ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN https://doi.org/10.24844/EM3402.06

El MOOC, un entorno virtual para la resolución de problemas matemáticos

MOOC, a virtual environment for mathematical problem solving

Martha Leticia García Rodríguez,[1]
William Enrique Poveda Fernández[2]

Resumen: Se analiza la forma en que los participantes de un Curso en Línea Masivo y Abierto (MOOC) llevan a cabo los procesos de resolución de problemas, cuando utilizan GeoGebra e interaccionan en foros de discusión. El proceso se llevó a cabo de acuerdo con la construcción de representaciones dinámicas de los problemas; la exploración de diferentes propiedades y relaciones entre los elementos que conforman la representación; y, el uso de estrategias como el arrastre de objetos, la cuantificación de sus atributos y la identificación del lugar geométrico. Se utilizó el método de la etnografía virtual para analizar la comunicación asincrónica entre los participantes en los foros. El proceso de resolución de problemas inició una conversación, es decir, una red de interacciones que condujo al uso de nuevas estrategias de solución y a la construcción de nuevo conocimiento, en donde, los participantes pudieron avanzar a su propio ritmo y romper con limitaciones espaciales y temporales. Además, las interacciones en los foros se llevaron a cabo entre personas con actividades profesionales o con grado académico diferente.

Fecha de recepción: 21 de septiembre de 2020. **Fecha de aceptación**: 11 de febrero de 2022.

[1] Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, Programa de Matemática Educativa, mlgarcia@ipn.mx, orcid.org/0000-0003-2435-1334.

[2] Departamento de Educación Matemática, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, william.poveda@ucr.ac.cr, orcid.org/0000-0001-5392-0036.

Palabras clave: *MOOC, Resolución de Problemas, Tecnologías digitales.*

Abstract: This study aims to analyze the way participants of a Massive Open Online Curse (MOOC) accomplish the processes of problem-solving when they use GeoGebra and interacts in forum discussions. The processes were analyzed according to: the construction of dynamic representations of the problems; the exploration of different properties and relationships between its elements; and, the use of strategies such as dragging objects, quantification of its attributes and locus identification. Virtual ethnography was the used method to analyze the asynchronous communication between participants in the forums. The problem-solving process started a conversation, that is, a network of interactions that led to the use of new solution strategies and the construction of new knowledge, where the participants were able to advance at their own pace and to break with geographical and temporary limitations. The interactions in the forums took place between people with different professional activities or academic degrees.

Keywords: *MOOC, Problem-Solving, Digital Technologies*

1. INTRODUCCIÓN

Existen diversos términos para referirse a plataformas digitales con funciones específicas relacionadas con la gestión de los procesos de aprendizaje. García y López (2011) caracterizan los entornos virtuales de aprendizaje como espacios en los que tienen lugar procesos intencionales de aprendizaje, el término "entorno virtual de aprendizaje" se aplica a las plataformas digitales que las instituciones utilizan para desarrollar su oferta de formación virtual.

Diversas universidades han creado entornos virtuales de aprendizaje llamados cursos en línea masivos y abiertos (MOOC, por sus siglas en inglés) para ofrecer a sus estudiantes, y en general a cualquier persona, espacios de estudio e interacción con otros participantes, para el desarrollo de temas diversos. El primer MOOC fue un curso abierto en un tema de teoría educativa, se desarrolló en la Universidad de Prince Edward Island y se ofreció de forma gratuita en 2008, este curso rápidamente generó una demanda que se tradujo en cientos de personas registradas y en el interés de conocer lo que significaría que miles de personas hablaran sobre el mismo tema en la web abierta (McAuley *et al.*, 2010).

En la actualidad, los MOOCs siguen experimentando un aumento en su oferta y demanda. Class Central –motor de búsqueda y revisión de sitos que ofrecen MOOCs– publicó un reporte de la demanda que han tenido hasta el año 2021; 220 millones de estudiantes sin considerar a los de China, y se han agregado hasta ese año, más de 3100 cursos (Shah, 2021).

Un MOOC se caracteriza por ser un curso en línea que permite a una gran cantidad de individuos con diferentes niveles de estudios, edad, conocimientos y ubicación geográfica, un registro gratuito y abierto en los que los interesados auto gestionan su aprendizaje de acuerdo con sus propios tiempos, objetivos, conocimientos, habilidades e intereses comunes. Los MOOCs se diseñan y ofertan con la participación de instituciones educativas de prestigio y, en un gran número de ellos, no se solicita ningún requisito ni experiencia previa con los temas del curso, se imparten en un periodo de tiempo predefinido y para acceder a ellos, solo se requiere contar con conexión a Internet. Las distribuciones de los cursos por áreas de estudio muestran una fuerte orientación a temas de negocios y de tecnología con 20.9% y 20.2% del total de cursos, de acuerdo con la información publicada en 2021 (Shah, 2021).

La oferta de MOOCs relacionados con las matemáticas escolares es muy baja, Velasco y Gómez (2019) reportan que, en noviembre de 2019, el resultado de una búsqueda en el portal "*MOOC List*" con el término "mathematics", arrojó una lista de 12 cursos, de los cuales solamente dos se referían a matemáticas escolares (p. 127). Al realizar una búsqueda en Class Central con el término "mathematics" se encontró que hasta diciembre de 2021 se han diseñado 1471 cursos, de ellos, 116 han sido de educación y enseñanza y 4 de ellos en progreso hasta esta fecha (Shah, 2021).

En relación con los usuarios de los MOOC, existen investigaciones que reportan que, en los países desarrollados, durante 2013, alrededor de 83% de los participantes contaban con uno o más títulos. Para 2014 esta situación cambió, ya que 33% de los inscritos, informaron tener a lo más una educación de bachillerato. Más allá del porcentaje de participantes y su nivel educativo, resulta relevante, como lo menciona Bras (2016), considerar que las personas se inscriben en un MOOC para satisfacer distintas necesidades, como las de un aspirante o de un egresado de una universidad que busca conocimientos sobre temas específicos, las de desarrollo profesional o las de una persona que no siguió estudios universitarios y que busca una forma de prepararse.

En el ámbito educativo, los MOOCs han brindado un nuevo método para el desarrollo profesional docente, en ellos, los profesores pueden acceder a cursos de cualquier tema y en diferentes lugares y momentos. Además, pueden aprender de acuerdo con sus necesidades individuales y formar parte de una comunidad de aprendizaje con participantes de todo el mundo (Ji y Cao, 2016). Aldon *et al.* (2017) mencionan el caso particular de Italia y Francia, en donde se utilizaron MOOCs para la capacitación de profesores en el área de las tecnologías digitales.

Borba *et al.* (2016) documentan que los MOOCs, como un entorno virtual de aprendizaje, también han sido utilizados en la formación permanente de profesores de matemática. Exponen dos casos, el primero un MOOC para capacitar a profesores y estudiantes en los nuevos Common Core State Standards, en Estados Unidos; el segundo un proyecto de formación de profesores para la implementación de un nuevo currículo en Costa Rica. En Colombia, Velasco y Gómez (2019) mencionan el uso de MOOCs como un medio para ofrecer a profesores de primaria diversas herramientas conceptuales y metodológicas en aras de que las puedan aplicar con sus estudiantes y generar mejores oportunidades que les permitan desarrollar competencias matemáticas.

