

Identificación del desarrollo de habilidades visuales espaciales en representaciones y conversión entre registros para calcular volúmenes

Identification of the development of spatial visual skills in representations and conversion between registers to calculate volumes

Estela Juárez-Ruiz,¹
Leticia Sánchez González,²
José Antonio Juárez López³

Resumen: El estudio trata sobre la identificación del desarrollo de habilidades visuales espaciales en tareas de representación de sólidos de revolución y de conversión entre registros para calcular su volumen, que realizan estudiantes de ingeniería. Las habilidades que se estudian son organización y escaneo visual y, reconstrucción, generación y manipulación de la imagen. Se hizo un estudio mixto con un diseño de triangulación. Los sujetos fueron 33 estudiantes de segundo semestre cursando cálculo integral. Se diseñaron tareas asistidas por GeoGebra con base en indicadores creados para cada habilidad. Los resultados indican una mejora significativa en las habilidades, con un repunte en la generación y manipulación de la imagen. Dichas habilidades son de alto nivel pues requieren la visualización de configuraciones tridimensionales y la manipulación mental de estas imágenes. Se identificó que el desarrollo de estas habilidades contribuye en la representación de sólidos de revolución, pero para el cálculo de su volumen es necesaria la conversión entre los registros verbal, gráfico, simbólico y algebraico, para visualizar y representar el

Fecha de recepción: 11 de junio de 2020. **Fecha de aceptación:** 6 de mayo de 2021.

¹ Benemérita Universidad autónoma de Puebla, estela.juarez@correo.buap.mx, orcid.org/0000-0002-2857-0772

² Benemérita Universidad autónoma de Puebla, letysg2010@gmail.com, orcid.org/0000-0002-4386-8913

³ Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, jajul@fcfm.buap.mx, orcid.org/0000-0003-2501-943X

sólido, determinar la expresión correcta del volumen y calcular la integral definida obtenida.

Palabras clave: *Habilidad espacial, visualización, representación, software instruccional, actividades de aprendizaje.*

Abstract: The study deals with the identification of the development of spatial visual skills in tasks of representation of solids of revolution and of conversion between registers to calculate their volume, carried out by engineering students. The skills studied are visual organization and scanning, and reconstruction, generation, and manipulation of the image. A predominantly qualitative mixed case study was done. The subjects were 33 second semester students taking integral calculus. GeoGebra-assisted tasks were designed based on indicators created for each skill. The results indicate a significant improvement in skills, with a significant enhancement in image generation and manipulation. These skills are of a high level since they require the visualization of three-dimensional configurations and the mental manipulation of these images. It was identified that the development of these skills contributes to the representation of solids of revolution, but for the calculation of their volume, it is necessary to convert between the verbal, graphic, symbolic, and algebraic registers, to visualize and represent the solid, determine the correct expression of the volume and calculate the definite integral obtained.

Keywords: *Spatial ability, visualization, representation, instructional software, learning activities.*

INTRODUCCIÓN

La visualización es un campo de investigación de creciente interés en la educación matemática. Se han informado correlaciones consistentes y robustas entre las habilidades de visualización espacial y una variedad de tareas matemáticas, tales como aritmética mental (Kyttälä y Lehto, 2008; Reuhkala, 2001) resolución de problemas verbales (Delgado y Prieto, 2004; Hegarty y Kozhevnikov, 1999), álgebra (Tolar *et al.*, 2009), geometría (Battista, 1990; Delgado y Prieto, 2004; Kyttälä y Lehto,

2008), y matemáticas avanzadas (teoría de grupos, sumatorias, grafos dirigidos, figuras y funciones convexas, entre otros temas) (Wei *et al.*, 2012).

En psicología, las habilidades de visualización son llamadas preferentemente capacidades visuoespaciales. Boaler (2014) define el término *capacidad* como una cierta cantidad de inteligencia que se cree poseen los individuos. En esta disciplina se considera que las capacidades son heredadas, relativamente fijas y medibles por pruebas (Krutetskiĭ, 1976). De esta manera, las capacidades visuoespaciales se pueden medir aplicando diversos instrumentos que permiten determinar la capacidad de un individuo para realizar ciertas tareas.

Ya desde los años 20 del siglo pasado, los investigadores intentaban definir la capacidad espacial (Mix y Cheng, 2012). El objetivo era definir la estructura de la inteligencia humana, de la cual la cognición espacial era un aspecto importante. Un metaanálisis de Höffler (2010) ha determinado que la capacidad espacial es solo parcialmente separable de la inteligencia general.

Por su parte, Bishop (1980), pionero en el estudio de las habilidades visuales espaciales en la educación matemática, estableció las marcadas diferencias entre las preocupaciones del psicólogo y las preocupaciones del educador. El primero está esencialmente interesado en el desarrollo “natural” del niño, mientras que el segundo, debido a su papel intervencionista, está esencialmente interesado en su desarrollo “antinatural”. Es decir, en su progreso, razón por la cual en este documento se les llamará habilidades visuales, pues se busca promover su desarrollo en los estudiantes.

Bishop (1983) hizo dos preguntas con respecto al procesamiento visual, una de ellas es si es enseñable. En un artículo de revisión de Hawes y Ansari (2020), los autores mostraron evidencias de que las habilidades de visualización espacial son maleables y transferibles. Que juegan un papel en el razonamiento matemático.

Asimismo, Uttal *et al.* (2013) realizaron un metaanálisis de 217 estudios de entrenamiento espacial, obteniendo también que, este tipo de pensamiento se puede mejorar en personas de todas las edades y a través de una amplia variedad de enfoques de capacitación, como trabajo en un curso, capacitación basada en tareas y por videojuegos. Los efectos del entrenamiento fueron estables y no se vieron afectados por retrasos entre el entrenamiento y las evaluaciones posteriores. Además, los investigadores concluyeron que los efectos de la capacitación espacial son transferibles a una variedad de tareas espaciales novedosas que no habían sido objeto de capacitación directamente.

