo físico e como um modelo matemático para a compreensão do mundo teórico.

Como indica Costa (2020), para Fischbein, a construção de conhecimentos geométricos ocorre por meio da interação entre aspectos figurativos e conceituais relacionados a Geometria, no sentido de que as figuras geométricas remetem a conceitos geométricos cuja articulação para alterá-las e suscitar novos conceitos consistiria no Pensamento Geométrico. Já em relação a Duval, Costa (2020) aponta que tal pesquisador entende que a construção do conhecimento geométrico ocorre por meio da articulação dos objetos geométricos em diferentes registros de representação, de forma que o Pensamento Geométrico consistiria na subordinação destes registros aos objetos representados. Por fim, em relação a Pais, Costa (2020) indica que ele entende que a construção do conhecimento geométrico ocorre por meio da articulação entre intuição, experimentação e teoria, de forma que o Pensamento Geométrico consistiria na capacidade de relacionar os objetos geométricos apresentados, por exemplo, em figuras, com as imagens mentais e com os conceitos geométricos apropriados.

Com base nos pensamentos desses três pesquisadores, Costa (2020) aponta que seria possível entender o Pensamento Geométrico como *a capacidade mental de construir conhecimentos geométricos e de aplicar os instrumentos da Geometria na resolução de problemas* e diferencia um Pensamento Geométrico Elementar de um Pensamento

Geométrico Avançado por meio da articulação das idéias de Tall (1995) e Leivas (2009). Em relação a tal diferenciação, as pesquisas de Schoenfeld (1985) a respeito da resolução de problemas lançam luz sobre várias das especificidades desses dois tipos de Pensamento que foram ressaltadas por Costa (2020). Como aponta Schoenfeld (1985), conseguir realizar argumentações geométricas dedutivas não indica que alguém tenha desenvolvido o Pensamento Geométrico Avançado, mas somente que tem familiaridade com Geometria e que consegue aplicar suas fórmulas adequadamente. Segundo ele, para que alguém evidencie ter desenvolvido o Pensamento Geométrico Avançado e seja o que ele chama de *expert* em Geometria, é necessário que consiga realizar a argumentação Geométrica para resolver problemas e para o aprendizado, de maneira a articular os resultados encontrados e aplicá-los em outros domínios de validade.

Com base nisso, Schoenfeld (1985) indica que há uma diferença entre um novíço e um *expert* em Geometria que seria apontada pelo seu foco de análise recair em diferentes aspectos dos problemas geométricos com os quais eles se deparam. De acordo com ele, na resolução de um problema geométrico, enquanto um novíço se foca nos objetos matemáticos apresentados no enunciado e busca articulá-los em uma solução, o *expert* se foca no entendimento da estrutura essencial do problema e no padrão de raciocínio necessário para resolvê-lo, o que pode fazê-lo não precisar articular todos os objetos matemáticos apresentados no enunciado para encontrar uma solução. Além disso, de acordo com o mesmo autor, a transição da condição de novíço para a de *expert* e do Pensamento Geométrico Elementar para o Avançado é indicada pela superação das dicotomias apresentadas no Quadro 1.

Quadro 1. Dicotomias que devem ser superadas na passagem do Pensamento Geométrico Elementar para o Avançado

<p>Exercícios x Problemas: Novíço: enfrenta dificuldades em domínios já conhecidos. <i>Expert</i>: supera dificuldades em novos domínios de validade matemáticos e geométricos.</p>
<p>Empirismo x Dedução: Novíço: foca-se na estrutura superficial do problema e busca provar o que já considera válido. <i>Expert</i>: foca-se na estrutura racional intrínseca das construções geométricas apresentadas e usa os mecanismos de prova como uma ferramenta de descoberta.</p>
<p>Forma x Significado: Novíço: foca-se na forma matemática das figuras. <i>Expert</i>: foca-se na significação matemática das relações entre as figuras.</p>
<p>Matemática Passiva x Matemática Ativa: Novíço: exerce uma Matemática Passiva: uma geometria para verificar o que já conhece. <i>Expert</i>: exerce um Matemática Ativa: uma argumentação geométrica para descobrir e conhecer novos objetos e aplicá-los em novos domínios de validade.</p>

Fonte: adaptado de Schoenfeld, 1985, p. 358 a 371

Tendo tudo isso em vista, a partir das observações desses autores, a questão que se impõe e que discutimos a seguir para aprofundarmos a apresentação do que é o Pensamento Geométrico é: *como proporcionar o desenvolvimento do Pensamento Geométrico Elementar e sua passagem para o Avançado?*

PRECEITOS TEÓRICOS RELATIVOS AO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Os preceitos teóricos sobre o desenvolvimento do Pensamento Geométrico se confundem com aqueles relacionados ao desenvolvimento do Pensamento Matemático em geral, que são, basicamente, dos três tipos indicados por Pegg e Tall (2010) conforme apresentamos no Quadro 2.

Quadro 2. Tipos de preceitos teóricos a respeito do desenvolvimento do Pensamento Matemático e Geométrico.

Locais: tratam de questões locais do desenvolvimento de raciocínios e de conceitos específicos (<i>local frameworks of conceptual growth</i>): como a teoria APOS (ação-processo-objeto-esquema) de Dubinsky e os ciclos (ou níveis) dos estágios do modelo SOLO de Biggs e Collins.
Globais: tratam de questões globais do desenvolvimento do saber matemático de um indivíduo a longo prazo (<i>global frameworks of long-term growth</i>): como a teoria de estágios de desenvolvimento de Piaget; o modelo de van Hiele (1986); a teoria dos modos ativo-icônico-simbólico (<i>enactive-iconic-symbolic</i>) de Bruner; e o modelo SOLO de Biggs e Collins.
Globais e Locais: tratam de questões globais e locais: como a teoria de Bruner; a teoria de Nuñez; a teoria de Lave e Wenger; e o modelo SOLO de Biggs e Collins.

Fonte: adaptado de Pegg e Tall, 2010

Como pode ser observado no Quadro 2, o modelo SOLO de Biggs e Collins aparece nos três grupos e isso ocorre devido a ele ter sido desenvolvido para ser abrangente e compreender as considerações de todos os demais preceitos teóricos citados. Tendo isso em vista, neste artigo focamos nas considerações a respeito do modelo SOLO e a respeito do modelo de van Hiele por eles serem, respectivamente, o mais abrangente e o mais conhecido quando se trata de estudar o desenvolvimento do Pensamento Geométrico.

