ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

Uso de las conexiones entre representaciones por parte del profesor en la construcción del lenguaje algebraico

Use of connections between representations by the teacher in the construction of algebraic language

Abraham **de la Fuente** Pérez*

ORCID iD 0000-0003-0908-9884

Jordi **Deulofeu** Piquet**

ORCID iD 0000-0002-5834-0863

Resumen

La representación es un elemento muy importante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares. Además, algunas representaciones ayudan a resolver problemas concretos mejor que otras representaciones, así que saber hacer traducciones entre diversas representaciones es, también, crucial en el aprendizaje de las matemáticas. En este artículo, vemos cómo los profesores hacen conexiones entre representaciones para ayudar a los alumnos a construir el lenguaje algebraico. Para ello, analizamos tres episodios extraídos de dos clases de un profesor. Las intervenciones del profesor se producen en el marco de una clase que desarrolla en un ambiente de resolución de problemas. Realizamos este análisis utilizando el marco teórico que nos proporciona el *Knowledge Quartet*, un instrumento que nos permite observar cómo el conocimiento del profesor emerge cuándo ayuda a sus alumnos a aprender matemáticas. Este instrumento consiste en una serie de indicadores que nos ayudan a ver situaciones en que el profesor utiliza su conocimiento mientras interacciona con los alumnos. Estos indicadores están clasificados en cuatro dimensiones: fundamentos, transformación, conexiones y contingencia. En este artículo se completa el marco teórico dado por el *Knowledge Quartet* con un nuevo indicador, que llamamos *conexiones entre representaciones* y que esta incluido en la dimensión de conexiones de este instrumento.

Palabras clave: *Knowledge Quartet*. Conexiones entre representaciones. Lenguaje algebraico. Conocimiento del profesor.

Abstract

Representation is a very important element in the teaching and learning of school Mathematics. Also, some representations help solve concrete problems better than other representations, so knowing how to translate between representations is also crucial when learning mathematics. In this article, we will see how teachers make connections between representations to help students build algebraic language. To do this, we will analyze three episodes taken from two classes by a teacher. The teacher's interventions take place within the framework of a class that develops in a problem-solving environment. We will carry out this analysis using the theoretical framework provided by the Knowledge Quartet, an instrument that allows us to observe how the teacher's knowledge emerges when he helps his students to learn mathematics. This instrument consists of a series of indicators that help us see situations in which the teacher uses his knowledge while interacting with the students.

* Doctor en Didáctica de las matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Profesor en la Facultad de Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB), Barcelona, España. E-mail: joseabraham.delafuente@uab.cat.
** Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Profesor Titular en el Dpt. de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), Bellaterra, Barcelona, España. E-mail: jordi.deulofeu@uab.cat.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

These indicators are classified in four dimensions: fundamentals, transformation, connections, and contingency. This article completes the theoretical framework given by the Knowledge Quartet with a new indicator that we will call "connections between representations" and that will be included in the connection dimension of this instrument.

Keywords: Knowledge Quartet. Connections between representations. Algebraic language. Teacher knowledge.

1 Introducción

La suposición que dice "quien sabe matemáticas puede enseñarlas", sabemos, hoy, que ya no es válida y es conocido que los profesores deben tener, también, conocimiento sobre cómo enseñar matemáticas (SHULMAN, 1986, p.4). En particular, Shulman (1986) destaca que el profesor debe transformar su conocimiento en representaciones que faciliten el aprendizaje de los alumnos.

La investigación que se muestra en este artículo forma parte de una tesis doctoral (DE LA FUENTE, 2016) en que se abordaba la cuestión de cuáles deberían ser los conocimientos de un profesor de matemáticas para ayudar a los alumnos a construir el lenguaje algebraico trabajando en un ambiente de resolución de problemas. En concreto, en este manuscrito se pone el foco en cómo los profesores hacen uso de las conexiones entre representaciones con este objetivo de aprendizaje. Para responder a esta pregunta se realiza un análisis cualitativo de tres episodios de clase de matemáticas en que un profesor utiliza una conexión entre representaciones para ayudar a los alumnos a construir el lenguaje algebraico.

Una de las tareas de un profesor es planificar las tareas de sus alumnos y, a partir de ellas, interaccionar en las diferentes situaciones que se dan en el aula cuando las implementa. De acuerdo con Mason y Spence (1999), podríamos definir esta forma de usar el conocimiento como el *knowing to,* es decir, el acto que permite acceder a su conocimiento, en un breve período de tiempo, para resolver una determinada situación problemática en un instante concreto.

Por otra parte, y de acuerdo con Schoenfeld (2020), el conocimiento del profesor incluye el saber detectar cuándo un estudiante está frustrado o necesita algo de tiempo para pensar sin ser interrumpido y actuar en consecuencia, escuchar ideas potencialmente ricas en aquello que dicen o escriben los alumnos y ayudar a los estudiantes a participar de la actividad del aula, de manera productiva, en la construcción del sentido de aquello que se está trabajando en clase.

De entre las distintas teorías que analizan el conocimiento del profesor, hemos elegido el marco teórico conocido como *Knowledge Quartet* (KQ) ya que nos permite analizar este conocimiento en la acción, de forma coherente con las ideas anteriormente comentadas (ROWLAND *et al.*, 2009).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

Este marco consiste en un conjunto de indicadores que nos ayudan a analizar cómo los profesores hacen visible su conocimiento cuando planifican e implementan sus clases. Una característica que nos parece importante de este modelo es que la construcción de estos indicadores se realizó a partir de la observación de la práctica docente de algunos profesores por un equipo de investigadores, es decir, que proviene de la observación en el aula de matemáticas y de la posterior agrupación de estos en cuatro dimensiones: *fundamentos, transformación, contingencia y conexión*.

Las conexiones matemáticas que realizan los profesores nos dan mucha información alrededor de la comprensión que estos tienen sobre los conceptos matemáticos que están enseñando, y el hecho de promover estas conexiones entre los alumnos proporcionará oportunidades de mejora en su capacidad para resolver problemas (MOON *et al.*, 2013; RODRÍGUEZ-NIETO; RODRÍGUEZ-VÁZQUEZ; GARCÍA-GARCÍA, 2021; RODRÍGUEZ-NIETO *et al.*, 2021a; CAVIEDES; DE GAMBOA; BADILLO, 2019; CAMPO-MENESES *et al*., 2021).

Por ello, en este artículo estudiamos la dimensión llamada *conexión* y, en concreto, cómo los profesores utilizan las conexiones entre representaciones para que los alumnos construyan el lenguaje algebraico. El resultado de este análisis justifica la inclusión de un nuevo indicador en el modelo de análisis del conocimiento del profesor dado por el *Knowledge Quartet* (DE LA FUENTE; ROWLAND; DEULOFEU, 2016), indicador que llamamos: conexiones entre representaciones.

2 Marco teórico

En este apartado comenzamos por analizar la literatura relacionada con las conexiones matemáticas y su importancia en el proceso de enseñanza y aprendizaje. A continuación, situamos el KQ dentro del marco teórico del estudio del conocimiento del profesorado y analizamos, en profundidad, una de sus dimensiones: las conexiones. Finalmente, vemos cómo las representaciones y las conexiones entre representaciones juegan un papel fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, justificando, así, la necesidad de la inclusión de un nuevo indicador en el KQ que contemple este tipo de conexiones.