En otro estudio, Duval (1999) estableció que, la visualización junto con la representación son el núcleo de la comprensión en matemáticas. Con sustento en esta afirmación, en este trabajo de investigación se aborda el problema de la visualización y la representación de sólidos de revolución en estudiantes de segundo semestre de ingeniería. Este es un conocimiento vinculado a la comprensión del proceso de cálculo de volúmenes, pues se ha detectado en diversas investigaciones (ver por ejemplo, Andrade y Montecino, 2013; Del Río, 2017; Patkin, 2015) que no se propician en el aula instancias que favorezcan su desarrollo, a pesar de que los aprendices presentan dificultades para visualizar y representar sólidos en dos dimensiones, tienen conflictos en el traspaso entre dimensiones y no logran realizar la conversión entre representaciones verbales, gráficas, simbólicas y algebraicas.

Dado que existe evidencia de que las habilidades visuales pueden ser entrenadas (Uttal *et al.*, 2013), como propósito investigativo se pretende implementar una secuencia de tareas sobre sólidos de revolución, asistida por GeoGebra, que coadyuve a desarrollar habilidades visuales espaciales y de representación en estudiantes de ingeniería y promueva la comprensión del cálculo de sus volúmenes. Por ello, la pregunta de investigación del trabajo es: ¿Qué desarrollo de habilidades visuales espaciales se identifican en estudiantes de segundo de semestre de ingeniería al realizar tareas de representación de sólidos de revolución y de conversión entre registros para el cálculo de su volumen?

La justificación de este enfoque se sustenta en la poca y pertinente investigación que ha sido realizada alrededor del tema del desarrollo de habilidades visuales espaciales en sólidos de revolución, desde la perspectiva de la educación matemática.

MARCO TEÓRICO

Los fundamentos teóricos de la presente investigación provienen de la teoría de representaciones semióticas de Duval (1999; 2004) y la conceptualización de visualización y de las habilidades de visualización espacial descritas por Miragliotta *et al.* (2017). Existe un vínculo estrecho entre ellas, pues “la representación y la visualización son fundamentales para la comprensión de las matemáticas” (Duval, 1999, p. 3).

Para tener acceso al conocimiento matemático es necesario que los objetos sean representados de diferentes formas. Los objetos matemáticos tienen

diferentes registros de representación tales como: verbal, tabular, gráfico, algebraico, simbólico y figural (Hernández-Moreno *et al.*, 2017). Se llama *registro de representación* a cada sistema semiótico que proporciona un procesamiento específico para el pensamiento matemático (Duval, 1999).

De acuerdo con Duval (2004), los registros de representación semióticos deben permitir cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: construir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado; transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales; y convertir las representaciones producidas en un sistema de representación en otro sistema, de modo que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

El uso de sistemas de representación semiótica para el pensamiento matemático es fundamental porque, a diferencia de otros campos del conocimiento, no hay otras formas de acceder a los objetos matemáticos que la de producir representaciones semióticas (Duval, 1999).

El vínculo entre la visualización y la representación de un objeto matemático lo proporciona Duval (1999) al describir que “la visualización está basada en la producción de una representación semiótica” (p. 13). La visualización, afirma, es una organización de relaciones entre algunos tipos de unidades figurales que permiten comprender sinópticamente cualquier organización como una configuración, haciendo visible lo que no es accesible a la visión así como aprehender globalmente cualquier organización de relaciones.

La concepción de visualización que adoptaremos en esta investigación es la propuesta por Arcavi (2003), quien combinó las definiciones dadas por Hershkowitz *et al.* (1990) y Zimmermann y Cunningham (1991) para establecer que: “es la habilidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, uso y reflexión de imágenes y diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y entendimientos avanzados” (p. 217).

Con respecto a los objetos geométricos, estos pueden ser llamados *conceptos figurales*, ya que poseen propiedades tanto conceptuales como figurales. La *componente conceptual* se refiere a sus cualidades como idealidad, abstracción, generalidad, perfección. La *componente figural* corresponde a sus propiedades espaciales como forma, posición y tamaño (Fischbein, 1993). Esta descripción

permite a los estudiantes discriminar entre lo que es la concepción de un objeto geométrico como un objeto matemático ideal, y la componente figural, que plasma en una representación y que, por ende, tiene dimensiones y está ubicado de alguna forma en el plano o en el espacio.

Por otro lado, se establece el proceso de *aprehensión cognitiva*, como aquel que se produce cuando el sujeto realiza una acción sobre un dibujo o cualquier otro estímulo visual. Se definen cuatro formas de aprehensión cognitiva: la *perceptiva*, que consiste en la identificación de configuraciones en dos y tres dimensiones, sin asociarle ninguna afirmación matemática; la *secuencial*, que es la construcción o descripción de una configuración en un orden que está en relación con sus propiedades matemáticas; la *discursiva*, que consiste en la asociación de configuraciones con afirmaciones matemáticas (definiciones y propiedades, entre otras); y la *operativa*, que es la realización de modificaciones a una configuración inicial, añadiendo o suprimiendo elementos o reorganizándolos (Duval, 1995).

Tomando como fundamento la noción de concepto figural y las formas de aprehensión cognitiva, Miragliotta *et al.* (2017) establecieron las habilidades visuales espaciales: organización visual, escaneo visual, generación de la imagen, reconstrucción visual y manipulación de la imagen. A continuación, se presentan las definiciones y su interpretación para los sólidos de revolución.

La *organización visual*, es definida como la habilidad para reconocer conceptos figurales a partir de representaciones incompletas o no perfectamente visibles. En relación con los sólidos de revolución, se espera que el estudiante identifique conceptos figurales planos y tridimensionales, en particular sólidos de revolución, a partir de representaciones gráficas.

El *escaneo visual*, es definido como la habilidad para reconocer las propiedades de una figura a partir de su representación. En el caso del tema que nos ocupa, se espera que el estudiante puede reconocer y describir las propiedades de un sólido tridimensional a partir de su representación.

La *generación de la imagen* es la habilidad para reproducir en la mente el componente figural de un concepto figural, recuperándolo de la memoria o generándolo de nuevo. Para reconocer esta habilidad en el tema de los sólidos de revolución, se espera que los estudiantes puedan generar el componente figural de estos, a partir de enunciados, y puedan describirlos a través de representaciones verbales o gráficas.

La *reconstrucción visual*, es la habilidad para reconstruir el componente figural de un concepto figural en una representación dada, de forma autónoma o a partir de indicaciones escritas o verbales o representaciones parciales. Esta

habilidad se reconoce en el estudiante si construye representaciones gráficas de un concepto figural tridimensional a partir de indicaciones escritas. La diferencia esencial entre esta habilidad y la anterior está en la acción realizada por el estudiante, la cual está determinada por el verbo; en la generación de la imagen es de reproducir en la mente el componente figural, mientras que en esta es la de reconstruirlo porque no es explícitamente visible.