MODELO DE VAN HIELE

Como aponta Golan (2011), o modelo de van Hiele de hierarquização do entendimento geométrico foi desenvolvido na década de 1950 pelo casal de matemáticos neerlandeses Pierre e Diana van Hiele e tem o objetivo de explicar como os alunos aprendem Geometria e por quais motivos muitos deles têm dificuldades com processos de cognição de alto nível, especialmente quando se espera que eles apresentem provas geométricas para os seus raciocínios.

De acordo com esse modelo, a forma como as crianças raciocinam sobre os conceitos geométricos pode ser analisada em cinco níveis sucessivos e elas poderão compreender tais conceitos se, no processo de ensino, for respeitada a passagem da sua capacidade de entendimento por cada um desses níveis. O Quadro 3 apresenta tais níveis da forma como eles são apresentados em van Hiele (1986), mas, como apontam Pegg e Tall (2010), é importante destacar que há pesquisadores que os interpretam com nomes diferentes, como, por exemplo, Hoffer (1981), citado por Pegg e Tall (2010), que os denomina, respectivamente, de: Nível 1: Reconhecimento; Nível 2: Análise; Nível 3: Ordenação; Nível 4: Dedução; e Nível 5: Rigor.

Quadro 3. Níveis do Modelo de van Hiele.

Nível 1 - Visualização: Neste nível, os alunos conseguem identificar as formas geométricas, entender as diferenças entre elas e aprender os seus nomes junto com alguns termos geométricos.
Nível 2 - Análise: Neste nível, os alunos conseguem identificar e analisar as características das formas e podem apreender suas definições, que passam de intuições inconscientes para conhecimentos conscientes.
Nível 3 - Abstração: Neste nível, os alunos conseguem identificar as diferenças e relações entre os polígonos, agrupá-los em conjuntos e subconjuntos e entender a importância do uso de suas definições geométricas corretas.
Nível 4 - Dedução: Neste nível, os alunos conseguem justificar os seus raciocínios geométricos por meio do uso de premissas, postulados, teoremas, axiomas e definições.
Nível 5 - Rigor: Neste nível, os alunos conseguem comparar sistemas baseados em diferentes axiomas e podem estudar várias geometrias sem que necessitem de exemplos concretos para auxiliá-los nos seus raciocínios.

Fonte: elaborado pelos autores a partir das ideias de van Hiele (1986)

A despeito de o modelo de van Hiele ser o mais conhecido para o desenvolvimento do Pensamento Geométrico, destacamos algumas considerações que o modelo SOLO traz a esse respeito por ele ter sido desenvolvido para englobar o de van Hiele e vários outros.

Modelo SOLO

Como o seu próprio nome indica, o modelo *Structure of Observed Learning Outcome* - *SOLO* (Estrutura de Resultados de Aprendizagem Observados) está centrado nos resultados do aprendizado e, ao contrário do modelo de van Hiele, não faz conjecturas a respeito das estruturas cognitivas dos sujeitos, mas as aúfere a partir dos seus comportamentos observados.

De acordo com Pegg e Tall (2010), o modelo SOLO compreende as ideias de Piaget, Dienes, Bruner e outros e apresenta o ciclo fundamental de construção de conceitos que está por trás dos mais diversos modos de pensar em cinco estágios sucessivos de crescimento do conhecimento que recebem os seguintes nomes: I) Sensório Motor; II) Icônico; III) Concreto-Simbólico; IV) Formal; e V) Pós-Formal.

Como apresentamos no Quadro 4, para os autores, cada um desses cinco estágios compreende três ciclos ou níveis específicos que podem se repetir e que são denominados por Pegg e Tall (2010) de uniestructural-multiestructural-relacional (UMR).

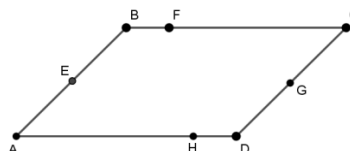
Quadro 4. Os 5 estágios do modelo SOLO e os seus possíveis ciclos ou níveis UMR.

ESTÁGIOS DO MODELO SOLO		CICLOS OU NÍVEIS UMR EM CADA ESTÁGIO
<p>V) PÓS-FORMAL (possivelmente a partir dos 22 anos)</p>	<p>O <u>jovem ou adulto</u> neste estágio consegue questionar a estrutura fundamental dos princípios e teorias das disciplinas.</p>	
<p>IV) FORMAL (entre os 15 e os 16 anos de idade)</p>	<p>O <u>adulto</u> está neste estágio quando aprende conceitos e teorias fundamentais de uma disciplina. O <u>adolescente</u> neste estágio não se restringe mais a referentes concretos e começa a considerar conceitos abstratos, princípios e teorias.</p>	
<p>III) CONCRETO-SIMBÓLICO (entre os 6 e 7 anos de idade)</p>	<p>o <u>adulto</u> está neste estágio quando começa a apreender a pensar e a se expressar em uma nova linguagem. a <u>criança</u> neste estágio pensa por meio do uso de um sistema de símbolos como a linguagem natural e a numérica (matemática primária).</p>	
<p>II) ICÔNICO (a partir dos 2 anos de idade)</p>	<p>o <u>adulto</u> neste estágio desenvolve o tipo de conhecimento intuitivo envolvido na compreensão artística e musical. a <u>criança</u> neste estágio internaliza ações na forma de imagens e as utiliza junto com palavras para representar objetos e eventos.</p>	
<p>I) SENSÓRIO-MOTOR (logo depois do nascimento)</p>	<p>o <u>adulto</u> neste estágio desenvolve habilidades físicas como as das práticas esportivas. o <u>recém-nascido</u> neste estágio reage ao ambiente físico e desenvolve habilidades motoras.</p>	

Fonte: Pegg e Tall, 2010

Para exemplificar o funcionamento de um ciclo UMR no estágio Formal e de um ciclo UMR no estágio Concreto-Simbólico, Pegg e Davey (1998) utilizam o seguinte exercício geométrico e fazem as seguintes considerações que julgamos importantes por dizerem respeito ao funcionamento do modelo SOLO relacionado especificamente ao desenvolvimento do Pensamento Geométrico:

No paralelogramo a seguir, ABCD é um paralelogramo, $AE = CG$ e $BF = DH$. Prove que $EH = FG$.