Por otra parte, Flotts *et al.* (2016) recomiendan propuestas didácticas para los docentes sobre los conocimientos, destrezas, capacidades, habilidades, principios, valores y acciones necesarias para que los estudiantes de la región de América Latina desarrollen procesos cognitivos que les permitan hacer frente a situaciones diversas de su entorno, como la toma de decisiones utilizando la información disponible; la resolución de problemas simples utilizando información matemática explícita en un enunciado y estableciendo relaciones directas necesarias para llegar a la solución y; la resolución de problemas complejos, en los que se requiere la reorganización de la información matemática presentada en el enunciado y el establecimiento de relaciones no explícitas para llegar a la solución.

En los Common Core State Standards (National Governors Association, 2020) se identifica un conjunto de estándares académicos propuestos para matemáticas, resumen lo que un educando debe saber y puede hacer al final de cada grado, fueron propuestos para garantizar que todos los estudiantes se gradúen del bachillerato con las habilidades y conocimientos necesarios para cursar con éxito sus estudios universitarios. El primero de ellos se refiere a un estándar de proceso de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, representación y conexiones. Se considera que un estudiante que es competente en matemáticas explora el significado de un problema y piensa en una forma de iniciar el proceso de resolución, analiza los datos y las restricciones del problema para establecer conjeturas y planificar una estrategia, considera problemas similares eliminando alguna restricción para comprender mejor la solución, cuenta con elementos para evaluar su progreso o cambiar la ruta si lo considera necesario.

Schoenfeld (1985) y Santos-Trigo (2014) muestran coincidencia en que el uso de resolución de problemas es un medio donde intervienen los procesos de: explorar diferentes representaciones, buscar patrones, invariantes y relaciones entre objetos matemáticos, presentar argumentos, comunicar resultados, buscar diversos métodos de solución, plantear preguntas y formular nuevos problemas.

Las aportaciones anteriores ponen de manifiesto que los MOOCs pueden brindar a sus participantes experiencias de aprendizaje sobre distintos contenidos matemáticos y conocimientos pedagógicos para desarrollar competencias matemáticas. En este sentido, los foros virtuales se convierten en una herramienta de los MOOCs para favorecer el aprendizaje a través del intercambio de ideas entre los participantes (Ramírez *et al.*, 2020).

Se identifica a la resolución de problemas como una habilidad cognitiva que permite a un sujeto hacer frente a situaciones diversas de su entorno (United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, 2015) y como un estándar de proceso que contribuye para que un estudiante sea competente en matemáticas (National Governors Association, 2020). Sin embargo, al ser los MOOCs cursos masivos, los participantes no necesariamente reciben e interpretan la información contenida en los cursos de la misma forma, por lo que ha surgido una línea de investigación en la que se analizan aspectos del aprendizaje de los participantes en los MOOCs (Liyanagunawardena *et al.*, 2013).

Es en esta línea en la que se inscribe la investigación que aquí se reporta y para la que se diseñó un MOOC basado en la resolución de problemas matemáticos y el uso de tecnologías digitales que tuvo como propósito generar un entorno virtual masivo y asincrónico en el que los participantes relacionaran aprender matemáticas con la resolución de problemas. La pregunta que guio la investigación fue: ¿en qué forma los participantes de un MOOC llevan a cabo los procesos de resolución de problemas utilizando GeoGebra y participando en foros de discusión?

El artículo consta de cinco secciones, la primera corresponde a una introducción al tema, en la segunda se presenta el marco conceptual en el que se incluyen elementos teóricos relacionados con la resolución de problemas y el uso de un Sistema de Geometría Dinámica (SGD); en la tercera se describen los métodos y procedimientos que se emplearon para llevar a cabo la investigación; en la cuarta se presentan el análisis de datos y la discusión de resultados y la última sección corresponde a las conclusiones.

2. MARCO CONCEPTUAL

Un entorno virtual MOOC basado en resolución de problemas matemáticos y uso de tecnologías digitales, impone a sus diseñadores el desafío de motivar a los participantes para compartir sus ideas y colaborar en los foros durante la resolución de los problemas propuestos. Los foros virtuales se consideran una herramienta para promover el aprendizaje en forma colaborativa y favorecer la adquisición y desarrollo de habilidades y conocimientos (Ramírez *et al.*, 2020; Jyothi *et al.*, 2012).

En un MOOC, está documentado que los usuarios prefieren utilizar el foro propio de la plataforma donde se construyó el curso, antes que otras herramientas de comunicación externas como redes sociales, blogs o chats para plantear sus ideas (Alagic y Alagic, 2013; Breslow *et al.*, 2013).

Quinton y Allen (2014) definen el foro como un sitio de discusión en línea asincrónico, es decir, un espacio donde las personas tienen la oportunidad de escribir sus ideas o comentarios alrededor de un tema específico. Una ventaja de la comunicación asincrónica es que los participantes cuentan con mayor tiempo para reflexionar en comparación con el que brinda un medio sincrónico. Así, pueden plantear preguntas e interactuar entre ellos en la búsqueda de respuestas y estructurar y organizar sus ideas o razonamientos (Ramírez *et al.*, 2020; Llinares y Valls, 2009).

Cuando las personas acceden a un foro asincrónico llevan a cabo dos acciones principales: leer y escribir. De esta forma, pueden adoptar diferentes comportamientos en términos de estas dos acciones, definiendo distintos perfiles; en un primer grupo están aquellos que preguntan, hacen aclaraciones a otros, dan sus interpretaciones, discuten los temas, entre otros y; en un segundo grupo aquellos que se limitan a dar su respuesta o leer las participaciones o discusiones de otros (Rau *et al.*, 2008; Rabbany *et al.*, 2011).

Cuando una persona escribe sus ideas en relación con un tema específico o expone su razonamiento matemático en el foro, se inicia un ciclo al cual Ernest (2016) denomina conversación. En esta, otros participantes aceptan, modifican o niegan la idea original o bien, proponen otras a partir del comentario inicial.

El beneficio de utilizar el foro en un MOOC radica en que los razonamientos iniciales podrían ser refinados y transformados. En este proceso, los participantes contribuyen con sus opiniones o pensamientos y analizan las contribuciones de los demás (Quinton y Allen, 2014).

Según las reflexiones anteriores, los procesos asociados con la comprensión de los problemas y sus posibles soluciones se pueden favorecer a través de la comunicación y la discusión con los demás compañeros, en las conversaciones que se dan en los foros. En el caso del MOOC que aquí se reporta, sus diseñadores tuvieron, como lo mencionan Sergis *et al.* (2017), la oportunidad de investigar en los foros sobre el proceso de aprendizaje de los participantes.

De esta forma, los foros resultan importantes en el proceso de comunicación de ideas y de resolución de problemas y a la vez rompen con ideas tradicionales que se tienen sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Esto es, concebir que hacer matemáticas significa seguir las reglas dispuestas por el profesor; conocer matemáticas está asociado con recordar y aplicar la regla correcta; y, la verdad matemática se determina solo cuando la respuesta a una pregunta es ratificada por el maestro (Schoenfeld, 1985). En contraposición, Schoenfeld (1992) argumenta que hacer matemáticas debe verse como un espacio que genere oportunidades de experimentación y comunicación en donde los estudiantes, con ayuda de sus profesores, desarrollen nuevos conocimientos y estrategias para resolver diversos problemas.

Aprender matemáticas vía resolución de problemas enfatiza que "la comprensión o el desarrollo de ideas matemáticas conllevan un proceso de reflexión donde el estudiante, constantemente, refina o transforma sus ideas y formas de pensar como resultado de participar activamente en una comunidad de práctica o aprendizaje" (Santos-Trigo, 2014, p. 21).

Moreno-Armella y Santos-Trigo (2016) argumentan que, durante el proceso de resolución de problemas matemáticos, el uso de tecnologías de la información y la comunicación y las tecnologías específicas en matemática, como un SGD, pueden llegar a convertirse en herramientas que favorecen y fomentan la curiosidad de los estudiantes hacia la comprensión de conceptos y relaciones matemáticas.