Manipulación de la imagen, es la habilidad para usar las propiedades de un concepto figural o de manipular los aspectos figurales de un concepto figural, teniendo en cuenta las relaciones teóricas entre las unidades figurales elementales de las que está compuesta. Esta habilidad está involucrada en tareas que requieren la manipulación mental de una figura para transformarla en una nueva. Con respecto a los sólidos de revolución, esta habilidad se reconoce en el estudiante si logra construir representaciones gráficas que evidencien la manipulación dinámica de figuras planas que giran alrededor de un eje de revolución. Esta habilidad se diferencia de la anterior porque ya existe un componente de manipulación dinámica de la imagen en la mente del estudiante, mientras que en la de reconstrucción visual el proceso de visualización es estático.

Finalmente, se establece una caracterización más de las habilidades visuales espaciales, como de bajo o alto nivel. Las *de bajo nivel* requieren la visualización de configuraciones bidimensionales, pero no transformaciones mentales de estas imágenes visuales. Las *de alto nivel* se caracterizan por requerir la visualización de configuraciones tridimensionales, y la manipulación mental de estas imágenes visuales (Guay y Mcdaniel, 1977).

MÉTODO

Se trató de un estudio mixto con un diseño de triangulación, que se define como aquel en donde el investigador utiliza métodos cuantitativos y cualitativos para estudiar el mismo fenómeno y determinar si los dos convergen en una sola comprensión del problema de investigación analiza (Fraenkel *et al.*, 2011). La parte cualitativa consistió en un análisis de contenido de las producciones de los estudiantes en las evaluaciones diagnóstica y final. La parte cuantitativa consistió en un preexperimento con un solo grupo con pretest y postest.

El caso en estudio consistió en un grupo de 33 estudiantes de segundo semestre de ingeniería mecatrónica, de los cuales 31 fueron hombres y 2 mujeres. El rango de edades fue de 19 a 22 años con una media de 19.75. Estaban

cursando cálculo integral en una variable, en una universidad pública en México, en el periodo agosto-diciembre de 2019.

El diseño del instrumento y las tareas estuvieron sustentados en indicadores que fueron definidos para cada habilidad visual en el tema de sólidos de revolución, como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Indicadores de las habilidades visuales en sólidos de revolución

Habilidad visual	Indicador
<i>Organización visual</i>	– Identifica conceptos figurales planos y tridimensionales, a partir de representaciones gráficas incompletas o no perfectamente visibles.
<i>Escaneo visual</i>	– Reconoce las propiedades de una figura tridimensional a partir de su representación. – Describe las propiedades de un sólido tridimensional a partir de su representación.
<i>Generación de la imagen</i>	– Genera el componente figural de un sólido de revolución a partir de un enunciado escrito describiéndolo a través de representaciones verbales o gráficas.
<i>Reconstrucción visual</i>	– Construye representaciones gráficas de un concepto figural tridimensional a partir de indicaciones escritas.
<i>Manipulación de la imagen</i>	– Construye representaciones gráficas de sólidos de revolución como resultado de la manipulación dinámica de figuras planas que giran alrededor de un eje de revolución.

Utilizando estos indicadores se diseñaron 18 tareas (tabla 2). Su objetivo fue desarrollar en los estudiantes habilidades de visualización y representación de sólidos de revolución, que concebimos necesarias para la comprensión del proceso del cálculo de sus volúmenes. Como puede observarse, la mayoría de ellas son asistidas por applets de GeoGebra diseñadas por Del Río (s.f.-a, s.f.-b) y Anaya, (s.f.) y disponibles en línea. Estos applets son herramientas que permiten al alumno interactuar con el contenido de los sólidos de revolución, llevándolo desde la representación bidimensional de la región a girar hasta la representación tridimensional, la cual, a través de la manipulación de un deslizador, permite observar cómo gira la región plana alrededor del eje de revolución para generar el sólido tridimensional. Las tareas fueron diseñadas para desarrollar habilidades de visualización, desde la más simple (la organización visual), al identificar

diferentes sólidos tridimensionales por medio de su representación gráfica, hasta la manipulación de la imagen, mediante la construcción de sólidos de revolución, sin y con hueco, girando alrededor de los ejes e o rectas paralelas a estos. Adicionalmente, en algunas de ellas se solicita el cálculo de su volumen por medio de una integral definida.

En la mayoría de las tareas se pide a los estudiantes dibujar tanto la región plana bidimensional a girar como el sólido de revolución obtenido. Esto se hizo para tratar de subsanar la dificultad que tienen los estudiantes, según el estudio de Andrade y Montecino (2013), de trabajar al mismo tiempo en dos y tres dimensiones y representar gráficamente sólidos tridimensionales en dos dimensiones.

Tabla 2. Descripción de las tareas y la habilidad que desarrolla

	Tarea	Habilidad
1.	Identifica a qué sólidos corresponden las siguientes representaciones gráficas (cilindro, tetraedro, cono, pirámide pentagonal, esfera y cubo).	Organización visual
2.	De los sólidos de la Tarea 1, establece cuáles de ellos son sólidos rectos.	Escaneo visual
3.	Crea una fórmula para calcular el volumen de los sólidos rectos identificados en la Tarea 2.	Escaneo visual
4.	Identifica los sólidos de revolución en las figuras de la Tarea 1 y para cada uno de ellos, dibuja una región en el plano xy y una recta alrededor de la cual debe girar para obtenerlo.	Generación de la imagen
5.	Utilizando el applet de GeoGebra (Del Río, s.f.-a) en el link https://www.geogebra.org/m/xa43BaV6 , construye un cilindro a través de la rotación alrededor del eje x de la región plana acotada por la función $f(x) = 2$ en el intervalo $[0,6]$. Realiza su representación gráfica con papel y lápiz.	Reconstrucción visual
6.	Utilizando el mismo applet, construye una esfera a través de la rotación alrededor del eje x de la región plana acotada por la función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en el intervalo $[-2,2]$. Realiza una representación gráfica con papel y lápiz.	Reconstrucción visual
7.	Sin usar GeoGebra, crea una función continua y un intervalo para construir un cono. Realizar una representación gráfica con papel y lápiz.	Generación de la imagen
8.	Sin usar GeoGebra, crea dos funciones continuas en un intervalo para construir una rondana o arandela. Realiza una representación gráfica con papel y lápiz. Crea una fórmula para calcular su volumen.	Generación de la imagen