(PEGG; DAVEY, 1998, p. 130).

Como respostas que estudantes no estágio Formal poderiam dar a este exercício, Pegg e Davey (1998) indicam o seguinte:

Uniestructural 1 (U1): Os estudantes demonstraram uma habilidade de usar o conceito de congruência, mas a aplicação da congruência em uma situação nova que parecia colocá-los sob alguma pressão fez com que eles perdessem o foco em relação ao propósito da questão.

Multiestructural 1 (M1): Os estudantes não tinham uma visão geral clara do que era requerido para completar a questão. Eles frequentemente perdiam o caminho rumo ao processo de solução ou, alternativamente, apresentavam uma série sequencial de passos, mas não demonstravam clareza sobre o ponto final (desses passos) até que ele fosse alcançado. Eles pareciam ter pouco problema com o conceito de congruência, mas tinham dificuldade em manter na mente todos os elementos relevantes do processo de questionamento e de solução.

Relacional 1 (R1): Os estudantes nessa categoria escolheram usar triângulos congruentes e não deram indicações de estratégias alternativas. Eles estavam seguros em relação à congruência e aplicaram a ideia eficientemente e acuradamente. As respostas que eles apresentaram se mostraram coerentes com o contexto da questão. Não houve, no entanto, nenhuma indicação de um princípio geral subjacente.

Uniestructural 2 (U2): Os estudantes tinham uma visão geral clara da questão. As respostas dadas eram concisas, precisas e indicavam que eles estavam confortáveis com a suficiência de várias propriedades (como, por exemplo, que linhas que se bisseccionam podem ser consideradas como sendo as diagonais de um paralelogramo). Além disso, foi de impressionar o modo como eles puderam perceber a solução em termos de um princípio geral que não estava na questão proposta (PEGG; DAVEY, 1998, p. 130-132, tradução nossa).

De acordo com os autores:

Essas categorizações indicam de forma clara características importantes de respostas pré-formais (*early formal*) em Geometria. Em particular, o processo dedutivo é evidente, mesmo que de um modo limitado, no nível U1. A habilidade de considerar os elementos que sugerem uma relação de segunda ordem (como, por exemplo, a aplicação da congruência como uma ferramenta em uma situação nova) é também um importante indicador do pensamento formal. A resposta U2 mostra o grau de abstração para além daquele de simplesmente aplicar situações congruentes (PEGG; DAVEY, 1998, p. 130-132, tradução nossa).

Passamos então a apresentar algumas considerações acerca das possíveis complementariedades que podem ser percebidas entre os modelos de van Hiele e SOLO.

COMPLEMENTARIDADE DOS MODELOS DE VAN HIELE E SOLO

No trabalho intitulado *A taxonomia SOLO e os níveis de van Hiele*, Ceia (2002) destaca que, embora o modelo de van Hiele tenha sido bastante testado com relativo sucesso, muitos autores consideram que ele apresenta debilidades e indica como um dos seus aspectos mais problemáticos a forma pouco precisa como estão definidos os seus vários níveis de desenvolvimento, o que ele entende impedir a determinação clara e inequívoca do nível de desenvolvimento de um indivíduo.

Para justificar essas afirmações, Ceia (2002) cita trabalhos cujos autores “identificaram alunos que aparentemente desenvolviam, simultaneamente, competências de dois níveis consecutivos, chegando a apresentar aquisições de um nível superior antes das aquisições correspondentes ao anterior” (CEIA, 2002, p. 241). Além disso, o autor salienta que “não está suficientemente estudada a possibilidade de coexistirem competências de níveis distintos para diferentes conceitos, ou seja, não é claro se quando um indivíduo apresenta um conjunto de competências relativas a um determinado conceito, significa que o seu nível de desenvolvimento relativo a outros conceitos é idêntico” (CEIAM 2002, p. 241).

Para Ceia (2002) é possível, portanto, defender que o desempenho dos alunos não é exclusivamente dependente das suas capacidades cognitivas e que pode variar no curso da realização de uma mesma tarefa e que, como preconizado no modelo SOLO, as análises das habilidades dos estudantes podem ser enriquecidas com informações sobre as suas produções nas tarefas realizadas.

Em sua pesquisa, Ceia (2002) busca então explicitar subcategorias do nível *Análise* do modelo de van Hiele a partir do modelo SOLO por meio da análise de entrevistas com alunos de do 3º ano da escolaridade portuguesa (cerca de 8 anos de idade), realizadas em três momentos, no contexto de uma atividade sobre as características das figuras planas: antes de elas serem abordadas em aula, logo após essa abordagem e três meses depois.

A partir dessa análise, conclui que:

Parece ser possível considerar no nível de Análise de van Hiele, pelo menos, duas categorias de respostas, correspondendo, respectivamente, às categorias Uniestrutural e Multiestrutural da taxonomia SOLO:

- A primeira delas corresponde a enunciação de uma ou duas características da figura plana, eventualmente algumas características irrelevantes surgem misturadas com as relevantes, e não se evidenciando qualquer capacidade de as relacionar; e
- A segunda correspondendo ao enunciado de múltiplas características, eventualmente todas relevantes, sem as conseguir relacionar, mas referindo a perpendicularidade ou o paralelismo (CEIA, 2002, p. 253).

Nota-se então que “parece existir alguma evidência que aponta para que a taxonomia SOLO possa contribuir para uma definição mais precisa dos níveis de van Hiele” (CEIA, 2002, p. 254), ou, em outras palavras, que é possível uma articulação desses dois quadros teóricos visando reflexões mais detalhadas a respeito do desenvolvimento do Pensamento Geométrico dos estudantes. A respeito desse ponto, entendemos importante ressaltar que Pegg e Davey (1998) concordam com Ceia (2002) e apontam que os modelos de van Hiele e o modelo SOLO:

[...] compartilham muitos traços comuns e se apoiam mutuamente. As habilidades de pensamento só podem ser rastreadas pela resposta do indivíduo aos estímulos, mas as respostas nem sempre representam com precisão o grau de pensamento envolvido. Aspectos como aprendizagem mecânica, motivação e familiaridade com as tarefas precisam ser levados em consideração antes que uma correspondência um a um possa ser desenhada. Alternativamente, o modelo van Hiele pode ser mais apropriadamente visto como uma construção teórica que fornece alguma visão global geral do processo de pensamento em geometria, enquanto o modelo SOLO pode descrever melhor as variações no comportamento individual (PEGG; DAVEY, 1998, p. 123– tradução nossa).