2.1 El papel de las conexiones en el aprendizaje de las matemáticas

De acuerdo con Businskas (2008), entendemos las conexiones matemáticas en dos

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

sentidos: por un lado, aquellas relaciones sobre las que se estructuran las matemáticas como área del saber y, por otro, las relaciones mediante las cuáles el proceso del pensamiento de un estudiante construye la matemática. Por ejemplo, los vínculos entre el álgebra y la geometría pueden permitir a los alumnos dotar de significado a los símbolos algebraicos, significado que, de acuerdo con de la Fuente, Deulofeu y Rowland (2016), facilitará que los alumnos desarrollen un conocimiento matemático profundo, en el sentido de Ma (1999), a través del establecimiento de relaciones entre las diferentes ideas matemáticas que el alumnado va construyendo.

La matemática escolar debe conjugar la construcción de conceptos matemáticos a través de conexiones internas y externas (GOLDIN; STHEINGOLD, 2001; GOLDIN, 2003; ZHANG, 1997). Desde el punto de vista interno, debemos tener en cuenta las relaciones que existen entre conceptos diferentes y entre procedimientos y representaciones asociados a un mismo concepto. En cambio, desde una perspectiva externa, los conceptos abstractos, y en especial las estructuras subyacentes a estos conceptos, permiten entender la matemática como un conocimiento aplicable a campos diferentes del matemático, como pueden ser el mundo físico o el entorno social (DE GAMBOA *et al*., 2020).

Además, los conceptos de la matemática escolar no se aprenden de forma aislada, sino definidos por sus relaciones con otros conceptos (DOLORES-FLORES; GARCÍA-GARCÍA, 2017; DE GAMBOA; BADILLO; RIBEIRO, 2015). Dichas relaciones se pueden establecer a partir de las representaciones que se utilizan, de las definiciones que se construyen, de las operaciones que se definen, de las propiedades que se explicitan, de los procedimientos que se utilizan o de los problemas en que se aplican los conceptos.

En la literatura más reciente sobre conexiones matemáticas se establecen hasta nueve tipos de conexiones diferentes: procedimentales, de implicación, parte-todo, significado, características, reversibilidad, metafóricas, de reversibilidad, orientadas a la instrucción y entre diferentes representaciones (BUSINSKAS, 2008; ELI; MOHR-SCHROEDER; LEE, 2011; GARCÍA-GARCÍA; DOLORES-FLORES, 2020; RODRÍGUEZ-NIETO; RODRÍGUEZ-VASQUEZ; FONT, 2020).

Por otra parte, la construcción de un conocimiento matemático con significado por parte del alumno requiere del profesor un conocimiento que permita conectar conocimientos previos y futuros de los alumnos, que permita conectar conceptos o que le permita secuenciar actividades de forma coherente, entre otros. El *Knowledge Quartet* (DE LA FUENTE; ROWLAND; DEULOFEU, 2016) es un instrumento de análisis del conocimiento que un profesor muestra cuando desarrolla su actividad docente y, como ya se ha dicho, precisamente una de sus dimensiones de análisis son las conexiones que este establece en el aula.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

Nuestro trabajo se centra en el conocimiento y uso de las conexiones entre representaciones por parte del profesor y en ver la necesidad de la inclusión de este ítem en el marco teórico conocido como KQ. Para explicitar esta necesidad, revisamos el KQ de manera general para, después, adentrarnos en una de sus dimensiones: las conexiones.

2.2 Sobre el conocimiento del profesor

El desarrollo del KQ se inició en la Universidad de Cambridge, en los años 2002-2004. Desde entonces, se ha utilizado en muchas investigaciones y en diferentes contextos de formación de profesorado (ROWLAND, 2014). La construcción de este marco se basa en la idea de que el conocimiento que el profesor necesita no solo está localizado en su mente, sino que se realiza en la práctica de la enseñanza (HEGARTY, 2000; MASON; SPENCE, 1999). Y es desde esta perspectiva desde la que se enfocó la construcción de este marco teórico.

Los investigadores habían observado que la mayoría de las conversaciones que mantenían los profesores en formación con sus formadores tenían relación con aspectos más generales, como por ejemplo la gestión de la clase, también importantes, pero no directamente relacionados con el aprendizaje de las matemáticas (BORKO; MAYFIELD, 1995; STRONG; BARON, 2004). El propósito de la investigación de la cual surgió el KQ fue desarrollar un marco conceptual con base empírica para las discusiones de revisión de lecciones de profesorado en formación, de manera que estas se desarrollaran con un enfoque en el papel del conocimiento de la materia de matemáticas del profesor y el conocimiento pedagógico específico de la materia (SHULMAN, 1986).

Para conseguir este marco se escogieron seis profesores en formación de *Early Years* (tres a ocho años) y seis de *Primary Years* (siete a once años) de entre los 149 que estaban haciendo la formación. Se eligieron de manera que hubiera un rango variado de evidencias de su conocimiento, que se obtuvieron durante los tres meses anteriores al inicio de la toma de datos. De cada profesor se gravaron dos clases de matemáticas, es decir, que fueron gravadas 24 sesiones en total. Además, se les pidió a estos profesores que facilitaran una copia de su plan para la sesión (ROWLAND, 2014).

A partir de estas grabaciones, y siguiendo la metodología de aproximación a los datos para construir un marco teórico (GLASER; STRAUSS, 1967), se identificaron aspectos de las acciones de los profesores que parecían importantes en el sentido que podrían dar información sobre su conocimiento y se utilizó la planificación escrita de la sesión para poder distinguir cuándo las acciones habían sido planificadas y cuándo no. Los investigadores asignaron códigos

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

a estas acciones y, después de eliminar duplicados y ponerse de acuerdo en los nombres de estos códigos, llegaron a un conjunto de diecisiete códigos que llamaron indicadores y que agruparon en cuatro dimensiones: fundamentos, transformación, conexiones y contingencia. Después de nuevas revisiones de estos códigos se acabaron incluyendo tres más (WESTON; KLEVE; ROWLAND, 2013). En el *Cuadro 1* se puede ver una descripción de las dimensiones en que se agrupan sus indicadores.