<p>9. Sin usar GeoGebra, calcula el volumen del sólido generado al girar la región plana dada por $f(x) = \sqrt{x-1}$, entre $x=1, x=10$ alrededor del eje x realizando los siguientes pasos:</p> <p>a) Dibuja el sólido y una sección transversal de grosor Δx</p> <p>b) Calcula el volumen de una sección transversal.</p> <p>c) Calcula el volumen del sólido a través de una integral definida.</p>	<p>Manipulación de la imagen</p>
<p>10. Calcula el volumen del cono truncado generado al girar la región positiva descrita por $f(x) = x, 3 \leq x \leq 7$ alrededor del eje x, por medio de una integral definida.</p>	<p>Manipulación de la imagen</p>
<p>11. Con la ayuda de applet de GeoGebra (Del Río, s.f.-a) en el link https://www.geogebra.org/m/xa43BaV6 calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje x la región limitada por las curvas $f(x) = 3 - 0.5x, g(x) = 1, 2 \leq x \leq 4$</p> <p>a) Dibuja el sólido y una sección transversal de grosor Δx. ¿Qué forma tiene?</p> <p>b) Calcula el volumen de una sección transversal.</p> <p>c) Calcula el volumen del sólido a través de una integral definida.</p>	<p>Manipulación de la imagen</p>
<p>12. Dibuja y calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje x la región limitada por las curvas $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$ por medio de una integral definida (ayúdate del mismo applet).</p>	<p>Manipulación de la imagen</p>
<p>13. Con la ayuda de applet de GeoGebra (Anaya, s.f.) en el link https://www.geogebra.org/m/ajs2kh8j, calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar alrededor de la recta $y = 1$, la región limitada por las curvas $f(x) = x, 3, g(x) = 1 + \sec x, \pi/3 \leq x \leq \pi/3$.</p> <p>a) Dibuja el sólido y una sección transversal de grosor Δx.</p> <p>b) Calcula el volumen de una sección transversal.</p> <p>c) Calcula el volumen del sólido a través de una integral definida.</p>	<p>Manipulación de la imagen</p>
<p>14. Con la ayuda del mismo applet calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar alrededor de la recta $y = -2$ la región limitada por las curvas $f(x) = \sqrt{x-1}, g(x) = 0, 1 \leq x \leq 6$.</p> <p>a) Dibuja el sólido y una sección transversal de grosor Δx. ¿Qué forma tiene?</p> <p>b) Calcula el volumen de una sección transversal.</p> <p>c) Calcula el volumen del sólido a través de una integral definida.</p>	<p>Manipulación de la imagen</p>

<p>15. Con la ayuda del applet de GeoGebra (Del Río, s.f.-b) en el link https://www.geogebra.org/m/rkNvjZGQ#material/mnGjGVYh, calcula el volumen del sólido de revolución obtenido al hacer girar alrededor del eje y la región limitada por las curvas $f(y) = \ln y + 1, 1 \leq y \leq 4$.</p> <p>a) Dibuja el sólido de revolución y analiza qué forma tiene una sección transversal.</p> <p>b) Qué volumen tiene la sección transversal.</p> <p>c) Calcula el volumen del sólido mediante una integral definida.</p>	<p>Manipulación de la imagen</p>
<p>16. La región encerrada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$ gira alrededor del eje y. Calcula el volumen del sólido resultante.</p> <p>a) ¿Qué variable tienes que despejar para utilizar el mismo applet de la actividad 15?</p> <p>b) Dibuja el sólido de revolución y analiza qué forma tiene una sección transversal.</p> <p>c) Calcula el volumen de una sección transversal en el punto y.</p> <p>d) Calcula el volumen del sólido mediante una integral definida.</p> <p>e) ¿Cuál es el cambio más importante cuando una región gira alrededor del eje y?</p>	<p>Manipulación de la imagen</p>
<p>17. Calcula el volumen del sólido de revolución generado por el giro de la región $x = y$ y $x = 0$, entre $y = 2$, $y = 4$, alrededor de $x = -2$ (no uses GeoGebra).</p>	<p>Manipulación de la imagen</p>
<p>18. Calcula el volumen del sólido de revolución que resulta de girar la región plana limitada por las curvas $x = 1 - y^2$ y $x = y - 1$, alrededor de la recta $x = 3$ dibujando la región plana, el eje de rotación y calculando la intersección de las curvas.</p>	<p>Manipulación de la imagen</p>

El instrumento de recolección de datos consistió en un cuestionario de 15 ítems distribuidos en 12 preguntas abiertas y 3 de opción múltiple, el cual evalúa las cinco habilidades de visualización espacial descritas en el marco teórico, siguiendo la perspectiva de Miragliotta *et al.* (2017). Fue creado utilizando los indicadores para cada habilidad visual descritos en la tabla 1, quedando de la siguiente forma: los ítems 1 y 2 evalúan organización visual; el 3, 4 y 5 escaneo visual en el primer indicador y el ítem 6 el segundo indicador; los ítems 7 y 8 generación de la imagen, el 9 reconstrucción visual y los ítems 10-15 manipulación de la imagen. Fue diseñado por Juárez *et al.* (2020), quienes realizaron pruebas de validez de contenido por medio del juicio de cinco expertos y análisis de concordancia con el estadístico V de Aiken (1980; 1985). Para la confiabilidad del instrumento, se realizó un pilotaje con 30 estudiantes de segundo semestre de la misma carrera que los sujetos de este estudio, aplicando el

estadístico Kuder-Richardson 20 para pruebas dicotómicas, obteniendo el valor de 0.71, el cual es un índice adecuado para pruebas escolares ($KR20 > 0.7$) (Fraenkel *et al.*, 2011). Este cuestionario fue aplicado antes (en lo sucesivo, evaluación diagnóstica) y después (evaluación final) de la aplicación de las tareas.