Além disso, Pegg e Davey (1998) sugerem que o modelo SOLO possui algumas características que complementam o modelo de van Hiele como, por exemplo, a sua maior sensibilidade ao contexto e a sua conseqüente potencialidade de utilizar as respostas dos estudantes para evidenciar que os níveis de desenvolvimento nos quais eles se encontram podem se alterar dependendo das tarefas envolvidas. Por fim, esses mesmos autores também

indicam que análises conduzidas segundo o modelo SOLO podem dar subsídios para que se possa compreender a natureza do crescimento cognitivo individual em Geometria e explorar de forma individualizada os motivos que possibilitam que um determinado estudante transite de um nível do modelo de van Hiele para o subsequente.

A partir das observações desses autores, ressaltamos que se revela importante investigar se haveria outras propostas teóricas acerca da passagem de um nível para outro que levassem em conta outras perspectivas desse processo como, por exemplo, as relacionadas ao papel do professor para que ele aconteça, uma vez que, como destaca Ceia (2002, p. 253), a partir das considerações de Fuys, Geddes e Tischler (1988), “as diferenças observadas no desempenho dos alunos, originando respostas de categorias distintas em momentos diversos, pode ser atribuída aos diferentes tipos de interação que se estabelecem entre alunos e professores”.

O PAPEL DO PROFESSOR NO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Reflexões a este respeito podem ser encontradas em Nascimento (2016) que indica que os níveis de entendimento geométrico de van Hiele podem ser articulados à teoria da Zona de Desenvolvimento Proximal de Vygotsky para ser analisado como alguém progride de um nível para o outro e qual seria o papel do professor nesse desenvolvimento. Como apresenta essa autora, segundo a teoria de Vygotsky, o Nível de Desenvolvimento Real indica o âmbito de saberes já dominado pelo aluno e o Nível de Desenvolvimento Potencial indica o âmbito de saberes que pode se tornar acessível ao aluno por meio das interações sociais em classe com o professor e na sociedade com a sua comunidade. Entre esses dois Níveis, está a Zona de Desenvolvimento Proximal na qual deve se centrar o trabalho do professor e na qual tem fundamental importância a interação do aluno com os seus colegas e com o seu meio social.

Tendo isso em vista, com base na articulação feita por Nascimento (2016), para auxiliar a progressão dos alunos pelos níveis de um modelo ou teoria como o de van Hiele, o professor deve conhecer o Nível de Desenvolvimento Real do aluno e proporcionar que ele atinja o seu Nível de Desenvolvimento Potencial, que corresponde ao saber que ele pode conseguir dominar e articular a partir dos saberes com os quais ele já tem familiaridade. Sendo assim, de acordo com Nascimento (2016), a chave para o desenvolvimento do Pensamento Geométrico estaria na prática do professor e do aluno em sala de aula e em

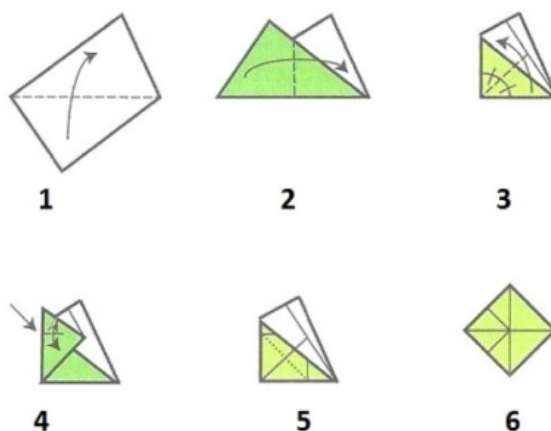
comunidade, o que ilumina a importante questão acerca de qual prática poderia ser essa, o que será tratado na próxima seção.

O USO DO ORIGAMI PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Como indicam Tubis e Wang-Iverson (2018) e Friedman (2018), dentre as práticas de ensino que buscam auxiliar os alunos a desenvolver o Pensamento Geométrico se destacam as que fazem uso da dobradura em papel ou Origami, uma arte que tem origens controversas e que tem sido cada vez mais utilizada para o ensino de ciências e de Matemática devido à afinidade entre as suas dinâmicas e como os objetos dessas áreas são tratados em suas respectivas linguagens (MONTEIRO, 2008). Tradicionalmente conhecido como a arte da criação de formas por meio da dobradura de um papel quadrado sem o uso de recortes ou colas, não há consenso sobre a definição de Origami, sobre quais são os critérios que uma dobradura deve obedecer para ser considerada como tal e nem sequer sobre sua origem que, como indica Hatori (2016), seria europeia e não chinesa ou japonesa como muitos acreditam.

Como apontam Tubis e Whang-Iverson (2018), um dos primeiros teóricos a apresentar uma proposta de desenvolvimento do Pensamento Geométrico por meio de dobraduras foi o pedagogo alemão Friedrich Wilhelm Froebel (1782-1852), que defendia que a dobradura em papel e a manipulação de materiais concretos poderia promover a aprendizagem de Geometria nos anos iniciais da Educação. Uma das dobraduras propostas por Froebel como um presente que as crianças poderiam dar para os pais e mostrar sua habilidade de "fazer as coisas ficarem no lugar" é a apresentada na Figura 1, que é denominada por Tubis e Wang-Iverson (2018) como dobrando um quadrado perfeito a partir de qualquer papel irregular.

Figura 1. Etapas da dobradura "dobrando um quadrado perfeito a partir de qualquer papel irregular" de Froebel.



Fonte: adaptado de Tubis e Whang-Iverson, 2018, p. 181

De acordo com os mesmos autores (TUBIS; WHANG-IVERSON, 2018), a partir dessa dobradura, Froebel indicava que era possível mostrar para as crianças, por exemplo: na etapa 2, como se forma um ângulo reto unindo duas partes adjacentes de uma linha formada no papel; na etapa 2, como ocorre a bissecção perpendicular de um segmento; e, nas etapas 2 e 3, como ocorre a bissecção de ângulos.