GeoGebra es un SGD que permite explorar diferentes propiedades y relaciones entre objetos matemáticos, factores que pueden potenciar los procesos de resolución de problemas que propone Schoenfeld (1992). La persona que resuelve un problema, desde un inicio, tiene el reto de representarlo en GeoGebra en términos de las propiedades de los objetos involucrados en el mismo, lo que implica el uso de conocimientos previos o la investigación de los conceptos asociados con los objetos matemáticos.

Diversos autores definen un SGD en función del arrastre (Arzarello *et al.*, 2002; Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010). Al arrastrar un objeto de una figura es necesario que se conserven sus propiedades según fue construida, esto se denomina una representación dinámica, por ejemplo, al construir un cuadrado y al arrastrar uno de sus vértices, la figura resultante debe seguir siendo un cuadrado (Geeraerts *et al.*, 2014; Leung, 2015). En la figura 1 se muestra un cuadrado de lado 3 y área 9, al arrastrar su vértice *B*, la nueva figura geométrica conserva las propiedades del cuadrado. La exploración se basa en una familia de cuadrados y no solo en un cuadrado de lado *n*, ya que, al arrastrar *A* o *B*, se obtienen diferentes cuadrados.

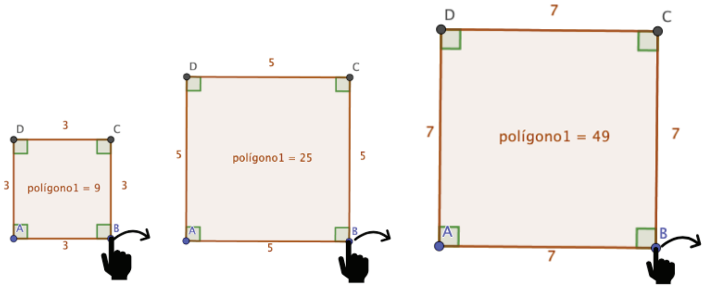


Figura 1. Arrastre de un objeto dentro de una representación dinámica. Elaborado a partir de Geeraerts *et al.* (2014)

El arrastre de un punto se convierte en un elemento importante durante la exploración del problema, ya que, mediante la cuantificación de los atributos de los objetos matemáticos, por ejemplo, los valores de áreas, perímetros, segmentos, ángulos, pendientes, etc., es posible observar patrones o invariantes de los elementos que conforman la figura. En la figura 1, al arrastrar el punto B, se observa que GeoGebra actualiza las medidas de los lados de los cuadrados y sus áreas.

Así, una estrategia asociada con el uso de GeoGebra es la cuantificación de atributos de un objeto, que, junto con el arrastre, permiten observar variaciones instantáneas en las propiedades de los objetos matemáticos de la figura, y determinar invariantes que orienten la formulación de conjeturas hacia la solución del problema (Fahlgren y Brunström, 2014).

Otra estrategia consiste en trazar el rastro que deja un punto cuando se mueve otro elemento de la representación dinámica, lo que revela el comportamiento de los objetos matemáticos involucrados en el problema (Poveda, 2020). Por ejemplo, en la figura 2 se muestra el ΔABC isósceles, el punto C está sobre la recta $\overleftrightarrow{r}$ que es mediatriz del lado $\overline{AB}$, $\overleftrightarrow{q}$ es mediatriz de $\overline{BC}$ y $\overleftrightarrow{p}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{r}$ y pasa por C. Al arrastrar el punto C se puede observar el rastro que deja D (punto de intersección de $\overleftrightarrow{p}$ y $\overleftrightarrow{q}$). Esto resulta importante en el proceso de exploración y formulación de conjeturas hacia la solución. En este caso, una conjetura basada en argumentos visuales (rastro de D) y empíricos (ángulos rectos) es que el rastro que deja el punto D cuando se mueve C, es una parábola. Durante el proceso de resolución de problemas, la validación de conjeturas debe transitar desde el uso de argumentos empíricos o visuales hasta la presentación de una prueba o demostración matemática (National Council of Teachers of Mathematics, 2000).

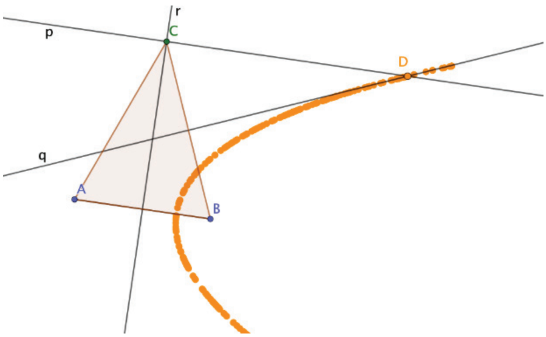


Figura 2. Rastro del punto D cuando se mueve C en la configuración dinámica.

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011) presentan un marco en el que se organiza en cuatro etapas, el proceso que siguen las personas cuando resuelven un problema utilizando un SGD. La primera es la *comprensión del problema*, aquí la persona debe identificar las propiedades matemáticas de los objetos involucrados, lo cual es la base para crear una representación dinámica.

La segunda es *la exploración del problema*, donde la representación dinámica se convierte en un medio que permite visualizar el comportamiento de objetos y sus propiedades al arrastrar algunos elementos y efectuar exploraciones que pueden conducir a la formulación de conjeturas que pueden justificarse mediante argumentos visuales (gráficas) o empíricos (datos numéricos, tablas en la hoja de cálculo) entre otros.

La tercera se refiere a los *diferentes acercamientos para la solución del problema*, la idea central es el uso de diversas estrategias asociadas con el SGD que conduzcan a la solución. La cuarta es la *integración*, aquí se relacionan diferentes soluciones del problema con sus justificaciones. Esta etapa enfatiza la importancia de contrastar diferentes argumentos utilizados en la justificación de la solución como un medio para desarrollar conocimiento matemático.

3. EL MOOC. CONSTRUCCIÓN DE MODELOS DINÁMICOS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

El MOOC en el que se basa este estudio se implementó en la plataforma Open edx, que es parte de MéxicoX, de la Secretaría de Educación Pública de México. El objetivo fue generar un entorno virtual en el que se llevaran a cabo procesos de resolución de problemas utilizando GeoGebra y participando en foros de discusión. Los procesos de resolución de problemas analizados corresponden a los mencionado por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011).

El curso constó de cinco actividades, cada una incluyó: (1) un problema; (2) videos como una guía para que los participantes construyeran su propia representación dinámica del problema; (3) vínculos a la plataforma KhanAcademy para la consulta de conceptos o relaciones matemáticas; (4) Applets de GeoGebra; (5) dos cuestionarios; y, (6) al menos un foro.

La duración de cada actividad fue de una semana, y los estudiantes pudieron revisar o trabajar en las actividades de las semanas anteriores, la tabla 3.1 incluye las actividades y los objetivos de cada una.