Dimensión	Indicador
Fundamentos Conocimiento referente a las matemáticas como área y de la pedagogía específica de las matemáticas. Creencias respecto a la naturaleza de las matemáticas, de los propósitos de la educación matemática y de las condiciones sobre las cuáles los estudiantes aprenderán mejor las matemáticas.	Consciencia del propósito; Adherencia al libro de texto; Concentración en los procedimientos; Identificación de errores; Conocimiento de la materia; Fundamento teórico sobre pedagogía; Uso de terminología matemática.
Transformación Uso de analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones para presentar las ideas al alumnado.	Elección de ejemplos; Elección de representaciones; Uso de materiales de enseñanza; Modelización del profesor
Conexión Secuenciación del material utilizado para la enseñanza y consciencia sobre la diferente demanda cognitiva de los diferentes contenidos y tareas.	Anticipación de la complejidad; Decisiones sobre la secuenciación; Hacer conexiones entre procedimientos; Hacer conexiones entre conceptos; Reconocimiento de la adecuación conceptual
Contingencia Habilidad para responder a eventos inesperados y no planificados de manera convincente y de manera bien informada.	Desviación de la agenda; Respondiendo a las ideas del alumnado; Uso de las oportunidades; Visión retrospectiva durante la enseñanza

Cuadro 1 - Indicadores del *Knowledge Quartet* agrupados en sus dimensiones
Fuente: ROWLAND (2014, p.25)

La dimensión de *fundamentos* incluye tanto el conocimiento matemático como el relativo a las creencias sobre el aprendizaje de las matemáticas. Estos conocimientos y creencias nos proporcionan información sobre las razones por las cuales un profesor toma determinadas decisiones pedagógicas y didácticas (ROWLAND, 2020).

Podríamos decir que la categoría de fundamentos difiere de las otras tres en que estas últimas se refieren a acciones que realiza el profesor (incluyendo su discurso) que nos llevan a observar cómo el conocimiento del profesor emerge y se conduce durante su intervención en el aula, mientras que la primera hace referencia a la base de conocimiento que hace emerger tras estas acciones (DE LA FUENTE, 2016).

Los indicadores que agrupa la dimensión *transformación* distinguen la capacidad del profesor de transformar el conocimiento del contenido que él posee en formas que son didácticamente poderosas (SHULMAN, 1986). Es decir, el profesor tiene que transformar el

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

conocimiento que él posee en una forma en que los alumnos puedan aprender. Esto lo hará utilizando representaciones concretas, analogías, ejemplos, ilustraciones, explicaciones o demostraciones.

Cuando un profesor se encuentra delante de una situación inesperada (relacionada con el aprendizaje de las matemáticas), pueden emerger los indicadores que están agrupados en la dimensión de *contingencia*. Esta categoría está directamente relacionada con el tipo de saber del que nos hablan Mason y Spence (1999), el *knowing-to action:* la capacidad de respuesta ante un problema inesperado.

La dimensión de *conexiones* nos ayuda a analizar la coherencia en la planificación de las intervenciones de un profesor: incluye la administración del discurso matemático dentro del aula, la secuenciación de las tareas dentro de una misma sesión o las relaciones que establece entre varias sesiones. Como ya hemos dicho, queremos destacar la necesidad de incluir un nuevo indicador en el KQ llamado *hacer conexiones entre representaciones*. Por eso, en el siguiente apartado revisamos la literatura sobre representaciones y conexiones entre ellas y la vinculamos al KQ.

2.3 Conexiones entre representaciones y el KQ

Las representaciones son un elemento crucial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares (JANVIER, 1987; VERGNAUD, 1987; ARCAVI, 2003). De acuerdo con Kaput (1987), el uso de símbolos está en el centro de la representación de conceptos matemáticos. Dufour-Janvier, Bednnarz y Belanger (1987) consideran que varias representaciones diferentes pueden abarcar el mismo concepto, o la misma estructura matemática. Así, al presentar los conceptos matemáticos con la ayuda de diversas representaciones, los alumnos comprenderán las propiedades comunes de estas, que les permitirán construir nuevos conocimientos o consolidarlos. De ello se destila que los alumnos necesitan construir e interpretar diferentes formas de representación porque estas son herramientas esenciales para la comunicación y razonamientos en las matemáticas escolares (GREENO; HALL, 1997).

En el marco de estudio del conocimiento del profesor que nos brinda el KQ, podemos ver cómo la elección de la representación que usa un profesor para ayudar a los alumnos a construir conocimiento matemático sí que está reflejada y en cambio no hay ningún indicador que permita analizar las conexiones entre diferentes representaciones de un mismo concepto, cuestión muy importante para conseguir un aprendizaje significativo (RODRÍGUEZ-NIETO *et*

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

al., 2021a; DE GAMBOA *et al*., 2020; RODRÍGUEZ-NIETO; ROGRÍGUEZ-VÁSQUEZ; FONT, 2020), especialmente delicado en el campo del álgebra, donde dotar a los símbolos de significado es crucial (KAPUT, 2000; ARCAVI, 2003).

Las conexiones que se establecen dentro de las matemáticas involucran conexiones entre diferentes representaciones de una misma idea matemática (DUVAL, 2006). Por ejemplo, es conocido que el concepto de función se puede representar a través de su expresión verbal, de su representación gráfica, de su expresión algebraica o a través de la tabla de valores. Cada representación nos aporta distintas informaciones, en diferente nivel de profundidad, y son complementarias en cuanto a su interés de cara a la construcción del concepto de función (JANVIER, 1987).

Las conexiones entre diferentes representaciones se identifican cuando el sujeto representa un concepto matemático usando representaciones equivalentes o alternativas (BUSINKAS, 2008; GARCÍA-GARCÍA; DOLORES-FLORES, 2019). Llamamos representaciones equivalentes a aquellas que son transformaciones de la misma representación, como, por ejemplo, de dos expresiones algebraicas que son equivalentes entre ellas y alternativas a aquellas que relacionan dos lenguajes diferentes, como pueden ser el gráfico y el algebraico. El uso de estas conexiones ayuda a los alumnos a construir nuevos conceptos matemáticos, dándoles significado a partir de sus conocimientos previos sobre las representaciones del objeto matemático que ya conocen (RODRÍGUEZ-NIETO *et al*., 2021b).

Cuando los profesores implementan actividades de resolución de problemas en clase, realizan conexiones entre diferentes representaciones de una información dada, ayudando, así, a los alumnos a construir el lenguaje algebraico (DE LA FUENTE; DEULOFEU; ROWLAND, 2016; MAINALI, 2021). En este contexto teórico, incluimos un nuevo indicador en el KQ que llamamos *conexiones entre representaciones* y que hace referencia a aquellas conexiones que hace el profesor para realizar una traducción entre dos representaciones. En lo que sigue de este artículo, vemos algunos casos paradigmáticos que se obtienen a partir del estudio realizado por los autores.

3 Metodología

A continuación, describimos el diseño metodológico de la investigación: la recogida de datos y la metodología de análisis.

3.1 Participantes y contexto

Los datos se recogieron durante el curso 2014-15 en un instituto de Barcelona. Durante ese curso se grabaron las clases de los profesores que impartían primero y el segundo curso de la ESO en el momento de tratar la construcción del lenguaje algebraico, además de todas las reuniones semanales del departamento durante un curso completo.

Este grupo de profesores tenía una dinámica de trabajo en equipo que ha sido esencial en la investigación, ya que nuestra concepción sobre el conocimiento del profesor incluye el hecho de saber qué enseñar y, también, cómo y por qué hacerlo (ROWLAND *et al.*, 2009), además de saber cómo diseñar tareas de aprendizaje.