As propostas de Froebel para desenvolver o Pensamento Geométrico foram significativamente expandidas pelo matemático indiano Tandalam Sundaro Row (1832-1923) que tratou da apresentação de provas geométricas por meio de dobraduras no livro *Geometric Exercises in Paper Folding* publicado em 1883 (TUBIS; WHANG-IVERSON, 2018, FRIEDMAN, 2018). Como indica Friedman (2018), o livro de Row influenciou diversos pesquisadores em Educação como Wilhelm Ahren's, Henry Deatour e Howard Gardner, bem como a expansão do uso da dobradura em papel ou Origami para o desenvolvimento do Pensamento Geométrico até os dias de hoje, como será apresentado a seguir por meio da análise do Programa *Origametria* de Israel.

O USO DO ORIGAMI PELO PROGRAMA *ORIGAMETRIA* DE ISRAEL

Esta seção analisa como o Programa *Origametria* articula o modelo de van Hiele (1986) e o uso do Origami com o objetivo de desenvolver o Pensamento Geométrico em crianças de 4 a 8 anos em Israel. De acordo com Golan (2011), o Programa foi implementado

sem que fosse baseado em uma teoria específica, mas muitos paralelos foram percebidos entre a sua estrutura e os níveis do modelo de Hiele, de forma que ele passou tê-lo como referência e suas atividades de Origami passaram a ser elaboradas como uma ferramenta para que os alunos visualizem, analisem e abstraia as propriedades dos conceitos geométricos conforme indicado pelos três primeiros níveis de tal modelo.

No quadro 5, apresentamos os níveis do modelo de van Hiele e suas correspondências com as etapas do *Origametria* de acordo com informações disponibilizadas na página que o Programa mantém na *Web* e conforme apresentadas em Golan e Jackson (2009), Golan (2011) e Golan e Obernam (2015).

Quadro 5. Níveis de entendimento geométrico do modelo de van Hiele e sua correspondência nas etapas do Programa *Origametria*.

Previsões do modelo de van Hiele	Etapas do Programa <i>Origametria</i>
<p>Nível 0 - Visualização: Os alunos conseguem identificar as formas geométricas, entender as diferenças entre elas e aprender os seus nomes junto com alguns termos geométricos.</p>	<p>Educação Infantil e início do Ensino Fundamental: São realizados Origamis com os quais os alunos são expostos a formas simples, como os quadrados, os triângulos e os retângulos, e a expressões visuais de conceitos básicos, como os conceitos de lado, de vértice e de diagonal.</p>
<p>Nível 1 - Análise: Os alunos conseguem identificar e analisar as características das formas e podem apreender suas definições, que passam de intuições inconscientes para conhecimentos conscientes.</p>	<p>Segundo ano do Ensino Fundamental: São realizados Origamis com os quais os alunos são expostos a diversas formas por meio dos seus conceitos e das suas definições geométricas precisas como as de triângulo isósceles e de simetria linear.</p>
<p>Nível 2 - Abstração: Os alunos conseguem identificar as diferenças e relações entre os polígonos, agrupá-los em conjuntos e subconjuntos e entender a importância do uso de suas definições geométricas corretas.</p>	<p>Terceiro ano do Ensino Fundamental: São realizados Origamis com os quais os alunos testam as características dos conceitos geométricos em diferentes contextos e são instigados a separar e definir formas parecidas, como triângulos escalenos e isósceles ou paralelogramos e rombos.</p>

Fonte: elaborado pelos autores a partir de Golan e Jackson, 2009; Golan, 2011; Golan e Oberman, 2015; van Hiele, 1986 e Burger e Chaughnessy, 1996

Como salientam Golan e Oberman (2015), os professores que aplicam o *Origametria* nas escolas são selecionados por meio de um curso de formação no qual eles aprendem os conceitos de Geometria que vão ensinar e os modelos de Origami pelos quais poderão

trabalhá-los em aula, de forma que o Origami lhes é apresentado como um meio de fazer com que os alunos visualizem e experimentem concretamente os conceitos geométricos a serem apreendidos de acordo com o currículo nacional de Israel.

Ainda de acordo com Golan e Oberman (2015), o curso aceita no máximo 20 professores em cada ciclo, é dividido em quatro seções que totalizam 32 horas de aula ao longo de vários meses e, organizado conforme indicado no Quadro 6, compreende doze atividades que se relacionam diretamente aos tópicos do currículo de Geometria proposto pelo Ministério da Educação de Israel.

Quadro 6. Etapas do curso de formação para os professores ministrarem o Programa *Origametria*.

Etapa 1: (10 horas): Aulas sobre os tópicos de Geometria para crianças de 4 a 8 anos de acordo com o currículo de Israel com base na prática do Origami.	Etapa 2: (12 horas) Aulas sobre os métodos de ensino do Programa <i>Origametria</i> nas quais os professores que o aplicaram em suas escolas compartilham as suas experiências.	Etapa 3: (10 horas) Aulas sobre conceitos geométricos adicionais nas quais os professores apreendem geometria tridimensional básica para que sintam segurança ao ensinar.
--	---	---

Fonte: elaborado pelos autores a partir das ideias de Golan e Jackson, 2009; Golan e Oberman, 2015

Por fim, como também indicado por Golan e Oberman (2009), em todas essas etapas, junto com o conteúdo de Geometria relacionado ao Origami, os professores estudam preceitos teóricos relacionados às ideias de Piaget, de van Hiele e de Vygotsky sobre como as crianças aprendem e sobre como elas são aplicadas no Programa *Origametria*. Por fim, depois que o curso é concluído, ocorre uma de suas etapas mais importantes, que é o período durante o qual os professores que o ministraram visitam cada um dos professores que se formaram para observá-los em suas escolas e ajudá-los a ajustar a implementação do Programa às suas realidades específicas (GOLAN; OBERMAN, 2015).

Quanto a preparação das aulas do programa, Golan e Jackson (2009) apontam que elas são elaboradas pelos professores que participaram da formação em cooperação com os docentes de Matemática das escolas em que atuam. Segundo esses autores, o objetivo desta cooperação é que eles selecionem juntos o conteúdo de Geometria que irão ensinar nas suas respectivas aulas e um modelo de Origami por meio do qual ele possa ser explorado de forma focada pelo professor de *Origametria* na interação que ele terá com os alunos. Uma vez selecionados o tópico e o modelo de Origami que vai ser trabalhado (sempre animais e brinquedos de ação para que os alunos se sintam realizados ao terminarem as suas tarefas),

os professores do *Origametria* praticam a construção do Origami, identificam exemplos do tópico selecionado em sua dobradura e programam em quais momentos de sua realização em aula ela será interrompida para que o tópico seja ensinado. Os professores de Matemática e de *Origametria* trabalham com o tópico selecionado, concomitantemente, em suas respectivas aulas, com o professor de *Origametria* seguindo uma sequência de aula cujos princípios norteadores são detalhados por Golan e Oberman (2015) que é baseada na realização das dobraduras e não no Origami pronto, como é apresentado no Quadro 7.