Tabla 3.1. Actividades del MOOC

Actividad	Objetivos
1. Mediatriz, altura y mediana de un triángulo.	i) Construir las rectas notables del triángulo y hacer explícitos los conceptos y propiedades matemáticas de una cada. ii) Mostrar los “comandos” de GeoGebra para construir las rectas notables del triángulo.
2. Construcción de una familia de triángulos rectángulos.	i) Mostrar la estrategia del movimiento controlado y rastro de un objeto para observar invariantes en el comportamiento de otros elementos.
3. Construcción de la recta tangente a una circunferencia que pasa por un punto que no pertenece a esta.	i) Relajar las condiciones iniciales del problema como una estrategia que se potencia con el uso de GeoGebra.
4. Dado ΔABC, determinar el área del triángulo cuyos vértices son el baricentro, el ortocentro y el circuncentro de ΔABC	i) Construir y explorar una representación dinámica de un triángulo, su circuncentro, ortocentro y baricentro. ii) Formular conjeturas y, justificar su validez.
5. De todos los rectángulos que tienen un perímetro fijo, determinar las dimensiones del que tiene área máxima.	i) Relacionar diversos conceptos en un problema tradicional de variación. ii) Mostrar la importancia de la comprensión de conceptos sin recurrir a la construcción de un modelo algebraico.

Fuente: Elaboración propia.

4. MÉTODOS Y PROCEDIMIENTOS DE LA INVESTIGACIÓN

Dado que el objetivo de la investigación fue analizar el modo en que los participantes del MOOC llevan a cabo, mediante un foro, los procesos de resolución de problemas, se consideró que el método de la etnografía virtual era el más apropiado, debido a que se orienta al estudio de comunidades virtuales en las que se establecen formas de comunicación tanto sincrónicas como asincrónicas, mediante correo electrónico, wikis, redes sociales, redes de colaboración o foros así como al análisis de las relaciones interpersonales en las dimensiones sociales, afectivas y cognitivas (Ruiz y Aguirre, 2015). En la investigación que se reporta se estudió desde el dominio cognitivo, la comunicación asincrónica en los foros entre los participantes del MOOC, para determinar el qué, cómo, quién y cuándo de lo que acontece en torno a la resolución de los problemas.

La recolección de datos se llevó a cabo en los foros mediante observación no participante, se observaron los procesos de resolución: comprensión y exploración del problema, propuestas de diferentes acercamientos hacia la solución del problema e integración que fueron realizados por los participantes. La unidad de análisis de esta investigación son los procesos de resolución de problemas desarrollados por los estudiantes; la unidad de observación, las conversaciones entre los participantes en los foros en cada una de las actividades del curso.

Participantes

En el MOOC se inscribieron 1106 personas, y en este documento se reporta la participación de los 88 que compartieron sus ideas y discutieron las de otros al menos una vez en cada uno de los seis foros de las actividades 4 y 5. La edad de estas 88 personas osciló entre 16 y 67 años y en su mayoría eran de Chile, Colombia, Costa Rica y México. Una encuesta realizada al final del MOOC permitió conocer el grado académico y la profesión de estos 88 participantes (tabla 4.1).

Tabla 4.1. Participantes en los foros de las actividades 4 y 5

Nivel académico	Cantidad	Actividad profesional
Bachillerato	8	Estudiantes de bachillerato
Licenciatura	75	68 profesores de matemática de bachillerato 7 no proporcionaron información
Maestría	3	2 son profesores universitarios 1 no proporcionó información
Doctorado	2	No proporcionaron información
Total	88	

Fuente: Encuesta realizada al finalizar el curso.

Durante el curso los participantes revisaron las actividades a realizar antes de escribir la propia en los foros. Las indicaciones para la participación en los foros fueron: leer, analizar y comentar las respuestas propuestas por otras personas, excepto la del primer participante, antes de plantear las propias. Lo anterior con el propósito de generar conversaciones entre los participantes y evitar la repetición de ideas o argumentos matemáticos sin aportar a lo mencionado en participaciones previas.

5. ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En este documento se presenta el análisis que corresponde a las actividades 4 y 5. El análisis de datos se realizó en tres etapas: i) reducción de datos, ii) organización y presentación de datos, y iii) elaboración de las conclusiones (Miles y Huberman, 1994). Para las dos primeras, se transcribieron las conversaciones y se enumeraron las participaciones del 1 al 524 (524 es el total de participaciones en los 6 foros durante las actividades 4 y 5), se utilizó la notación detallada en el Anexo 1. Cada conversación se redujo a, lo que se denominó un “extracto”, en el que se identificaron y analizaron los procesos de resolución de los problemas incluidos en las actividades 4 y 5, que fueron realizados por la mayoría de los participantes, y que se consideraron relevantes por la evidencia que proporcionaron relacionada con los objetivos de esta investigación. Cada extracto se organizó en tablas, el número que aparece en el lado izquierdo de cada tabla corresponde al orden de participación, así, 01 corresponde al comentario realizado en la primera participación; también se incluye el día y la hora (tiempo de la Ciudad de México) de tal participación. En este documento se enumeraron los participantes que intervinieron en cada extracto, reiniciando la numeración en cada tabla, por ejemplo, participante 1, en la tabla 1 corresponde a quien brindó la primera evidencia que se reporta, el participante 1 en la tabla 2 es quien brindó la primera evidencia en el segundo extracto.

5.1. Actividad 4 del MOOC. Área de un triángulo

Los participantes, previamente, habían trabajado en la construcción y revisión de propiedades de la mediana, la altura y la mediatriz de un triángulo. En esta actividad se presentó el enunciado del problema: dado ΔABC, determinar el área del triángulo cuyos vértices son el baricentro, el ortocentro y el circuncentro de ΔABC.

Extracto 1. Los participantes inician con la exploración del problema

Los participantes construyeron una representación dinámica del problema y la compartieron en el foro, durante la semana número cinco en que se implementó el curso. En la tabla 5.1 se presenta el primer extracto de conversación en el que se hace referencia al comando medición de áreas de GeoGebra y que permitió asociar el área de ΔGHO con cero, lo que generó una reflexión y discusión relacionada con las propiedades del triángulo; en la primera columna se presenta el número de intervención, el día y la hora en horario de la Ciudad de México (CDMX) en que estas se efectuaron.

Tabla 5.1. Una primera aproximación al problema

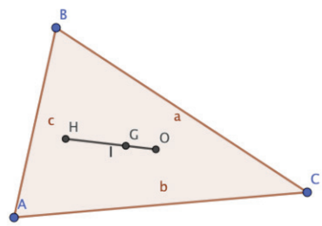
<table>
<tr><th>Intervención</th><th>Proceso de la resolución del problema</th><th>Evidencias de los participantes en el foro</th></tr>
<tr><td>03
Día 1 de la semana 5
07:31
(Hora CDMX)</td><td>Comprensión del problema: Realizan una construcción geométrica que modela el problema.</td><td>Participante 1: [...] construí un triángulo ABC y tracé los puntos G, H y O, [estos puntos corresponden al circuncentro, baricentro y ortocentro] al construir el ΔGHO se obtiene que su área es cero [...]. No entiendo por qué [el participante comparte su construcción en GeoGebra]</td></tr>
<tr><td>05
Día 1
08:02</td><td rowspan="4">Exploración 1 del problema:
La representación dinámica se convierte en un medio que permite visualizar el comportamiento de objetos y sus propiedades
Formulación de una conjetura</td><td>Participante 2: Un triángulo no puede tener área cero [...] si fuera así no existe el triángulo</td></tr>
<tr><td>18
Día 1
20:25</td><td>Participante 3: Al construir el ΔGHO en GeoGebra y obtener que su área es 0 significa que no es posible hacer tal construcción, noten que los puntos G, H y O son colineales [el participante comparte su construcción en GeoGebra]


Figura 5.1. Captura de pantalla del archivo GeoGebra compartido por el participante que hizo el comentario 18</td></tr>
<tr><td>36
Día 3
05:36</td><td>Participante 4: [...] al mover los vértices del triángulo de tal manera que sea equilátero, observo el caso en que los tres puntos son el mismo [...]</td></tr>
<tr><td>37
Día 3
06:00</td><td>Participante 5: [...] tienes razón [nombra al participante 4], los tres puntos son el mismo si es triángulo equilátero y también isósceles [...]</td></tr>
</table>

38 Día 3 10:59	Diferentes acercamientos hacia la solución del problema: El uso de GeoGebra y otros recursos como Wikipedia permiten justificar o descartar la conjetura	Participante 6: Es incorrecto lo que mencionas del triángulo isósceles, los tres puntos son el mismo solo si el triángulo es equilátero [el participante hace referencia a un vínculo de Wikipedia donde detalla lo mencionado]
51 Día 3 21:33	Integración: • Relacionan sus justificaciones, con los conceptos matemáticos utilizados • Emerge el Teorema de la recta de Euler	Participante 7: Todo indica que los puntos *G, H* y *O* son colineales, menos en el caso del triángulo equilátero. No se puede formar el ΔGHO y por eso GeoGebra indica que su área es cero [...] ¿cómo se puede justificar? [...]
54 Día 3 22:05		Participante 8: Es interesante cómo enuncian el problema ya que es el Teorema de la Recta de Euler: el baricentro, ortocentro y circuncentro de todo triángulo están alineados [...]