Los estudiantes trabajaron colaborativamente las tareas proporcionadas en forma impresa, con la asistencia de los applets de GeoGebra a través de sus dispositivos móviles. Los investigadores fungieron como facilitadores, asistentes y observadores presentando, por medio de un videoprojector, conceptos básicos como “cilindro recto”, “sólido de revolución” o “volumen de un cilindro recto”, y proyectando también los sólidos de revolución en los applets utilizados cuando hubo problemas para ejecutar las aplicaciones en los celulares. Su función fue apoyar en el proceso de comprensión de las tareas, verificar su realización y atender de forma particular a los estudiantes que tuvieron dudas específicas, tanto de la aplicación informática como de las tareas.

El procedimiento para la recolección de datos consistió en lo siguiente: en la primera sesión se aplicó el cuestionario de forma impresa a los sujetos, con una duración de una hora. A continuación, durante cuatro sesiones de una hora, dos horas, una hora y dos horas, respectivamente, los estudiantes trabajaron las tareas. Finalmente, en la sexta sesión se aplicó nuevamente el cuestionario.

El análisis de los datos, fue de contenido cualitativo de las producciones de los estudiantes en las evaluaciones diagnóstica y final. Las categorías se definieron antes de la realización del análisis y consistieron en cada una de las habilidades visuales espaciales. Se observaron las representaciones de los estudiantes en las dos aplicaciones del cuestionario, antes y después de la aplicación de las tareas, para determinar cambios o mejoras.

En el análisis cuantitativo se realizó una estadística descriptiva e inferencial con pruebas de hipótesis no paramétricas para comparar las evaluaciones diagnóstica y final, tanto del desempeño global de los estudiantes, como en cada habilidad visual.

RESULTADOS

Inicialmente se presentan los resultados del análisis cualitativo de las representaciones gráficas realizadas por los estudiantes, antes y después de aplicar la intervención. Los aprendices se nombrarán en lo sucesivo como E1 hasta E33.

Con respecto a la categoría de habilidad generación de la imagen, se muestra en la parte superior de la figura 1 el enunciado del ítem 7 y en la parte inferior las representaciones gráficas realizadas por el estudiante E5. En la evaluación diagnóstica (figura inferior izquierda) no logra visualizar ninguno de los dos sólidos de revolución que se generan al girar la circunferencia y el círculo alrededor de cada recta vertical. Identifica erróneamente que se forman en el inciso a) una espiral alrededor del eje de revolución, y en el inciso b) un cilindro recto relleno. Por el contrario, en la evaluación final (figura inferior derecha), logra visualizar correctamente los dos sólidos de revolución que se generan de la rotación y los describe en una representación verbal: a) "Se forma una figura parecida a una dona, pero hueca" y b) "Se forma una figura parecida a una dona, pero rellena". Se resalta la forma escrita en la que entrega la respuesta. Esto puede deberse a la dificultad que representó al estudiante generar una representación gráfica de estos sólidos. Sin embargo, se reconoce la habilidad de generación de la imagen que ya muestra en la evaluación final.

7. Describe en forma escrita o con un dibujo la figura tridimensional que se genera al hacer girar cada una de las siguientes figuras alrededor de sus rectas correspondientes.

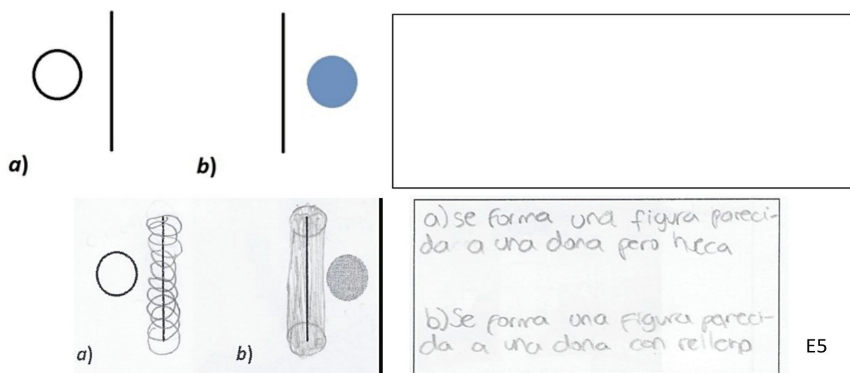


Figura 1. Ítem 7 y representaciones de la habilidad generación de la imagen antes y después de la implementación de las tareas

Con respecto a la categoría de habilidad reconstrucción visual, cuyo indicador es: "Construye un concepto figural 3D a partir de indicaciones escritas", en la figura 2 se presenta el enunciado del ítem 9 y el desempeño del estudiante E25 que en la evaluación diagnóstica realizó la representación gráfica mostrada en el

recuadro izquierdo. Se interpreta que el cuadrado pequeño representa la mesa, la circunferencia la esfera y el cilindro el hueco; sin embargo, el estudiante no logra dar una estructura coherente a su representación gráfica, ya que “la mesa” es más pequeña que “la esfera”. Por el contrario, en la evaluación final se muestra un avance notable en esta habilidad de reconstrucción visual. La representación gráfica muestra la mesa como un paralelogramo, la esfera en el centro de ella y el agujero cilíndrico perpendicular a la base. Además, incluye leyendas escritas de las dimensiones de los objetos. Como puede observarse en la descripción de las tareas (tabla 2), este tipo de actividad no se entrenó específicamente; sin embargo, fue notable el desarrollo de esta habilidad en los estudiantes, confirmando lo descrito en diversos estudios (ver por ejemplo, Uttal *et al.*, 2013).

9. Dibuja en tres dimensiones una esfera de radio R colocada en el centro de una mesa cuadrada de lado $4R$. La esfera tiene un agujero cilíndrico de radio $r < R$ que la traspasa y es perpendicular a la mesa.

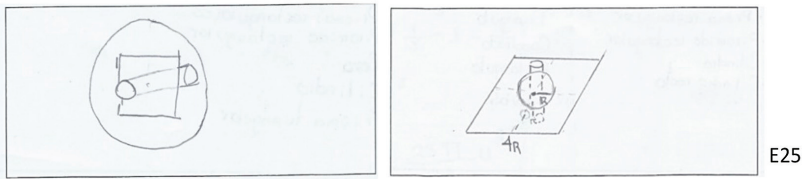


Figura 2. Representaciones de la habilidad reconstrucción visual

Con respecto a la categoría de habilidad manipulación de la imagen, el cuestionario plantea seis ítems para valorarla. En los primeros cinco (preguntas 10-14) se proporciona una figura compuesta por tres regiones disjuntas y yuxtapuestas cuya unión conforma el rectángulo OABC como se muestra en la figura 3, y se pide al estudiante rotarlas alrededor de diversas rectas. El resultado de estos giros deriva en sólidos sin hueco (ítems 10 y 12), o con hueco (ítems 11, 13 y 14).