3.2 Recolección de datos

Las grabaciones constituían una cantidad de datos inmensa: unas treinta sesiones de 55 minutos de cinco profesores diferentes, además de 21 reuniones de departamento de una hora cada. Las grabaciones intensivas sirvieron para que tanto profesores como alumnos no se vieran influenciados por la presencia constante de la cámara, que al final se convirtió en un elemento más del aula y eran los propios alumnos los que la preparaban y la recogían.

De entre todas estas grabaciones, seleccionamos dieciséis sesiones de 55 minutos cada una, sesiones que correspondían a tres profesores diferentes (cinco sesiones de dos profesores y seis de uno de ellos) impartiendo clase en 2º de la ESO (trece a catorce años). Decidimos seleccionar precisamente estas sesiones porque corresponden a la temática de la investigación que se quería realizar: eran sesiones dedicadas a la construcción del lenguaje algebraico a través de unos problemas que los profesores habían diseñado, conjuntamente, en sus reuniones de departamento.

Para poder escribir este artículo hemos escogido tres episodios de uno de los profesores que son paradigmáticos del uso de conexiones entre representaciones por parte del profesor para, así, poder mostrar la necesidad de este nuevo indicador en el KQ. A continuación, explicamos cómo hemos realizado el análisis de los datos.

3.3 Análisis de datos

Lo primero que hicimos fue transcribir y añadir explicaciones que ayudasen a entender lo que ocurría en las sesiones. Utilizamos el KQ para analizar cómo el profesor utilizaba su

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

conocimiento mientras realizaba sus clases, y escribimos los comentarios que justificaban los indicadores seleccionados. Para ello, hemos elegido un enfoque cualitativo e interpretativo, que nos parece el más adecuado para el análisis de la práctica de aula (EISENHARDT, 1989). Las grabaciones de las reuniones de departamento las utilizamos como datos secundarios y nos sirvieron para confirmar partes del análisis interpretativo realizado en la investigación.

Durante el análisis, observamos que para poder explicar cómo el profesor utilizaba su conocimiento para ayudar a los alumnos a construir el lenguaje algebraico teníamos la necesidad de incluir un nuevo indicador que explicase algunos episodios: las conexiones entre representaciones. En el marco dado por el KQ tenemos un indicador para las conexiones entre conceptos y otro indicador para las conexiones entre procedimientos, pero no había ninguno para las conexiones entre representaciones.

Siguiendo la metodología de Rowland (2014) confirmamos este análisis de los datos por triangulación entre los dos autores, Rowland y el Departamento de Didáctica de las matemáticas de la University of East Anglia (DE LA FUENTE; DEULOFEU, 2016). Esta triangulación sirvió para confirmar el análisis hecho y la necesidad de un nuevo indicador en el marco dado por el KQ para poder analizar estos episodios. A este nuevo indicador lo llamamos *conexiones entre representaciones.*

Como ya hemos mencionado en el apartado anterior, de entre todas las transcripciones y su análisis hemos seleccionado, para este artículo, tres episodios de un mismo profesor en que se ve la necesidad de utilizar este código para explicar cómo utiliza este conocimiento. Hemos elegido episodios de un solo profesor para insistir en que el uso de estas conexiones no es esporádico y hemos elegido solo tres episodios para poder ceñirnos a la longitud de un artículo. En de la Fuente y Deulofeu (2016) se puede ver cómo los alumnos utilizan estas conexiones entre representaciones para resolver sistemas de ecuaciones, así que consideramos que es importante que un marco teórico que pretende ser una herramienta de evaluación formativa del profesorado debe incluir este indicador. Esto también fue una reflexión consensuada por todos los investigadores implicados.

En el análisis de cada episodio que hemos incluido en este artículo podremos ver una pequeña explicación del contexto en que se produce el episodio, la transcripción, los indicadores que se activan del KQ y una justificación de estos. De acuerdo con Schoenfeld (1981) los episodios seleccionados comienzan cuando o bien el profesor o bien el alumno hacen un comentario o pregunta en voz alta, que invita a discutir la respuesta a una pregunta que forma parte del problema que se ha propuesto en clase, y acaba cuando se llega a alguna conclusión colectiva o se produce un cambio de tema en lo que se está hablando. También se podría cerrar

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

un episodio por una situación inesperada como el final de la clase o alguna otra interrupción.

Cabe destacar que los diferentes indicadores de las dimensiones del KQ se evidencian en grupo la mayoría de las veces (DE LA FUENTE, 2016). Por ejemplo, un episodio en el que un alumno interviene (contingencia) y el profesor responde eligiendo un determinado ejemplo (transformación) para relacionarlo con aquello que estaba explicando (conexión). Centrándonos por separado en cada uno de los códigos, podemos ver cómo estos nos ayudan a explicar cuestiones del proceso de enseñanza-aprendizaje relacionadas con la resolución de problemas, el uso del álgebra o el uso de uno de estos temas para aprender sobre el otro. En particular, nosotros pondremos el foco en el indicador que hace referencia a las conexiones entre representaciones.

4 La secuencia de problemas

A continuación, explicamos cuáles son los problemas que implementaron los profesores en los episodios analizados.

Los tres profesores habían acordado una secuencia de problemas que tenía por objetivo ayudar a los alumnos a aprender a resolver sistemas de ecuaciones a través de métodos de resolución que ellos mismos construyeron. Comentamos dos de estos problemas, que son los que también analizamos. Como ya se ha dicho anteriormente, nuestra concepción del conocimiento del profesor incluye saber qué enseñar y porqué hacerlo (ROWLAND *et al*., 2009).

El primer problema consistía en deducir la máxima de información posible sobre el precio de una pizza a partir del precio de dos pizzas y dos ensaladas (ver Figura 1). Es evidente que no podemos saber el precio de una pizza, pero podemos saber el precio de una pizza en función del precio de una ensalada, o también podemos hacer tablas de valores con diferentes posibilidades de precios de ambos productos, o podemos representar gráficamente estas tablas de valores. Y no sólo eso, también podemos saber cuál es el precio de otras cestas de la compra que se puedan deducir a partir de los datos iniciales. Para conseguir trabajar todo esto en el aula el profesor disponía de una secuencia de preguntas que invitaban a discutir estas cuestiones.

Figura 1 - Representación icónica de un problema con una condición

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

Fuente: elaborada por el autor

La manipulación de las diferentes representaciones de la información de parejas de datos como las que se muestran en la Figura 2, es también uno de los procedimientos que se pretende trabajar con este conjunto de tareas. Se espera que las manipulaciones que hagan los alumnos de esta representación icónica de la información sea similar a la que harían si utilizasen letras para representar los precios de los productos y expresiones algebraicas para representar la información. El problema que se muestra en la Figura 2 es el que los profesores tenían en su programación y el que provoca lo que vemos en el episodio analizado en este artículo.

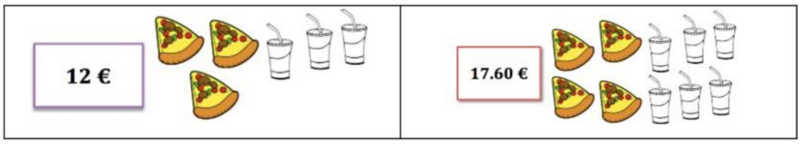

Figura 2 - Representación icónica de un problema con dos condiciones
Fuente: elaborada por el autor

Una de las consignas en las que se insiste durante la reunión de Departamento es que los profesores deben insistir en el abanico de posibilidades que existe a la hora de resolver problemas como éste, y que si algún alumno decidía recurrir al uso del lenguaje algebraico se insistiese entre la relación que se podía establecer entre el uso del lenguaje icónico y el algebraico.