En este extracto de la conversación se contabilizaron 54 participaciones de los cuales se reportan ocho que promovieron la reflexión y discusión de los miembros del grupo. El participante 1 comparte su representación dinámica del problema y, así, inicia la conversación, donde otros formulan la conjetura*: no es posible construir* ΔGHO. De esta forma, cambian del proceso de comprensión del problema a la exploración de este. El arrastrar los vértices del ΔABC y observar la posición de los puntos *H, G* y *O,* permitió al participante 4 identificar el caso particular en el que los tres puntos coinciden. El participante 5 formuló una conjetura que fue refutada por el participante 6 con base en la información de Wikipedia.

Extracto 2. Los participantes encuentran una nueva relación

En el extracto que se presenta en la tabla 5.2, los participantes presentan argumentos empíricos y visuales para justificar la relación entre *G, H* y *O*.

Tabla 5.2. *Justificación 1, un acercamiento basado en el concepto de linealidad*

Intervención	Proceso	Evidencias de los participantes en el foro
57 Día 3 13:05	Exploración 2 del problema: Formulación de una conjetura basado en el arrastre de puntos	Participante 1: Al trazar la recta OG y la recta GH [...] se puede ver que al mover los puntos A, B o C, son la misma recta [...] [imagen]
68 Día 3 16:09	Diferentes acercamientos hacia la solución del problema: • Necesidad de justificar mediante argumentos analíticos la conjetura • Uso del concepto de puntos colineales • La retroalimentación como un medio para refinar ideas matemáticas • La representación dinámica permite visualizar el comportamiento de los objetos involucrados • Emerge la relación: G está entre H y O	Participante 2: ...recuerda que GeoGebra nos puede engañar [...], quizás parezcan ser la misma recta, pero puede suceder que no lo sean [...], necesitamos otros argumentos para comprobar que sean la misma recta [...] [nombra al participante 1]
79 Día 3 21:03		Participante 3: Tres puntos O, G y H son colineales si $d\ (O,\ G)\ +d\ (G,\ H)\ =d\ (O,\ H)$ [$d\ (O,\ H)$ significa distancia del punto O al punto H] [...]. Comprobé que $OG+GH=OH$ entonces O, G y H son colineales [el participante comparte su construcción en GeoGebra]
81 Día 4 02:26		Participante 4: Lo que dices es un caso particular, en general [nombra al participante 3] si se tienen tres puntos A, B y C; y C está entre A y B entonces sí es válido lo que dices [...]
93 Día 4 4:56		Participante 5: Noté que G está entre H y O ¿Será siempre? [...]
104 Día 4 12:16		Participante 6: Es correcto lo que dice [nombra al participante 5], observen que al mover los vértices del triángulo ΔGHO, G está entre H y O [...] no sabía cómo justificarlo, pero lo busqué en Wikipedia, en donde se demuestra que, en la recta de Euler, G siempre está entre O y H. Además, se utiliza semejanza de triángulos para probar que HG es el doble de OG. Esto no lo sabía.

En el extracto 2 se contabilizaron 47 participaciones y se presenta la evidencia de seis participantes que realizaron aportes valiosos en la conversación del foro, durante la exploración del problema en GeoGebra. La idea inicial de trazar las rectas que pasan por O y G y por G y H, y arrastrar cualquier vértice del ΔABC proporcionó información acerca de las propiedades de los puntos O, G y H (participante 1). El participante 3 utilizó la definición geométrica de puntos colineales y sugirió medir segmentos en GeoGebra para comprobar que los puntos *O, G y H* son colineales. Durante la interacción que se llevó a cabo en el foro se refinó el concepto de puntos colineales (participante 4), surge, entonces, la necesidad de verificar que *H-G-O* lo sean. La evidencia muestra que GeoGebra tuvo un papel importante en la identificación visual de las relaciones entre los objetos matemáticos presentes en la representación dinámica del problema.

Extracto 3. Un acercamiento basado en el concepto de pendiente

Los participantes buscan otros argumentos para justificar la colinealidad de los puntos *H, G* y *O*.

Tabla 5.3. Justificación 2, un acercamiento basado en el concepto de pendiente de una recta

Intervención	Proceso	Evidencias de los participantes en el foro
110 Día 3 07:13	Exploración 3 del problema: • Formulación de una conjetura basada en la pendiente de una recta • Uso de la medición para verificar que las pendientes son iguales	Participante 1: [...] creo que una forma de verificar que los puntos *H, G* y *O* son colineales es: trazo la recta *HG* y mido su pendiente, luego trazo la recta *GO* y mido su pendiente, si ambas pendientes son iguales entonces se trata de la misma recta [...] [imagen]
115 Día 3 11:15	Formulación de otra conjetura basada en un caso particular: Retroalimentación para refutar la conjetura	Participante 2: [nombra al participante 1] En ese caso me queda la duda ¿qué pasa si ambas rectas son paralelas? [...] quizás lo sean y no sea posible observarlo en GeoGebra [...]
123 Día 3 17:41		Participante 3: El caso que mencionas no es posible [nombra al participante 2], las dos rectas comparten el punto *G* y tienen la misma pendiente, por lo tanto, no pueden ser paralelas. El argumento de [nombra al participante 1] me parece acertado
137 Día 5 06:58	Integración Emerge la necesidad de utilizar un sistema de coordenadas	Participante 4: Muy buena forma de mostrar que los puntos son colineales, yo solo lo hice de forma geométrica y no se me ocurrió utilizar la pendiente de la recta. Solo recuerden para hablar de pendiente de una recta se necesita un sistema de referencia, en este caso el sistema de plano cartesiano

En el extracto 3 se registraron 27 participaciones y se presentan cuatro de ellas. El participante 1 formula y justifica una conjetura en el contexto de la Geometría Analítica. Los demás participantes contribuyen a la construcción de un argumento matemático basado en el concepto de pendiente de una recta, para concluir la colinealidad de *H, G* y *O*. La estrategia del participante 1 de medir pendientes de rectas en GeoGebra detona en el resto de sus compañeros una reflexión que se refleja en la discusión y la conexión de conceptos de geometría euclidiana y geometría analítica.