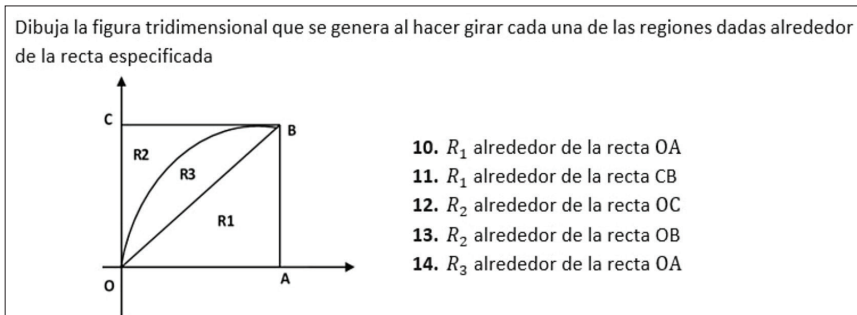


Figura 3. Ítems para valorar la habilidad manipulación de la imagen

A continuación se presentan algunos ejemplos de las representaciones gráficas realizadas por los estudiantes en estos ítems que evidencian el desarrollo de la habilidad manipulación de la imagen. En la figura 4 se muestran las representaciones gráficas, antes y después de la intervención, de los estudiantes E15 y E18 en el ítem 12. En la evaluación diagnóstica (figuras uno y tres de izquierda a derecha), ambos estudiantes cometen errores en sus representaciones gráficas, sobre todo E18, pero después de la intervención ambos realizan representaciones gráficas correctas (figuras dos y cuatro). Además, se observa en la segunda representación del estudiante E15, la flecha que indica la naturaleza dinámica del objeto matemático, evidenciando la habilidad de manipulación de la imagen que ya posee.

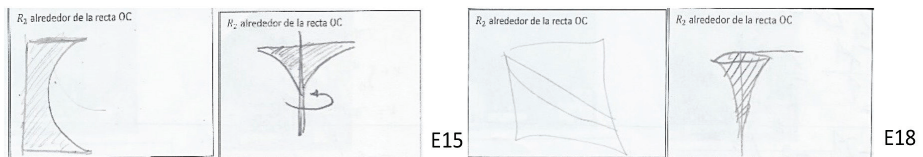


Figura 4. Representaciones de manipulación de la imagen, ítem 12

Con respecto a esta misma categoría de habilidad manipulación de la imagen, ahora respecto a los sólidos con hueco, se muestran en la figura 5 las representaciones gráficas antes y después de la intervención de dos estudiantes en el ítem 11. El alumno E22 visualiza erróneamente en la evaluación diagnóstica una arandela (esquina izquierda), situación que corrige en la evaluación final.

En el otro caso, el estudiante E1 visualiza erróneamente un cono en la evaluación diagnóstica, ya que solo es la forma interior del sólido de revolución. Ya en la final logra visualizar y representar correctamente tanto el interior como el exterior del sólido de revolución. Incluso resalta que es un sólido con hueco sombreado el exterior.

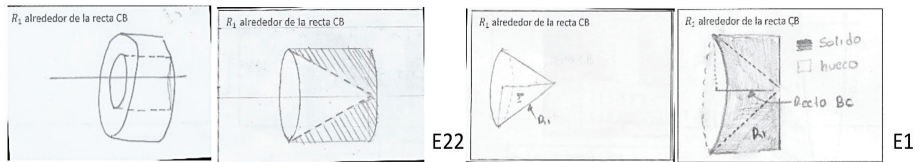


Figura 5. Representaciones de manipulación de la imagen, ítem 11

El ítem 13 representó un mayor desafío para los estudiantes, posiblemente debido a que se trata de un sólido cerrado con interior hueco. En la figura 6 se muestra el desempeño de cuatro estudiantes, algunos de los cuales cometieron errores en sus representaciones gráficas antes y después de la intervención. En efecto, los estudiantes E21 y E23 hicieron correctamente la representación gráfica en la evaluación diagnóstica, pero no en la final, debido a que no lograron representar tridimensionalmente el sólido de revolución. El estudiante E25 tuvo incorrectas ambas representaciones, y solo el estudiante E20 realizó tanto en la primera como en la segunda evaluación representaciones gráficas correctas, aunque la final fue más elaborada, incluso dibujando una flecha señalando el giro alrededor del eje de revolución.

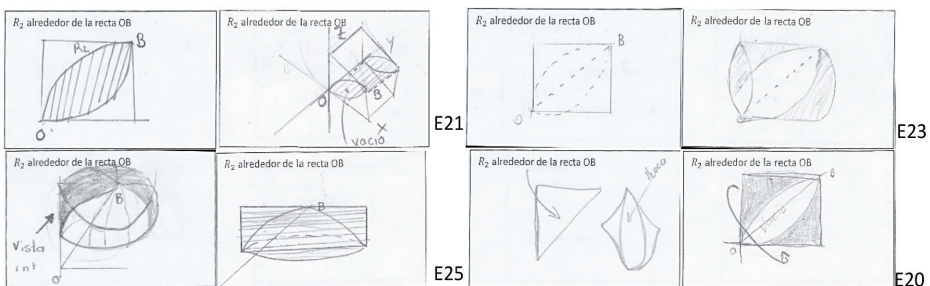


Figura 6. Representaciones de manipulación de la imagen, ítem 13

El último ítem del cuestionario, que también mide la categoría de habilidad de manipulación de la imagen, se muestra en la figura 7. En este, el estudiante tiene que dibujar la región plana y el eje de revolución, que es diferente a los ejes x e y , para después obtener el sólido de revolución con hueco. Además, en la aplicación del cuestionario después de la implementación de las tareas (evaluación final), se les pidió calcular el volumen del sólido resultante.