5 Análisis

En este artículo mostramos una selección de tres episodios de uno de los profesores que fueron grabados, donde podremos observar cómo realiza conexiones entre diversas representaciones cuándo pone en común con la clase la resolución de estos problemas. Cada uno de ellos responde a una conexión entre dos representaciones diferentes. La primera es una conexión entre una representación icónica y una tabla de valores, en el segundo episodio se conecta una tabla de valores y una representación algebraica y en el tercero una representación verbal y una algebraica.

Retomando la idea del marco teórico en el que proponíamos la inclusión de un nuevo indicador dentro de la dimensión de Conexiones del KQ llamado *Conexiones entre representaciones* que ya utilizamos en el análisis que mostramos a continuación (DE LA FUENTE; ROWLAND; DEULOFEU, 2016).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

5.1 Episodio 1: Conexiones entre representaciones icónicas y tabla de valores

La resolución del primer problema que mostramos en el análisis consiste en responder una lista de siete preguntas a partir de la información proporcionada en la Figura 1. La pregunta que generó el episodio que analizamos es la última: *¿Podrías decir cinco posibles precios de ensaladas y sus precios de pizzas correspondientes? ¿Podrías generalizar?*

Mientras los alumnos responden en grupo las preguntas propuestas, el profesor pasea entre ellos resolviendo dudas, mirando qué es lo que están escribiendo y haciendo preguntas a los diferentes grupos. Después de un tiempo suficiente para que la mayoría hayan podido leer todas las preguntas y muchos hayan contestado, inicia una discusión con el grupo completo sobre la última pregunta, en que intervienen las alumnas: Carol, Rita, Clara y Pati y el profesor: Ángel.

Ángel: [mirando a una alumna, Carol] ¿Tu que es lo que has hecho?
Carol: Pues la ensalada 3.20 y la pizza 4.50.
Ángel: Ya has encontrado uno que te sirve, ¿no? Sí... Has dicho... ponemos aquí pizzas y aquí ensaldas [el profesor dibujó una tabla de valores en la pizarra y pone los números que le ha dicho Carol como se puede ver en la tabla 1].
Ángel: 4.50...
Carol: y 3.20
Ángel: y 3.20.
Rita: 9.95 i 9.95.
Ángel: ¿Cómo?
Rita: 9.95 y 9.95.
Ángel: Iguales.
Rita: Sí.
Ángel: [señalando la tabla de valores] 9.95 i 9.95. ¿Esto de dónde sale?
Rita: 19.90 dividido por 2.
Clara: Ah, pero no son...
Ángel: ¿Dividido entre 2?
Rita: Sí.
Ángel: ¿Entonces esto qué es?
Clara: Dos... ay [ve que está interrumpiendo a su compañera y deja de hablar en voz alta]
Rita: Ehm... ehm... el precio... ¡ah no! buen, nada. Vale sería... [hay unos cuantos alumnos hablando a la vez y no se entiende lo que dicen]
Ángel: Vale. ¿Pero cómo lo arreglas para hacerlo bien?
Pati: Dos ensaladas y cuatro... tres pizzas.
Ángel: ¿Entonces que tendrías que hacer?
Clara: Dividirlo entre 3 y dividirlo entre 2.
Ángel: Este lo dividido entre 3, este lo divido entre 2 [señalando el lugar del precio de las pizzas y de las ensaladas respectivamente]... y entonces lo que tu piensas ya podría ser. O sea no es que las pizzas y las ensaladas cuesten igual, si no que lo que estás haciendo es que el grupo de pizzas y ensaladas cuesten igual (Diálogo entre el profesor Ángel y cuatro estudiantes, 2015).

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

Tabla 1 – El profesor apunta esta tabla de valores en la pizarra

pizzas	ensaladas
3.2	4.5

Fuente: elaborada por el autor

Se identifican en este episodio los indicadores del KQ: *elección de representaciones, conexión entre representaciones* y *identificación de errores*, tres indicadores cada uno de una dimensión diferente: Transformación, Conexiones y Fundamentos, respectivamente. En este episodio, en primer lugar, el profesor decide escribir la información que pedía la pregunta en forma de tabla de valores (ver Tabla 1), conectando, así, la representación icónica con la representación de los datos en una tabla de valores y haciendo emerger este otro indicador. Esta conexión la realiza en el momento en que mantiene una discusión sobre el origen de los números que ha escrito en la tabla.

La representación que usa es la misma que la que se utilizaría para recoger valores de una función cualquiera. Pero en las etiquetas de la tabla decide no poner letras, sino las palabras *pizzas* y *ensaladas*. De esta manera, no está identificando la tabla con lo que realmente contiene: el precio de una pizza y de una ensalada. Por otro lado, al escribir las palabras en plural hizo que una alumna se confundiese y dijese los precios del grupo de ensaladas y el grupo de pizzas. El profesor identifica el error y lo corrige con la colaboración del resto de alumnos, y gracias a la conexión entre las diferentes representaciones que se establece durante la conversación. De hecho, este error lo aprovecha para reforzar la conexión entre la representación icónica y la tabla de valores.

5.2 Episodio 2: Conexión entre la representación en tabla de valores y la expresión algebraica

El siguiente episodio tuvo lugar al día siguiente. El profesor escribió en la pizarra la misma tabla de valores del día anterior, pero ahora completa con más valores que copia de los apuntes del día anterior de uno de los alumnos (ver Tabla 2).

Tabla 2 – El profesor apunta esta tabla de valores en la pizarra

Pizzas	ensaladas
3.2	4.5
2.86	5.2

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

4	3.95
5	3.3
4.33	3.6

Fuente: elaborada por el autor

Además de la tabla de valores, proyecta en la pizarra la imagen de la Figura 1, que muestra los datos iniciales del problema.

El profesor decide continuar con la discusión del día anterior, sobre la misma pregunta, pero ahora haciendo referencia a que si era posible generalizar la información que vemos en la tabla de valores.

Los alumnos trabajan en grupo veinte minutos, discutiendo sobre esta pregunta mientras el profesor va mirando lo que escriben los alumnos en sus libretas y escuchando sus conversaciones, hasta que el profesor ve que una alumna (Pati) ha escrito la siguiente fórmula en su libreta: $e = \frac{19.9-3\cdot p}{2}$

Así, decide preguntarle a Clara, la alumna que está al lado de ella, qué significa y para qué sirve lo que ha escrito su compañera. De nuevo empieza un debate en clase entorno a cómo conectar dos representaciones en el que intervienen los alumnos: Pati, Clara, Jaro, Mónica e Inés. Esta vez se trata de conectar la tabla de valores y una expresión algebraica que servirá para calcular el precio de uno de los productos en función del precio del otro producto.