En los días 6 y 7, la conversación entre los participantes giró en torno a las ideas matemáticas relacionadas con el Teorema de la Recta de Euler y su aplicabilidad en el ámbito educativo: "la demostración no es simple para trabajarla con estudiantes de secundaria, pero cuando estudiamos rectas notables de un triángulo se puede proponer este problema para evaluar si comprendieron bien los conceptos de mediana, altura y mediatriz de un triángulo". Con esto se refuerza la idea mencionada por de (Ji y Cao, 2016) de que los MOOCs brindan a los docentes un nuevo método para su desarrollo profesional docente. Este proceso se fortaleció con el uso de Wikipedia, que sirvió para la consulta de la demostración del teorema, la cual fue el punto de partida para la construcción de nuevos aprendizajes de los participantes, como lo mencionó un participante en la conversación: "En la demostración de Wikipedia se utiliza semejanza de triángulos para probar que HG es el doble de OG".

5.2 Actividad 5 del MOOC. Una familia de rectángulos de perímetro fijo

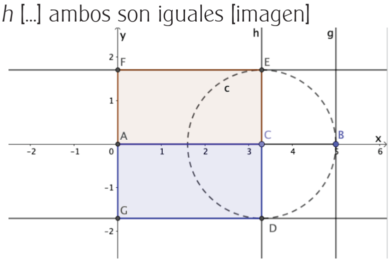
En esta actividad se presentó el enunciado del problema: De todos los rectángulos que tienen un perímetro fijo determinar las dimensiones del que tiene área máxima.

Los participantes observaron un video en el cual se realiza una representación dinámica del problema a partir del semiperímetro del rectángulo *ACDE*, donde *AB* es su semiperímetro y *AC* y *CD* las longitudes de sus lados, la representación dinámica se puede consultar en https://www.geogebra.org/m/eFub5p5g. Posteriormente, se solicitó a los participantes realizar su propia representación, para lo cual siguieron los pasos de video.

Extracto 4. Construcción de una representación dinámica

Se muestran las ideas que surgieron en torno a la comprensión del problema apoyadas en las representaciones dinámicas que realizaron y compartieron los participantes en el foro, durante la semana número seis en que se implementó el curso. Identificaron elementos y propiedades no enfatizadas en la representación dinámica que se les mostró en el video, en su lugar, observaron que se forman dos familias de rectángulos de perímetro fijo, los detalles se muestran en la figura 5.2.

Tabla 5.4. Comprensión del problema, creación de representaciones dinámicas

Intervención	Proceso	Evidencia de los participantes en el foro
201 Día 1 de la semana 6 05:29 (Hora CDMX)	Comprensión del problema: • Se identifican propiedades matemáticas de los objetos involucrados para crear una representación dinámica del problema • Se utiliza la estrategia de arrastrar objetos para observar que las propiedades de la figura se conservan • Se utiliza la estrategia de medición para comprobar que las propiedades de la construcción se mantienen al arrastrar un punto	Participante 1: [...] seguí los pasos de la construcción [el participante hace referencia al video del MOOC] y observé que se forman dos rectángulos pues existen dos puntos de intersección de la circunferencia y la recta *h* [...] ambos son iguales [imagen]  **Figura 5.2.** Captura de pantalla del archivo GeoGebra compartido por el participante 1
209 Día 1 07:56		Participante 2: Excelente manera de hacer la construcción [...], yo tampoco había visto que se forman dos rectángulos congruentes [nombra al participante 1], con esto [...], los estudiantes pueden observar la existencia de infinitos rectángulos que cumplen la condición de poseer el mismo perímetro con solo mover el punto C [...]
235 Día 2 20:17		Participante 3: Para comprobar que la construcción funciona [...], se pueden medir los lados del rectángulo [...] y ver que su perímetro no cambia [...].
236 Día 2 22:01		Participante 4: Las coordenadas del punto *D* representan las dimensiones de los lados del rectángulo [el participante comparte su construcción en GeoGebra] [...]

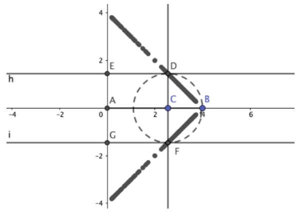
En el extracto 4 se registraron 35 participaciones y se presentan cuatro de ellas. La conversación se mantuvo activa durante dos días. A partir de la representación dinámica realizada y compartida en el foro por el participante 1, se identifican dos familias de rectángulos de perímetro fijo, esto da lugar a la conversación que continúan los participantes 2, 3 y 4. Estos últimos amplían la idea inicial siguiendo la misma línea de pensamiento, a pesar de que habían transcurrido más de 24 horas y 34 participaciones previas.

Por otro lado, se identifican de manera reiterada en la conversación palabras que aluden a la actividad docente de los participantes, como por ejemplo las del participante 2.

Extracto 5. Otra representación dinámica del problema que surge de los participantes

Los participantes representaron de otra manera el problema, para ello, se apoyaron en las aportaciones realizadas por otros en la conversación previa (extracto 5). También, utilizaron el concepto de triángulo rectángulo isósceles y parte de la información proporcionada en el video (tabla 5.5).

Tabla 5.5. Comprensión del problema, creación de otra representación dinámica

Intervención	Proceso	Evidencia de los participantes en el foro
238 Día 3 10:26 (Hora CDMX)	Exploración del problema: La representación dinámica se convierte en un medio que permite visualizar, mediante el rastro, el comportamiento de objetos y sus propiedades	Participante 1: [...] seguí los pasos de la construcción y noté que, al mover C, [...] [nombra al participante 4 del extracto 5] se mueve sobre una recta. El lugar geométrico es una recta y coincide con la hipotenusa de un triángulo isósceles cuyos lados congruentes tienen la misma medida del semiperímetro del rectángulo [...]  **Figura 5.3**. Captura de pantalla del archivo GeoGebra compartido por el participante 1
251 Día 4 13:30	Exploración del problema: Usa la intervención del participante 1 para construir otra representación del problema	Participante 2: [...] yo veo que a partir de un segmento , se construye un triángulo rectángulo-isósceles de catetos de medida *AB*, y al seleccionar cualquier punto en la hipotenusa y trazar rectas perpendiculares a los ejes desde ese punto se obtiene un rectángulo de perímetro fijo [el participante comparte su construcción en GeoGebra] [...]

En el extracto 5 se registraron 13 participaciones y se presentan dos de ellas que resultan relevantes: (1) el inicio de la conversación surgió de una idea expresada en otro foro (extracto 5, participante 4); (2) la exploración del problema utilizando la estrategia de rastro de un punto en una representación dinámica les permitió observar el comportamiento de un vértice del rectángulo; (3) la identificación de un lugar geométrico descrito por *D* al mover el punto *C*; y, (4) la creación de una nueva manera de representar el problema.

Extracto 6. Diferentes acercamientos hacia la solución del problema

En esta parte de la actividad, se proporcionó un video para modelar el comportamiento del área del rectángulo al arrastrar el punto *C* que define una de las dimensiones de este, sin emplear un modelo algebraico. En el video se definió un punto *R* con coordenadas longitud de *AC* y área del rectángulo, luego, se activó su rastro y se movió el punto *C*, la representación dinámica mostrada en el video se puede consultar en https://www.geogebra.org/m/aamfbvdf. En el foro la pregunta fue ¿en qué momento la ordenada de *R* es máxima?

En la conversación un participante asoció el rastro del punto R con una parábola y esto derivó en la búsqueda de diferentes maneras de justificarlo, desde argumentos visuales y empíricos hasta modelos algebraicos, también hicieron referencia a conceptos y criterios de cálculo diferencial (tabla 5.6).