Quadro 7. Sequência de aula a ser seguida pelo professor do *Origametria*.

<p>Insight de Geometria (<i>Geometry insight</i>)</p> <p>Apresentação do tópico de Geometria que será trabalhado, sem que seja dado um nome ao Origami que será feito para que os alunos tenham sua atenção fixa no conteúdo de Geometria, não se refiram a cada dobra do Origami como uma parte de algo que será obtido (por exemplo, a asa de um cisne) e tenham uma surpresa no final da tarefa.</p>
<p>Exploração (<i>Exploration</i>)</p> <p>Condução das dobraduras de forma que os alunos busquem o tópico selecionado em sua sequência.</p>
<p>Propriedades e Contexto (<i>Properties and Context</i>)</p> <p>Estudo do tópico de diferentes formas nas interrupções programadas durante a dobradura e depois dela ter sido realizada.</p>
<p>Resumo da Lição (<i>Lesson Summary</i>)</p> <p>Checagem do aprendizado de todos os alunos e realização de um resumo do tópico ensinado com base no Origami que eles poderão levar para casa, que raramente tem sua geometria final analisada.</p>

Fonte: elaborado pelos autores a partir das ideias de Golan e Jackson, 2009

De acordo com Golan e Jackson (2009) e Golan e Oberman (2015), as interações dos professores com os alunos do *Origametria* seguem os princípios apresentados no Quadro 8 e são baseadas no encorajamento, na imaginação e no aprendizado por meio da experimentação, tendo como um dos principais objetivos estimular os estudantes a realizarem as tarefas com autonomia e a se sentirem realizados com os resultados alcançados.

Quadro 8. Estratégia didática das aulas do *Origametria*: princípios que os professores devem seguir em suas relações com os alunos.

<p style="text-align: center;">Princípio I:</p> <p>O professor deve praticar a dobradura do modelo selecionado para que possa demonstrá-la da forma mais fácil possível para os alunos.</p>
<p style="text-align: center;">Princípio II:</p> <p>O professor deve omitir o nome do modelo que será obtido com as dobraduras para que os alunos tenham a sua atenção dirigida ao processo de sua realização e possam se surpreender com os resultados alcançados.</p>
<p style="text-align: center;">Princípio III:</p> <p>O professor deve ter o seu próprio papel para mostrar aos alunos as etapas das dobraduras e jamais tocar nas dobraduras dos alunos para que eles as percebam como um trabalho próprio que eles conseguiram realizar sozinhos.</p>
<p style="text-align: center;">Princípio IV: (<i>positive reinforcement</i>)</p> <p>O professor deve observar as dobraduras dos alunos e encorajá-los a continuar sua realização.</p>
<p style="text-align: center;">Princípio V: (<i>positive feedback</i>)</p> <p>O professor deve elogiar as realizações dos alunos e conduzi-los pela realização das dobraduras de forma a não os expor às noções de "erro" ou de "acerto", já que se entende que cada um é capaz de atingir os resultados almejados conforme o seu próprio desenvolvimento.</p>
<p style="text-align: center;">Princípio VI:</p> <p>O professor deve levar em conta que os alunos têm diferentes habilidades motoras e noções de que seja preciso e se algum aluno pedir a opinião dele sobre a qualidade do seu trabalho com a dobradura ele deve lhe devolver a indagação perguntando qual a opinião dele e se ele acredita que poderia fazê-lo melhor, para ajudá-lo a desenvolver sua autocrítica e evitar que se sinta desapontado.</p>

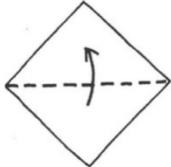
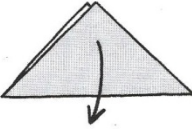
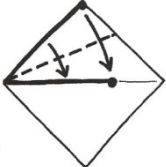
Fonte: elaborado pelos autores a partir das ideias de Golan e Jackson, 2009; Golan e Oberman, 2015

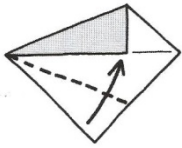
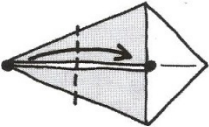
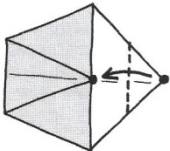
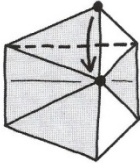
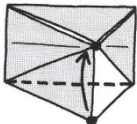
Além disso, segundo Golan (2011), a estratégia didática do *Origametria* leva em conta que os alunos compreendem um conteúdo somente quanto estão suficientemente maduros para entendê-lo e é elaborada com o objetivo de fazê-los atingir esse amadurecimento no tempo requerido pelas diretrizes de ensino do Ministério da Educação de Israel, o que é alcançado com os professores proporcionando aos alunos diversas oportunidades de eles visualizarem e experimentarem concretamente os conteúdos geométricos a serem apreendidos por meio de sua repetida identificação nas atividades de Origami e por meio de vários questionamentos que eles poderão cooperar entre si para responder.

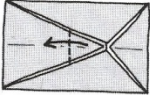
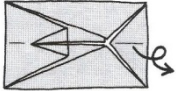
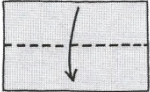
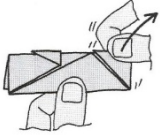
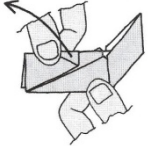
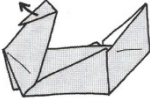
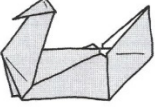
Tendo em vista esses princípios que são seguidos pelo *Origametria*, analisamos a atividade que Golan (2011) dá como exemplo na publicação oriunda de sua apresentação no

quinto "Encontro Internacional de Ciência do Origami, Matemática e Educação", que ocorreu 2010, em Singapura, e que consiste no Origami denominado de "pato chinês tradicional" (*tradicional chinese duck*). A atividade, segundo a autora, é apropriada para alunos da Educação Infantil ou dos primeiros anos do Ensino Fundamental com idades entre 4 e 8 anos. As etapas da sua realização contemplam questões relacionadas tanto ao nível visual (nível 0) quanto ao nível analítico (nível 1) do modelo de van Hiele como é apresentado no Quadro 9. No contexto educacional brasileiro, a nosso ver, essa atividade da forma como é proposta por Golan (2011) seria adequada somente para crianças do Ensino Fundamental, já que, na Educação Infantil, centrada na ludicidade e no desenvolvimento da coordenação motora, o nível visual do modelo de van Hiele não é atingido por não ser necessária qualquer menção aos nomes das figuras apresentadas.