Clara: Obtener resultados.
Ángel: Obtener resultados calculando. ¿Y cómo calculo?
Clara: ¡Generalizando!
Ángel: Bueno, la fórmula es la generalización.
Mónica: ¿Y si ya sabes un número?
Pati: Elijo cualquier número...
Ángel Elijo cualquiera...
Pati: Sí, de una pizza cualquiera.
Ángel: De una pizza.
Pati: Sí.
Ángel: Tu usarías el de una pizza.
Pati: Sí. Y después lo multiplico por tres [el profesor señala la imagen que ha proyectado con una mano y con la otra mano el tres de la fórmula].
Ángel: Imagínate, digo, invéntatelo.
Pati: 2.
Ángel: 2. Y con este 2, Inés, ¿qué hago?
Inés: Podrías poner 2 en el "3p", o sea, cambiar 2 por "3p" [el profesor va señalando alternativamente la fórmula i la imagen proyectada].
Ángel: Es decir...
Inés: Menos 19.90 dividido entre 2 y daría el precio de una ensalada [algunos alumnos contestan a la vez].
Ángel: Osea que, [señalando la tabla de valores], ¿cómo de grande podría ser? [se oyen alumnos que dicen "infinito", "larguísimo", etc.]
Ángel: Hay muchas posibilidades, ¿no? Infinitas. ¿Y esto? [ahora señalando la fórmula]. Esto ya está...

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

Jaro: Se puede simplificar…
Ángel: De esto ya hablaremos [hablando con Jaro]. ¿Y que pasa con esto y esto? [señalando la fórmula y la tabla de valores]
Mónica: Es lo mismo.
Ángel: ¿Es lo mismo?
Mónica: No lo sé.
Jaro: Hombre sí.
Ángel: Bueno, son dos representaciones.
Todos: De la misma cosa.
Ángel: De la misma información. Es decir, la información de los precios la puedo dar en una tabla o la puedo dar en una fórmula. Son dos representaciones de lo mismo. Es igual, bueno, es parecido a cuando hablábamos de… ¿se os ocurre alguna otra vez que hayamos hablado de diferentes representaciones de lo mismo? (Diálogo entre el Profesor Ángel y cinco estudiantes, 2015).

En este episodio vemos un nuevo ejemplo del indicador del KQ *conexión entre representaciones*, el cual se propone para la dimensión Conexiones. La tarea que propone el profesor, completar la tabla de valores con más precios, ha provocado que algunos alumnos escriban una fórmula en sus apuntes para ir más rápido haciendo los cálculos. Esto permite al profesor relacionar las dos representaciones para acabar justificando que son dos representaciones de la misma información.

Además, se puede ver cómo conecta la representación icónica con la expresión algebraica, ya que constantemente señala con una mano la representación icónica y con la otra mano la expresión algebraica para darle significado a esta última. Es decir, que se apoya en la expresión icónica para construir el lenguaje algebraico.

5.3 Episodio 3: Conexión entre representación algebraica y el lenguaje oral

Durante dos sesiones habían trabajado la resolución del problema de la Figura 2. Se habían trabajado diversas estrategias de resolución, siempre de manera oral y acompañado de algunos dibujos en la libreta de los alumnos. Uno de los objetivos que tenía el profesor en la clase de la cual presentamos este episodio era ayudar a los alumnos a escribir la resolución de este tipo de problemas de manera que otra persona pudiera entender el razonamiento que se había seguido para resolverlos.

Para ello, el profesor improvisa un nuevo ejemplo en la pizarra. Dibuja cinco manzanas y cinco sandías, y escribe el precio de todo junto: 17.5€. En otra parte de la pizarra escribe el precio de una sandía y una manzana juntos: 3.5€. Todo está expresado con lenguaje icónico. Indica a los alumnos que piensen durante cinco minutos cómo calcularían el precio de cada fruta a partir de esos datos y, después, comienza un debate en que intervienen las alumnas:

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

Martina, Mónica y Carol.

> *Ángel: Una cosa que os puede servir para explicar esto podría ser decir… cinco manzanas más cinco sandías cuestan 17.50. De aquí habéis deducido, ¿qué? [Ahora el profesor está haciendo un esquema con la representación icónica de todo lo que va diciendo]*
> *Algunos alumnos: La pareja.*
> *Ángel: La pareja, ¿no? Venga. ¿Qué hago ahora?*
> *Algunos alumnos: 17.50 dividido entre 5.*
> *Ángel: ¿Y qué hago? ¿Qué tengo que poner yo aquí?*
> *Algunos alumnos: 17.50 dividido entre 5.*
> *Martina: No, una pera, ¡ay! una manzana... no...*
> *Ángel: Vale. Hago esto: 17.50 dividido entre 5, esto da 3.50. Vale. ¿Y ahora que hago? [muchos alumnos dicen en voz alta lo mismo que el profesor]. Una manzana y una sandía es 3.50. Vale. Y ahora quiero encontrar una manera de escribir esto que está aquí para que se entienda bien [marcando los cálculos que había escrito Clara]. ¿Sí? Entonces, ¿qué hago aquí?*
> *Ángel y Mónica: Si tengo tres manzanas y dos sandías, esto valor 8.5, ¿no? ¿y qué hago ahora?*
> *Àlex: Aquí hay dos parejas.*
> *Mónica: Las unes.*
> *Ángel: [Ángel intenta encontrar otro rotulador de un color diferente para escribir en la pizarra, pero no tiene] Bueno, con otro color, podría hacer..., esto vale 3.50 [redondeando una manzana y una sandía]. ¿No? Esto vale 3.50 [marcando otra pareja]. Entonces si de aquí saco 7, ¿que tengo que hacer aquí? [Marcando el otro lado de la ecuación]*
> *Algunos alumnos: Restar.*
> *Ángel: También restar 7. ¿No? O sea que tengo una manzana igual a 8.5 menos 7, que es 1.5. ¿Lo veis? De esta manera queda argumentado que es lo mismo que ha hecho la Clara, que lo ha hecho muy bien, lo ha explicado. Pero lo que ha hecho la Clara lo ha explicado en un lenguaje. ¿Cuál?*
> *Algunos alumnos: Oral*
> *Ángel: Oral o verbal, ¿sí? ¿Y yo que estoy haciendo?*
> *Algunos alumnos: Dibujar [y más palabras ininteligibles].*
> *Ángel: Sí. Un lenguaje mixto, ¿no? entre gráfico y… es álgebra, casi. Esto es álgebra. Este símbolo [señalando el dibujo de una manzana] quiere decir manzana. ¿Quiere decir manzana este símbolo?*
> *Algunos alumnos: No...*
> *Ángel: Quiere decir que… ¿qué quiere decir?*
> *Carol: Precio de una manzana.*
> *Ángel: Precio de una manzana, ¿eh? Eso es el precio de una manzana. O sea, que estos símbolos podrían ser… “x”, “p”, “a”, “b”, es igual. “p” de manzana, “s” de sandía. ¿Sí? Entonces, lo que quieren decir es el precio… y estoy haciendo un razonamiento que te sirve para escribirlo muy. ¿Y a que se entiende todo? ¿Qué os parece?* (Diálogo entre el profesor Ángel y tres estudiantes, 2015).