Tabla 5.6. Comprensión del problema, creación de representaciones dinámicas

Intervención	Proceso	Evidencia de los participantes en el foro
256 Día 4 08:23 (Hora CDMX)	Exploración del problema: Formulación de una conjetura basada en argumentos visuales	Participante 1: Visualmente es posible que ese lugar geométrico sea una parábola [...] ¿cómo podemos comprobarlo? [...]
259 Día 4 16:44	Diferentes acercamientos hacia la solución del problema: Construcción de un modelo algebraico GeoGebra proporciona argumentos visuales para la solución del problema	Participante 2: El área del rectángulo se puede asociar con una parábola de ecuación $y = x(a - x)$ cuando $AB = a, x = AC$ unidades lineales [imagen]
266 Día 4 23:57		Participante 3: Una forma visual de justificar que existe un área máxima [...] es mover el punto *C*, la coordenada "y" de *R* aumenta desde cero y luego disminuye hasta volver a ser cero, básicamente es el criterio de la primera derivada [imagen]
301 Día 5 06:29	Integración: Se relacionan diferentes tipos de solución con conceptos matemáticos	Participante 4: [nombra al participante 3] el criterio de la primera derivada es un tema importante y muchas veces no se le da importancia, sino que solo se calcula la derivada y se encuentran los ceros de la función sin darle significado. Se puede utilizar el valor de la pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto *R* para justificar la existencia de un área máxima [el participante comparte su construcción en GeoGebra]
304 Día 5 14:31		Participante 5: El área máxima se obtiene cuando los lados del rectángulo tienen la misma longitud, es decir, cuando se forma un cuadrado [...]. He trabajado con mis estudiantes de bachillerato este problema y al final se sorprenden de la respuesta diciendo ¿cómo es posible que la respuesta sea un cuadrado cuando estamos hablando de rectángulos? [...] [imagen]

324 Día 6 08:49	Integración: Este participante asume como conjetura el comentario del participante 4, y utiliza el arrastre de objetos para confirmar la conjetura Se relacionan diferentes tipos de solución con conceptos matemáticos	Participante 6: [nombra al participante 4], gracias por la sugerencia, tracé la recta tangente a la parábola en el punto , claramente se aprecia en una parte de la gráfica la pendiente positiva y en otra, negativa [imagen] [...]
334 Día 7 12:45		Participante 7: [...] El punto donde la pendiente de la recta tangente cambia de positiva a negativa es el valor asociado al rectángulo de área máxima [...]

En el extracto 6 se registraron 78 participaciones y se presentan siete de ellas. La pregunta que inició la conversación (participante 1) contribuyó a la búsqueda de diferentes argumentos empíricos, basados en el uso de GeoGebra y, posteriormente, a la construcción de argumentos algebraicos basados en conceptos y relaciones de cálculo diferencial: (1) criterio de la primera derivada (participante 3); (2) recta tangente (participante 4); y, (3) valor máximo de una función (participante 7). Aquí, se vuelven a identificar en la conversación palabras asociadas con la actividad docente, como por ejemplo las del participante 5.

5.3. Discusión de resultados

El entorno virtual del MOOC se convirtió en un espacio en el que los participantes utilizaron sus conocimientos y sus habilidades o desarrollaron nuevas para avanzar en la solución de los problemas. Utilizaron información matemática explícita o implícita en el enunciado, reorganizaron esta información y establecieron las relaciones necesarias para llegar a la solución.

Como Schoenfeld (1985) y Santos-Trigo (2014) mencionan para un ambiente presencial, en la resolución de problemas, intervienen diversos procesos: construir y explorar diferentes representaciones, buscar patrones y relaciones entre objetos matemáticos, presentar argumentos, comunicar resultados, buscar diversos métodos de solución, plantear preguntas y formular nuevos problemas. Estos también fueron identificados en el ambiente de aprendizaje virtual y asincrónico del MOOC, a través de los foros y se encuentran en los extractos de cada conversación.

En el MOOC las representaciones dinámicas favorecieron la exploración del problema y promovieron la discusión de diferentes propiedades y relaciones entre objetos matemáticos que fueron identificadas. Esto, de acuerdo con Schoenfeld

(1992), potencian los procesos de resolución de problemas. También, las estrategias asociadas con uso de GeoGebra tales como el arrastre de objetos, la cuantificación de sus atributos y el rastro, se convirtieron en elementos importantes durante la exploración del problema lo que orientó a los participantes a formular conjeturas. GeoGebra proporcionó elementos visuales y empíricos para justificar o refutar dichas conjeturas. La estrategia de medición permitió justificar empíricamente que el baricentro, el ortocentro y el circuncentro de un triángulo, excepto el equilátero, son puntos colineales (tabla 5.3). La estrategia rastro de un punto contribuyó para que los participantes: (1) modelaran un problema de variación sin necesidad de trabajar con un modelo algebraico, como tradicionalmente se presenta en los libros de texto, y (2) construyeran una nueva representación del problema a partir de observar el rastro que deja un punto (tablas 5.4 y 5.5).

También en las conversaciones en los foros, se identificó que los participantes generaron nuevo conocimiento o refinaron alguno que tenían mediante la búsqueda de diferentes argumentos para justificar las conjeturas formuladas: en la tabla 5.1 el participante 7 enuncia el Teorema de la recta de Euler, aparentemente sin conocerlo; el participante 8 relaciona el problema con este teorema que era conocido por él, sin embargo, olvida mencionar el caso particular del triángulo equilátero y, en la tabla 5.2, el participante 6 identifica dos relaciones que no conocía.

6. CONCLUSIONES

Las evidencias recabadas en esta investigación permiten identificar al MOOC como un entorno virtual en donde los participantes tienen la oportunidad de realizar un trabajo autodirigido centrando su atención en aquellos elementos que consideren de su interés. Los foros se convirtieron en espacios de interacción asincrónica y colaborativa, y, además, abrieron la posibilidad de extender la reflexión y discusión matemática. Es decir, los participantes trasmitieron y conocieron las ideas de otros, a partir de esto desarrollaron, modificaron o refinaron sus conocimientos matemáticos y estrategias para resolver problemas.

La etnografía virtual resultó importante en el análisis de datos del MOOC, ya que brindó elementos para reconocer que los participantes no necesariamente pasan por los mismos procesos de resolución de problemas al mismo tiempo. Como los participantes no reciben retroalimentación personalizada por parte de un tutor o profesor, el proceso de resolución de problemas inicia con una idea emitida por un participante que despierta el interés de otros dando respuesta o retroalimentación. De esta forma, construyen una red de interacciones que los conduce a la resolución del problema, al uso de nuevas estrategias o el desarrollo de nuevo conocimiento. Por la naturaleza del MOOC y en particular de sus foros asincrónicos, los participantes pudieron avanzar a su propio ritmo y romper con limitaciones espaciales y temporales. En los foros se diluye el nivel educativo de los participantes, esto es, una idea que inicia una conversación puede surgir de alguien con una actividad profesional o grado académico indistintos.

Un resultado adicional de la investigación es que un alto porcentaje de los participantes más activos en los foros, eran profesores de matemáticas. Donitsa-Schmidt y Topaz (2018) se refieren a las actitudes positivas de los profesores en su experiencia en MOOCs, lo que puede estar relacionado con los resultados obtenidos en ese trabajo y surge como una opción más para ser investigada en el campo de la resolución de problemas y uso de tecnologías digitales.

ANEXO 1

Notación utilizada en la trascripción de los comentarios del foro

Convención	Uso
[...]	Parte del comentario que no aporta información relevante en los objetivos de la investigación.
[texto]	Observación realizada por el investigador con el objetivo de mantener el anonimato de los participantes o para aclarar notación matemática utilizada por los participantes.
[el participante comparte su construcción en GeoGebra]	Archivo GeoGebra compartido por un participante.
[imagen]	Imagen compartida por un participante.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue posible gracias al apoyo del Instituto Politécnico Nacional, a través de la Secretaría de Investigación y Posgrado en el marco de los proyectos con números 20210725 y 20201191.