15. Dibuja el sólido obtenido al hacer girar la región delimitada por las curvas

$$y = x^3, \quad y = x, \quad x \geq 0$$

alrededor de la recta $y = -2$ siguiendo los siguientes pasos:

- Grafica la región delimitada por las curvas en el plano xy .
- Grafica en el mismo plano la recta alrededor de la cual se va a girar la región plana.
- Grafica el sólido de revolución obtenido del giro.

Figura 7. Ítem 15 para valorar la habilidad manipulación de la imagen

Se muestran en la figura 8, las representaciones del estudiante E25 en este ítem antes y después de la intervención. En la evaluación diagnóstica logra esbozar las funciones en el plano, pero no grafica la recta que servirá como eje de revolución y sus intentos de obtener el sólido son erróneos (izquierda). Por el contrario, en la evaluación final (derecha), logra realizar correctamente las representaciones gráficas bidimensional y tridimensional, así como la representación algebraica del cálculo del volumen del sólido de revolución mediante una integral definida.

Cabe mencionar que en este problema el eje de revolución es una recta horizontal que no interseca en ningún punto a la región a rotar, lo que ocasionó una mayor dificultad al manipular el sólido con hueco generado.

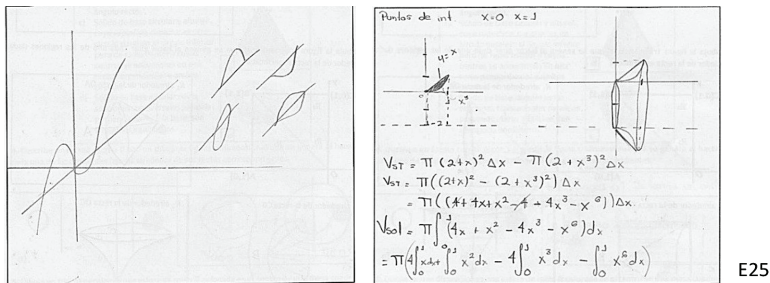


Figura 8. Desempeño del estudiante E25 en la habilidad manipulación de la imagen

A continuación, se presenta el análisis cuantitativo de los resultados de la aplicación del cuestionario antes y después de la intervención.

Se presenta inicialmente en la figura 9 un gráfico de porcentajes de respuestas correctas en cada habilidad visual, comparando la evaluación diagnóstica (azul) con la final (amarillo). A simple vista se observa poco cambio en las habilidades de organización y escaneo visual antes y después de la implementación de las tareas, con un buen desempeño por arriba del 70%. Sin embargo, en las restantes: generación de la imagen, reconstrucción visual y manipulación de la imagen, se observan cambios importantes en el antes con respecto al después, principalmente en la habilidad de manipulación de la imagen.

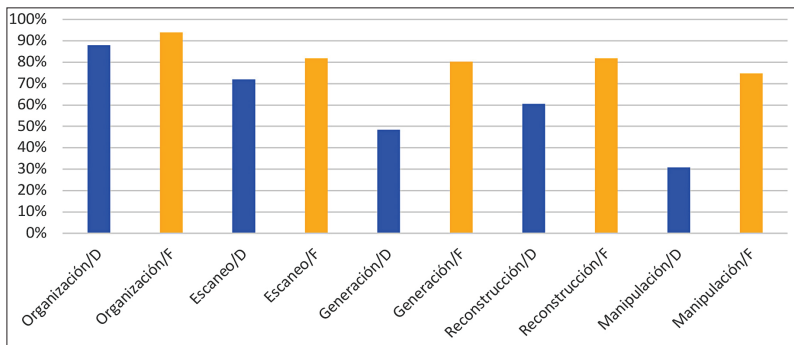


Figura 9. Porcentajes de respuestas correctas en las habilidades visuales en las aplicaciones diagnóstica (D) y final (F)

Con respecto a la habilidad de escaneo visual, que fue la única que tuvo dos indicadores, los resultados con respecto a cada uno de ellos se muestran en la tabla 3. En el primer indicador se observó un excelente desempeño sin diferencia entre la evaluación diagnóstica y final. Por el contrario, en el segundo indicador se observaron cambios evidentes entre el antes y el después de la implementación de las tareas y mucho menos representaciones correctas en ambas pruebas.

Tabla 3. Porcentajes de respuesta correctas en indicadores del escaneo visual

Indicadores escaneo visual	Diagnóstica	Final
- Reconoce las propiedades de una figura tridimensional a partir de su representación.	90.91%	90.91%
- Describe las propiedades de una figura tridimensional a partir de su representación.	15.15%	54.55%

En el problema de reconstrucción visual (ítem 9), esta habilidad aumentó del 60.61% al 81.82%.

Los problemas de manipulación de la imagen representaron un mayor desafío para los estudiantes. En la evaluación diagnóstica, el 30.3% de ellos dejaron estos problemas sin responder. Asimismo, los resultados evidenciaron un mejor desempeño de los estudiantes en la manipulación de sólidos sin hueco que en sólidos con hueco, como se muestra en la tabla 4. Como se puede observar, en los sólidos sin hueco, en la evaluación diagnóstica las representaciones gráficas correctas fueron del 54.6% y en la final mayores o iguales al 93.9%. Sin embargo, en los sólidos con hueco las representaciones gráficas correctas en la evaluación diagnóstica no rebasaron el 30.3% y en la final estuvieron entre el 51.5% y el 81.8%. Esto confirma que los estudiantes tuvieron mayor dificultad en visualizar y representar los sólidos de revolución con hueco.

Tabla 4. Porcentaje de representaciones gráficas correctas en la habilidad de manipulación de la imagen

Tipo de sólido		Diagnóstica	Final
Sólidos sin hueco	Ítem 10	54.6%	100%
	Ítem 12	54.6%	93.9%
Sólidos con hueco	Ítem 11	18.2%	63.6%
	Ítem 13	27.3%	51.5%
	Ítem 14	30.3%	81.8%
	Ítem 15	0%	57.6%

Con respecto al desempeño global de los estudiantes, antes y después de la intervención en todo el cuestionario, se muestra en la tabla 5 el análisis

descriptivo del grupo. A primera vista parece haber una mejora tanto en las medias como en las medianas. La desviación estándar es muy parecida en ambas evaluaciones.