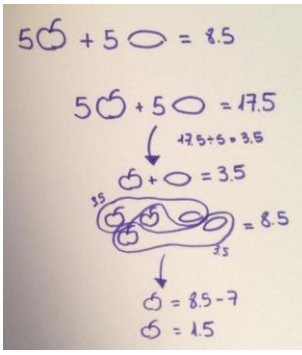

Figura 3 - Reproducción de la resolución de un sistema de ecuaciones escrita por el profesor en la pizarra
Fuente: elaborada por el autor

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

El profesor explica el procedimiento que ha hecho Clara en la pizarra, que es un ejemplo del indicador del KQ *modelización del profesor* de la dimensión Transformación. Pero, esta vez lo escribe de manera que los alumnos puedan anotarlo en sus apuntes.

El profesor intentó hacer evidente la conexión entre los cálculos aritméticos que había hecho Clara y el lenguaje con el que ellos estaban escribiendo en los razonamientos en la pizarra, cosa que es un nuevo ejemplo del indicador que proponemos añadir a la dimensión de Conexiones: *conexión entre representaciones*, esta vez entre una representación que, aunque la tomamos como icónica, está muy cerca de la expresión algebraica (sólo habría que cambiar los iconos por letras) y el lenguaje oral.

Durante la explicación, Ángel dice que el icono que tiene forma de manzana representa una manzana, cuando en realidad tendría que haber dicho que representa el precio de una manzana. Cuando se da cuenta del error (*identificación de errores* de la dimensión Fundamentos) lanza una pregunta para hacer que sean los alumnos quienes le rectifiquen, así que aprovecha su error para brindar a los alumnos una nueva oportunidad de aprendizaje (*visión retrospectiva durante la enseñanza* de la dimensión Contingencia).

Podemos observar como esta manera de escribir la resolución de este tipo de problemas es muy cercana al uso de expresiones algebraicas para resolver sistemas de ecuaciones, que es uno de los objetivos de aprendizaje que tiene el profesor con estas tareas.

6 Discusión y conclusiones

El profesor debe utilizar su conocimiento, no solo de la matemática sino también de la enseñanza, de los estudiantes y del currículo, para identificar conexiones que se podrán hacer explícitas al preparar sus tareas, al implementarlas y al gestionar las discusiones que se producen en el aula. Y estas conexiones son, precisamente, las que hacen que el conocimiento sea transferible de un conocimiento previo a un conocimiento nuevo que se está adquiriendo (DOLORES-FLORES; GARCÍA-GARCÍA, 2017; DE GAMBOA; BADILLO; RIBEIRO, 2015, BUSINKAS, 2008; GARCÍA-GARCÍA; DOLORES-FLORES, 2020).

Para observar cómo emerge el conocimiento dentro de la dimensión de Conexiones del KQ es esencial fijarse en la coherencia entre ciertas elecciones o decisiones que toma el profesor durante la implementación de las actividades de aprendizaje que ha planificado. Es decir, observamos en la práctica la coherencia en su planificación (ROWLAND, 2020).

En este artículo, hemos mostrado el análisis de tres episodios en que se muestran tres casos diferentes de conexiones entre representaciones. Esto nos permite definir un nuevo

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

indicador llamado *conexión entre representaciones* dentro de la dimensión de conexiones del marco teórico de análisis del conocimiento del profesor dado por el KQ. En estos episodios se puede ver cómo el profesor intenta que sean los alumnos los que hagan esas conexiones, y cómo en ocasiones, cuando no lo consigue, es él quien realiza la traducción entre las representaciones para facilitar la conexión.

En particular, en los episodios que hemos mostrado se puede constatar cómo las conexiones entre diferentes representaciones son especialmente importantes en el momento en que los profesores quieren ayudar a los alumnos a utilizar el lenguaje algebraico para resolver problemas (DE LA FUENTE; ROWLAND; DEULOFEU, 2016). Reunimos, así, diversas evidencias que nos llevan a proponer un nuevo ítem dentro de la dimensión de conexiones: las conexiones entre diferentes representaciones de un mismo concepto, por tanto, podemos concluir del análisis realizado que la conexión entre representaciones ayuda a los alumnos a construir el lenguaje algebraico.

A partir de los datos analizados en los tres episodios anteriores, vemos que es muy importante que los profesores establezcan conexiones y que lo hagan correctamente, pero todavía, es más importante que en sus implementaciones brinden a los alumnos oportunidades para conectar lo que están aprendiendo con lo que ya saben, de manera que se facilite el proceso de construcción y reconstrucción del aprendizaje. Si el ambiente de clase es de resolución de problemas y, además, el protagonismo lo tienen los alumnos, la habilidad para conectar y hacer que los alumnos conecten es aún más primordial, puesto que contribuye al objetivo de que la resolución de problemas sirva no solo para aprender a pensar matemáticamente, sino también para aprender matemáticas.

Referencias

ARCAVI, A. The role of visual representation in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Berlin, v. 52, p. 215-241, abr. 2003.

BORKO, H.; MAYFIELD, V. The roles of the cooperating teacher and university supervisor in learning to teach. **Teaching and teacher education,** Amsterdam, v.11, p. 501-518, 1995.

BUSINSKAS, A. **Conversations about connections**: how secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections. 2008. 183f. Thesis (Doctor of Philosofy) – Faculty of Education, Simon Fraser University, Burnaby, 2008.

CAVIEDES, S.; DE GAMBOA, G.; BADILLO, E. Conexiones matemáticas que establecen maestros en formación al resolver tareas de medida y comparación de áreas. **Praxis**, Rioja, v. 15, n. 1, p. 69-87, 2019.

CAMPO-MENESES, K.; FONT, V.; GARCÍA-GARCÍA, J.; SÁNCHEZ, A. Mathematical Connections Activated in High School Students' Practice Solving Tasks on the Exponential and

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

Logarithmic Functions. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, London, v. 17, n. 9, p. 1-14, 2021.

DE GAMBOA, G.; BADILLO, E. R.; RIBEIRO, C. M. El horizonte matemático en el conocimiento para la enseñanza del profesor. Geometría y medida en educación primaria. **PNA**, Granada, v. 10, n. 1, p. 1-24, 2015.

DE GAMBOA, G.; BADILLO, E.; RIBEIRO, M.; MONTES, M.; SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. The Role of Teachers' Knowledge in the Use of Learning Opportunities Triggered by Mathematical Connections. *En:* ZEHETMEIER, S.; POTARI, D.; RIBEIRO, M. (ed.). **Professional Development and Knowledge of Mathematics Teachers.** London: Routledge, 2020. p. 24-43.

DE LA FUENTE, A. **Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas:** El rol del conocimiento del profesor. 2016. 371 f. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Matemáticas) - Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, set. 2016.

DE LA FUENTE, A.; DEULOFEU, J. Translation between language representation in problem solving as a tool to construct algebraic language. **Comunicación 13 ICME**, Hamburg, 2016.