Este trabajo fue posible gracias al apoyo de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica.

REFERENCIAS

Aldon, G., Arzarello, F., Panero, M., Robutti, O., Taranto, E., y Trgalová, J. (2017, julio 3-6). MOOC for mathematics teacher training: design principles and assessment. En G. Aldon y J. Trgalova (Eds.), *The 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching–ICTMT* 13, Lyon, France. https://ictmt13.sciencesconf.org/data/pages/proceedings_compressed_1.pdf

Alagic, G., y Alagic, M. (2013). Collaborative mathematics learning in online environments. En D. Martinovic, V. Freiman, y Z. Karadag (Eds.), *Visual mathematics and cyberlearning* (pp. 23–48). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2321-4_2

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *ZDM – Mathematics Education*, *34*(3), 66–72. https://doi.org/10.1007/BF02655708

Baccaglini-Frank, A., y Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(3), 225–253. https://doi.org/10.1007/s10758-010-9169-3

Borba, M., Askar, P., Engelbrecht, J., Gadanidis, G., Llinares, S., y Aguilar, M. (2016). Blended learning, e-learning and mobile learning in mathematics education. *ZDM – Mathematics Education*, *48*(5), 589–610. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0798-4

Bras, I. I. (2016). Los MOOC en números: un análisis para comenzar la reflexión. *Revista Digital Universitaria 17*(1), 1–16. http://www.revista.unam.mx/vol.17/num1/art01/art01.pdf

Breslow, L., Pritchard, D., DeBoer, J., Stump, G., Ho, A., y Seaton, D. (2013). Studying learning in the worldwide classroom: Research into edX's first MOOC. *Research & Practice in Assessment*, *8*, 13–25.

Donitsa-Schmidt, S., y Topaz, B. (2018). Massive open online courses as a knowledge base for teachers. *Journal of Education for Teaching*, *44*(5), 608–620. https://doi.org/10.1080/02607476.2018.1516350

Ernest, P. (2016). The unit of analysis in mathematics education: Bridging the political-technical divide? *Educational Studies in Mathematics*, *92*(1), 37–58. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9689-4

Flotts, M. P., Manzi, J., Barrios, C., Saldaña, V., Mejías, N., y Abarzúa, A. (2016). El tercer studio regional comparativo y explicativo. *Aportes para la enseñanza de la matemática* (pp. 11–16). Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000244855

Fahlgren, M., y Brunström, M. (2014). A model for task design with focus on exploration, *explanation*, and generalization in a dynamic geometry environment. *Technology, Knowledge and Learning*, *19*(3), 287–315. https://doi.org/10.1007/s10758-014-9213-9

García, I., y López, C. (2011). Los recursos de aprendizaje. En B. Gros (Ed.), *Evolución y retos de la educación virtual: construyendo el e-learning del siglo XXI* (pp. 93–144). Universitat Oberta de Catalunya.

Geeraerts, L., Venant, F., y Tanguay, D. (2014). Subterranean structures of technological tools and teaching issues in geometry. En L. Gómez-Chova, A. López-Martínez y I. Candel-Torres (Eds), Proceedings of EDULEARN 14 conference (pp. 257–264). IATED Academy.

Ji, Z., y Cao, Y. (2016). A prospective study on the application of MOOC in teacher professional development in China. *Universal Journal of Educational Research*, *4*(9), 2061–2067. https://doi.org/10.13189/ujer.2016.040917

Jyothi, S., McAvinia, C., y Keating, J. (2012). A visualization tool to aid exploration of students' interactions in asynchronous online communication. *Computers & Education*, *58*(1), 30–42. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.08.026

Leung, A. (2015). Discernment and reasoning in dynamic geometry environments. En S. J. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 451–469). Springer.

Liyanagunawardena, T. R., Williams, S., y Adams, A. (2013). The impact and reach of MOOCs: a developing countries' perspective. *eLearning Papers*, *33*, 1–8.

Llinares, S., y Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: Interaction and online video case studies. *Instructional Science*, *37*(3), 247–271. https://doi.org/10.1007/s11251-007-9043-4

McAuley, A., Stewart, B., Cormier, D., y Siemens, G. (2010). *The MOOC model for digital practice*. https://www.oerknowledgecloud.org/archive/MOOC_Final.pdf

Miles, B. M., y Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis*. Sage.

Moreno-Armella, L., y Santos-Trigo, M. (2016). The use of digital technologies in mathematical practices: Reconciling traditional and emerging approaches. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 595–616). Taylor & Francis.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.

National Governors Association. (2020). *Standards for Mathematical Practice. Make sense of problems and persevere in solving them*. Common Core State Standards Initiative. http://www.corestandards.org/Math/Practice/MP1/

Poveda, W. E. (2020). Resolución de problemas matemáticos en GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, *9*(1), 26–42. https://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p26-42

Quinton, S., y Allen, M. (2014). The social processes of web 2.0 collaboration: Towards a new model for virtual learning. En M. Gosper y D. Ifenthaler (Eds.), *Curriculum models for the 21st century* (pp. 35-53). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7366-4_3

Rabbany, R., Takaffoli, M., y Zaïane, O. (2011). Analyzing participation of students in online courses using social network analysis techniques. En M. Pechenizkiy, T. Calders, C. Conati, S. Ventura, C. Romero y J. Stamper (Eds.), *Proceedings of the fourth international conference on educational data mining* (pp. 21-30). Eindhoven University of Technology.

Ramírez, J. A. J., Chamoso, J. M., y González, M. T. (2020). Interacción en foros virtuales al integrar modelización matemática para formar ingenieros. *Enseñanza de las Ciencias*, *38*(3), 161–178. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3041

Rau, P., Gao, Q., y Wu, L. (2008). Using mobile communication technology in high school education: Motivation, pressure, and learning performance. *Computers & Education*, *50*(1), 1–22. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2006.03.008

Ruiz, M. R., y Aguirre, G. (2015). Etnografía virtual, un acercamiento al método y a sus aplicaciones. *Estudios* sobre las Culturas Contemporáneas, 41(XXI), 67–96.

Santos-Trigo, L. M. (2014). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos* (2da ed.). Trillas; Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas.

Santos-Trigo, M., y Camacho-Machín, M. (2011). Framing a problem-solving approach based on the use of computational tools to develop mathematical thinking. En M. Pytlak, T. Rowland, y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2258–2277). Universidad de Rzeszów.

Schoenfeld A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Schoenfeld A. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*. En D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 334–371). Macmillan.

Sergis, S., Sampson, D., y Pelliccione, L. (2017). Educational design for MOOCs: Design considerations for technology-supported learning at large scale. En M. Jemni, Kinshuk, y M. K. Khribi (Eds.), *Open education: From OERs to MOOCs* (pp. 39–71). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-52925-6_3

Shah, D. (2021, diciembre 3). By the numbers: MOOCs in 2021. Class Central. https://www.classcentral.com/report/mooc-stats-2021/

United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization. (2015). *Education 2030: Incheon Declaration and Framework for Action. Towards inclusive and equitable quality education and lifelong learning for all*. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000245656

Velasco, C., y Gómez, P. (2019). Calidad y dificultad de los cuestionarios de un MOOC. *Uni-pluriversidad*, *19*(2), 124–143. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.06

Martha Leticia García Rodríguez

Dirección postal: Calzada Legaria 694, Colonia Irrigación, Alcaldía Miguel Hidalgo, C.P. 11500 Ciudad de México, CDMX.
mlgarcia@ipn.mx
Teléfono: (+52) 5514733104