Quadro 9. Sequência de realização do Origami "pato chinês tradicional" com perguntas direcionada para alunos do Ensino Infantil (nível Visual de van Hiele) ou do Ensino Fundamental (nível Analítico de Hiele).

	<p>Etapa 1:</p> <p>Nível Visual:</p> <p>"Quais polígonos você pode encontrar?"; "Quais triângulos você pode identificar?"; "Quais tipos de ângulos você pode encontrar no quadrado?";</p> <p>Nível Analítico:</p> <p>"Você sabe qual o resultado da soma das medidas dos ângulos em um quadrado?"</p>
	<p>Etapa 2:</p> <p>Nível Visual:</p> <p>"Quais polígonos você pode encontrar?"; "Quais triângulos você pode identificar?"; "Quais são os ângulos desse triângulo?"</p> <p>Nível Analítico:</p> <p>"Você sabe qual o resultado da soma das medidas dos ângulos em um triângulo?"</p>
	<p>Etapa 3:</p> <p>Nesta etapa, o professor ensina aos alunos a dobradura, mas não tem necessidade de analisar sua geometria, já que ela implicaria no tratamento de bissecções e esse é um tópico de Geometria que não é requerido no currículo da Educação Infantil</p>

	<p>ou dos primeiros anos do Ensino Fundamental, nem em Israel nem no Brasil.</p>
	<p>Etapa 4:</p> <p>Nível Visual:</p> <p>"Quais polígonos você pode encontrar?"; "Quais triângulos você pode encontrar?"; "Quais os tipos de ângulos que você pode encontrar?"</p> <p>Nível Analítico:</p> <p>"Quais são os ângulos dos quadriláteros criados depois dessa dobra ter sido realizada?"</p>
	<p>Etapa 5</p> <p>Nível Visual:</p> <p>"Quais polígonos você pode encontrar?"; "Quais triângulos você pode encontrar?"; "Quais tipos de ângulos você pode ver nesses polígonos?";</p> <p>Nível Analítico:</p> <p>"Quais são os ângulos que você pode identificar em cada quina?"</p>
	<p>Etapa 6</p> <p>Nível Visual:</p> <p>"Quais polígonos você pode encontrar?"; "Quais triângulos você pode encontrar?"; "Quais tipos de ângulos você pode ver nesse pentágono?"</p> <p>Nível Analítico:</p> <p>"Você sabe qual o resultado da soma dos graus dos ângulos de um pentágono?"</p>
	<p>Etapa 7</p>
	<p>Etapa 8</p>
	<p>Etapa 9</p> <p>Nível Visual:</p>

	<p>"Quais polígonos você pode encontrar?"; "Quais triângulos você pode encontrar?"; "Quais tipos de ângulos você pode encontrar?"</p> <p>Nível Analítico:</p> <p>"Você pode demonstrar que o resultado da soma das medidas dos ângulos de onde os quatro triângulos se encontram é igual a 360°?"</p>
	<p>Etapa 10</p>
	<p>Etapa 11:</p> <p>Nível Visual:</p> <p>"Quantos retângulos você pode encontrar?"</p>
	<p>Etapa 12</p>
	<p>Etapa 13</p>
	<p>Etapa 14</p>
	<p>Etapa 15:</p> <p>Nesta etapa, o modelo está concluído e o professor não deve se referir a ele por um nome específico, para que os alunos se sintam instigados a usar sua criatividade e imaginação ao nomeá-lo e brincar com ele como quiserem.</p>

Fonte: Golan, 2011, p.146-149

Por meio do Quadro 9, percebe-se que os organizadores do *Origametria* buscam possibilitar que o Origami contribua para o desenvolvimento do Pensamento Geométrico por meio de atividades que levam em conta o modelo de van Hiele (1986) para que o professor proporcione amplas oportunidades de os alunos visualizarem e pensarem a respeito

dos tópicos de Geometria conforme eles aparecem em diferentes momentos da execução das dobraduras.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base em tudo o que foi apresentado, em relação ao que é o Pensamento Geométrico, concluímos que não há unanimidade entre os estudiosos acerca da sua caracterização, como é apontado por Costa (2020), mas que ele pode ser entendido como compreendendo as capacidades de alguém representar matematicamente uma problemática na espacialidade, realizar o tratamento adequado dessa representação e desassociá-la da realidade que a ensejou de forma que os objetos matemáticos nela articulados se apresentem como entidades válidas de conhecimento sintéticas e gerais que podem ser utilizadas em outras situações.

A respeito dos diferentes modelos e teorias relacionados ao desenvolvimento do Pensamento Geométrico, concluímos que os quadros teóricos sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática e, particularmente, de Geometria, devem ser entendidos como ferramentas complementares para o entendimento da complexidade dessas atividades. Assim como ocorre em relação ao desenvolvimento de outras modalidades de Pensamento Matemático, o desenvolvimento do Pensamento Geométrico depende de um compromisso com a pesquisa teórica e empírica e de um esforço que envolve desde a formação de professores até considerações acerca das noções que explicita ou implicitamente interferem no desenvolvimento de habilidades básicas pelos alunos.

Um exemplo de experiência que nos pareceu responder adequadamente ao desafio que é desenvolver o Pensamento Geométrico em crianças é a do Programa *Origametria* de Israel, no qual a adoção do modelo de van Hiele associado ao Origami é acompanhada de um comprometimento com diversos aspectos dos ambientes de ensino e de aprendizagem que transcendem as considerações de qualquer modelo ou teoria específicos. Há nesse Programa um compromisso com a formação de professores e com as estratégias didáticas que eles irão utilizar de forma cooperativa para que o uso do Origami associado ao modelo de van Hiele efetivamente auxilie no desenvolvimento do Pensamento Geométrico dos alunos.