DE LA FUENTE, A.; DEULOFEU, J.; ROWLAND, T. Conectar lenguajes y problemas para resolver sistemas de ecuaciones. **UNO**, Barcelona, v. 74, p. 68-73, 2016.

DE LA FUENTE, A.; ROWLAND, T.; DEULOFEU, J. Developing algebraic language inn a problem solving environment: the role of teacher knowledge. En: **Proceedings of British Society for Research into Learning Mathematics Conference**, 2016, Manchester: Adams G., feb. 2016, p. 25-30.

DOLORES-FLORES, C.; GARCÍA-GARCÍA, J. Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de cálculo en contexto: un estudio de casos en el nivel superior. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, p. 158-180, abr. 2017.

DUFOUR-JANVIER, B. BEDNARZ, N.; BELANGER, M. Pedagogical considerations concerning the problem of representation. *En:* JANVIER, C. (ed.). **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1987. p. 227-232.

DUVAL, R. Mathematical activity and the transformations of semiotic representations. *En:* TANIA, M.; CAMPOS, M. (ed.). **Understanding the mathematical way of thinking:** the registers of semiotic representations. Berlin: Springer, 2006 p. 21-43.

EISENHARDT, K. Building theories from case study re-search. **Academy of Management Review**, New York, v. 14, p. 532-550, 1989.

ELI, J.; MOHR-SCHROEDER, M.; LEE, C. Mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. **Mathematic Education Research Journal,** Australia, v. 23, n. 3, p. 297-319, 2011.

GARCÍA-GARCÍA, J.; DOLORES-FLORES F. Exploring pre-university students mathematical connections when solving Calculus application problems. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,** London, v. 52, n. 6, p. 912-936, feb. 2020.

GOLDIN, G. A. Representation in school mathematics: A unifying research perspectives. *En:* KILPATRICK, J.; MARTIN, W. G.; SCHIFTER, D. (ed.). **A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics.** Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2003. p. 275-285.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

GOLDIN, G. A.; SHTEINGOLD, N. Systems of representations and the development of mathematical concepts. *En:* CUOCO, A.; CURCIO, F. (ed.). **Roles of representations in school mathematics**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2001. p.1-23.

GLASER, B. G.; STRAUSS, A. L. **The discovery of grounded theory**: strategies for qualitative research. New York: Aldine Gruyter, 1967.

GREENO, J. G.; HALL, R. P. Representation: Learning with and about representation forms. **The Phi Delta Kappa**, Bloomington, v. 78, p. 361-367, jan. 1997.

HEGARTY, S. Teaching as a knowledge-based activity. **Oxford Review of Education,** Oxford, v. 26, n. 3-4, p. 451-465, 2000.

JANVIER, C. **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.** Washington DC: Lawrence Erlbaum, 1987.

KAPUT, J. Representation system and mathematics. *En:* JANVIER, C. (ed.). **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1987. p. 19-26.

KAPUT, J. **Teaching and learning a new algebra with understanding.** Dartmouth: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, 2000.

MA, L. **Knowing and teaching elementary mathematics**: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Washington DC: Lawence Erlbaum, 1999.

MAINALI, B. Representation in Teaching and Learning Mathematics. **International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology,** Estambul, v. 9, n. 1, p. 1-21, 2021.

MASON, J.; SPENCE, M. Beyond mere knowledge of mathematics: the importance of knowing-to act in the moment. **Educational Studies in Mathematics**, Berlín, v. 38, p. 135-161, mar. 1999.

MOON, K.; BRENNER, M. E.; JACOB, B.; OKAMOTO, Y. Prospective secondary mathematics teachers' understanding and cognitive difficulties in making connections among representations. **Mathematical Thinking and Learning**, London, v. 15, n. 3, p. 201-227, 2013.

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A.; RODRÍGUEZ-VASQUEZ, F. M.; FONT, V. A new view about connections: the mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. **International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology,** London, pendiente de publicación, Aceptado 2020.

RODRÍGUEZ-NIETO, C.; RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ, F. M.; FONT, V.; MORALES-CARBALLO, A. Una visión desde el networking TAC-EOS sobre el papel de las conexiones matemáticas en la comprensión de la derivada. **Revemop**, Ouro Preto, v. 3, p. 1-32, 2021a.

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A.; FONT, V.; BORJI, V.; RODRÍGUEZ-VASQUEZ, F. M.; FONT, V. Mathematical connections from a networking of theories between extended theory of mathematical connnections and onto-semiotic approach. **International Journal of Educatio in Mathematics, Science and Technology,** London, Pendiente de publicación, Fecha de aceptación: 2021b

RODRÍGUEZ-NIETO, C.; RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ, F. M.; GARCÍA-GARCÍA, J. Exploring University Mexican Students' Quality of Intra-Mathematical Connections When Solving Tasks About Derivative Concept. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, London, v. 17, n. 9, p. 1-21, 2021.

ISSN 1980-4415
DOI: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a17

ROWLAND, T. The Knowledge Quartet: the genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teacher's mathematics knowledge. **SISYPHUS Journal of Education**, Lisboa, v. I, n. 3, p. 15-43, abr. 2014.

ROWLAND, T. Researching Mathematical Knowledge in Teaching. *En:* LLINARES, S.; CHAPMAN, O. (ed.). **International Handbook of Mathematics Teacher Education:** Knowledge, Beliefs, and Identity in Mathematics Teaching and Teaching Development. Leiden: Brill, 2020. p. 105-128.

ROWLAND, T.; TURNER, F.; THWAITES, A.; HUCKSTEP, P. **Developing primary mathematics teaching.** Singapore: SAGE Publications Ltd., 2009.

SCHOENFELD, A. H. Episodes and executive decisions in mathematical problem solving. *En:* ANNUAL MEETING OF THE AMERICAN EDUCATIONAL RESEARCH ASSOCIATION, 49, 1981, Los Ángeles. **Proceedings [...]** Los Ángeles: ERIC Documentation Reproduction Service No. ED201505, 1981. p. 1-73.

SCHOENFELD, A. H. Reframing teacher knowledge: a research and development agenda. **ZDM Mathematics Education**, Karlsruhe, v. 52, p. 359–376, may. 2020.

SHULMAN, L. E. Those who Understand: Knowledge Growth in Teaching. **Educational Researcher**, Washington, v. 15, n. 2, p. 4-14, feb. 1986

STRONG, M.; BARON, W. An analysis of mentoring conversations with beginning teachers: suggestions and responses. **Teaching and teacher education,** Amsterdam, v. 20, p. 47-57, 2004.

VERGNAUD, G. Conclusions. *En:* JANVIER, C. (ed.). **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, 1987. p. 227-232.

WESTON, T. L.; KLEVE, B.; ROWLAND, T. Developing an online coding manual for Knowledge Quartet: An international project. **Proceedings of. British Society for Research into Learning Mathematics**, London, v. 32, n. 3, p. 179-184, 2013.

ZHANG, J. The nature of external representations in problem solving. **Cognitive Science**, Nueva Jersey, v. 2, p. 179-217, Abril. 1997.

Submetido em 28 de Julho de 2021.
Aprovado em 02 de Novembro de 2021.