Encerramos esse artigo destacando que, como evidenciam os resultados obtidos pelo Programa *Origametria*, de fato, o Origami traz possibilidades para o desenvolvimento do Pensamento Geométrico, mas é importante a realização de mais pesquisas sobre o tema, principalmente a respeito de como ele poderia ser usado em um contexto como o atual, no

qual cada vez mais se tem sido necessária à educação a distância. Em relação a este aspecto, uma possibilidade interessante é a indicada por Klemer e Rapoport (2020), que apresentam diversas atividades utilizadas pelo Programa *Origametria* adaptadas ao *software* GeoGebra e outras considerações sobre a adaptação do Origami aos ambientes virtuais, com as quais o primeiro autor deste texto pretende contribuir em futuros trabalhos.

REFERÊNCIAS

BURGER, W. F. & SHAUGHNESSY, M. **Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry**. *Journal for Research in Mathematics Education*. 1996. pp. 31-48. Disponível em:

<<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.584.2471&rep=rep1&type=pdf>>. Acesso em 09 10 2021

CEIA, M. J. M. A Taxonomia SOLO e os níveis de Van Hiele. Comunicação apresentada no **XI Encontro de Investigação em Educação Matemática**. Coimbra: 2002. Disponível em:

<https://www.researchgate.net/publication/237709095_A_taxonomia_SOLO_e_os_niveis_de_van_Hiele> Acesso em 09 10 2021

COSTA, A. P. Pensamento Geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischebein, Duval e Pais. **Revista Paranaense de Educação Matemática**. PR, Brasil, v.09, n.18, pp. 152-179, jan-jun, 2020. Disponível em:

<<http://revista.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/651/550>> Acesso em: 09 10 2021

FRIEDMAN, M. Mathematical Recreational Folding in the 20Th Century: Between Row and Gardner. In: LANG, R. J.; BOLITHO, M.; YOUT, Z.; BOAKES, N.; BUDD, C.; CHEN, Y.; FRECKER, Y.; MITANI, J.; PARDO, J.; PAULINO, C.; SCHENK, M.; TACHI, T.; UEHARA, R.; WANG-IVERSON, P. (Eds.) **The Proceeding from the 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics, and Education: Vol 1: Design, Education, History and Science**, pp. 165-180, Holywell Hill, Irlanda, Tarquin, 2018

GOLAN, M & JACKSON, P. Origametria: A Program to Teach Geometry and to Develop Learning Skills Using the Art of Origami. In: LANG, R. J. (Ed.) **ORIGAMI4: FOURTH INTERNATIONAL MEETING OF ORIGAMI SCIENCE, MATHEMATICS AND EDUCATION**. Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group, pp. 459-469, 2009

GOLAN, M & OBERMAN, J. The Kindergarten Origametria Program. In: MIURA, K., KAWASAKIM T. & IVERSON-WANG, P. (Eds.). **ORIGAMI6: PROCEEDINGS OF**

THE SIXTH INTERNATIONAL MEETING ON ORIGAMI SCIENCE, MATHEMATICS AND EDUCATION. American Mathematical Society, pp. 669-678, 2015

GOLAN, M. Origametry and the van Hiele Theory of Teaching Geometry. In: IVERSON-WANG, P, LANG, R. J. & YIM, M. (Eds.). **ORIGAMI5:FIFTH INTERNATIONAL MEETING OF ORIGAMI SCIENCE, MATHEMATICS, AND EDUCATION.** Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group, pp. 151-164, 2011

HATORI, K. History of Origami in the East and the West before Interfusion. In: IVERSON-WANG, P, LANG, R. J. & YIM, M. (Eds.). **ORIGAMI5:FIFTH INTERNATIONAL MEETING OF ORIGAMI SCIENCE, MATHEMATICS, AND EDUCATION.** Boca Raton, Florida: CRC Press, Taylor & Francis Group, pp. 3-11, 2011

KLEMER, A.; RAPOPORT, S. Origami and GeoGebra Activities Contribute to Geometric Thinking in Second Graders. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, 16(11), 2020 Disponível em: <<https://www.ejmste.com/download/origami-and-geogebra-activities-contribute-to-geometric-thinking-in-second-graders-8537.pdf>> Acesso em: 09 10 2021

MENEZES, D. B. & NETO, H. B. Pensamento Matemático Avançado: Origem e Características. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, 04, nº10, pp. 26-35, 2017 Disponível em: <<https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/45/49>> Acesso em: 09 10 2021

MONTEIRO, L. C. N. **Origami: história de uma geometria axiomática.** Dissertação apresentada na Universidade de Lisboa para a obtenção do grau de Mestre em Matemática para o Ensino, 2008 Disponível em: <<https://repositorio.ul.pt/>> Acesso em 09 10 2021

NASCIMENTO, E. C. O Desenvolvimento do Pensamento Geométrico, Interação Social e Origami. **XII Encontro Nacional de Educação matemática, Cultura e Diversidade**, São Paulo, SP, pp. 1-12, julho de 2016. Disponível em <http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5410_2560_ID.pdf> Acesso em: 09 10 2021

PEGG, J., DAVEY, G. Interpreting Student Understanding in Geometry: A Synthesis of Two Models. In: LEHRER, R., CHAZAN, D. (Eds) **Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space**, pp. 130-132, New York, Routledge, Taylor & Francis Group, 1998

PEGG, J.; TALL, D. The Fundamental Cycle of Concept Construction Underlying Various Theoretical Frameworks. IN: SRIRAMAN, BHARATH; ENGLISH, LYN, (orgs.) **Advances in Mathematics Education: Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers**, Berlin, Springer-Verlag, pp.171-192, 2010

SCHOENFELD, A. H. **Mathematical Problem Solving**. Orlando, Academic Press, 1985

TUBIS, A.; WANG-IVERSON, P. Froebel's Views on the Role of Paper Folding in Early mathematics Education. In: LANG, R. J.; BOLITHO, M.; YOUT, Z.; BOAKES, N.; BUDD, C.; CHEN, Y.; FRECKER, Y.; MITANI, J.; PARDO, J.; PAULINO, C.; SCHENK, M.; TACHI, T.; UEHARA, R.; WANG-IVERSON, P. (Eds.) **The Proceeding from the 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics, and Education: Vol 1: Design, Education, History and Science**, pp. 181-195, Holywell Hill, Irlanda, Tarquin, 2018

VAN HIELE, P. **Structure Insight: A Theory of Mathematics Education**. New York, Academic Press, 1986