Tabla 5. Análisis descriptivo del desempeño de los estudiantes en la aplicación del cuestionario antes y después de la intervención

	Diagnóstica	Final
Media	5.37	8.04
Error típico	0.27	0.25
Mediana	5.33	8.67
Desviación estándar	1.57	1.46
Curtosis	2.02	2.46
Coefficiente de asimetría	-0.21	-0.73
Rango	6	5.33
Mínimo	2	4.67
Máximo	8	10
Suma	177.33	265.33

Para poder realizar una prueba de hipótesis comparando los resultados de las evaluaciones diagnóstica y final, inicialmente se realizó un análisis de normalidad de los datos como se observa en la tabla 6. Dos de las pruebas en la evaluación final mostraron evidencias de no normalidad con valores de $p < .05$.

Tabla 6. Pruebas de normalidad de los datos

Prueba	Shapiro-Wilk		Kolmogorov-Smirnov		Jarque Bera	
	<i>W</i>	<i>p</i>	<i>D</i>	<i>p</i>	χ^2	<i>p</i>
Diagnóstica	0.941	0.076	0.158	0.035	1.556	0.459
Final	0.907	0.008	0.242	0.037	3.033	0.220

La prueba de hipótesis no paramétrica para muestras relacionadas de Wilcoxon establece las siguientes hipótesis nula y alternativa:

H_0 : Los datos apareados tienen diferencias que provienen de una población con una mediana igual a cero.

H_a : Los datos apareados tienen diferencias que provienen de una población con una mediana diferente de cero.

Con un nivel de significancia de 0.05 se obtuvo un valor de $W = 510.5$, un valor de $p = 4.19 \times 10^{-6}$ y un IC de $[2.33, 3.33]$ por lo que se tuvo evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula y aceptar la hipótesis alternativa. En consecuencia, existe evidencia de que las medianas de los resultados de la evaluación diagnóstica y final son significativamente diferentes.

En el diagrama de cajas y bigotes mostrado en la figura 10 se puede observar la diferencia entre las medianas de la evaluación diagnóstica y final, mostrando que en final la mediana es significativamente mayor que en la diagnóstica.

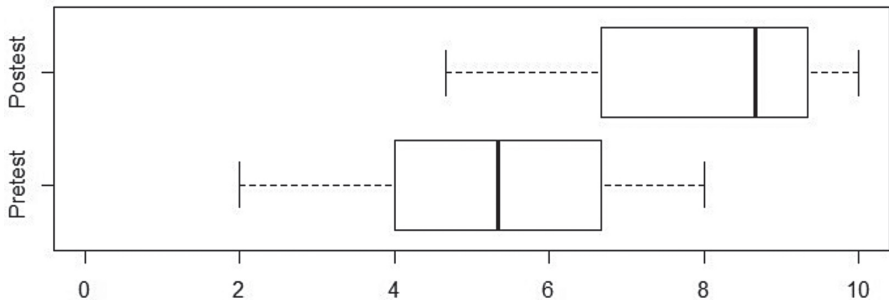


Figura 10. Diagrama de cajas de la evaluación diagnóstica y final

Para analizar si hubo diferencias significativas entre las evaluaciones diagnóstica y final con respecto a cada habilidad visual, se hicieron nuevamente pruebas de normalidad (ver tabla 7).

Tabla 7. Pruebas de normalidad de los datos por habilidad

Prueba	Shapiro-Wilk		Kolmogorov-Smirnov		Jarque Bera	
	<i>W</i>	<i>p</i>	<i>D</i>	<i>p</i>	χ^2	<i>p</i>
Organización visual						
Diagnóstica	.49	<.001	.49	<.001	45.23	<.001
Final	.38	<.001	.52	<.001	45.41	<.001
Escaneo visual						
Diagnóstica	.79	<.001	.30	<.001	.57	.75
Final	.79	<.001	.27	<.001	4.47	.11
Generación de la imagen						
Diagnóstica	.71	<.001	.30	<.001	4.77	.09
Final	.51	<.001	.48	<.001	12.97	.001
Reconstrucción visual						
Diagnóstica	.62	<.001	.39	<.001	5.55	.06
Final	.47	<.001	.5	<.001	15.69	<.001
Manipulación de la imagen						
Diagnóstica	.88	.002	.17	.013	2.15	.34
Final	.86	<.001	.24	<.001	3.42	.18

Al no haber evidencias de normalidad (valores de $p < .05$), se procedió a realizar pruebas de hipótesis no paramétricas para muestras relacionadas de Wilcoxon para cada una de las habilidades visuales obteniendo que, con excepción de la habilidad de organización visual, en todas se obtuvieron diferencias significativas entre la evaluación diagnóstica y la final, con un nivel de significancia de 0.05, y valores de $p < .05$ (tabla 8). De esta forma, se obtuvo evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula y aceptar la hipótesis alternativa que estipula que las medianas de la evaluación diagnóstica y final difieren en forma significativa en estas habilidades.

Tabla 8. Resultados de las pruebas de hipótesis para cada habilidad visual

Dimensión	Wilcoxon		
	<i>W</i>	<i>p</i>	95% IC
Organización visual	13.5	0.276	[-.74, .49]
Escaneo visual	73	0.035	[-2.5, -2.2]
Generación de la imagen	23	0.008	[-1, -.49]
Reconstrucción visual	12	0.039	[-1, -.99]
Manipulación de la imagen	13.5	<0.001	[-.58, -.41]

Nota: Se muestran en negrita los p-valores que resultaron menores a .05

DISCUSIÓN

Los hallazgos indican que la implementación de las tareas promovió el desarrollo de la mayoría de las habilidades en el grupo de estudiantes, ya que sus representaciones gráficas de sólidos de revolución mejoraron cualitativa y cuantitativamente entre la evaluación diagnóstica y la final.

En la categoría de habilidad escaneo visual, en el indicador que consistió en “describir las propiedades de una figura tridimensional a partir de su representación”, se observó un desempeño pobre en los estudiantes, con una frecuencia de representaciones gráficas correctas en la evaluación diagnóstica del 15.15% y en la final del 54.55%. Se interpreta que esto pudo deberse a la dificultad de los estudiantes en relacionar la componente conceptual del sólido en cuestión, a partir de su descripción verbal, con su componente figural. Otra posible razón, pudo ser una falta de comprensión de los términos matemáticos utilizados en la descripción del componente conceptual de los sólidos tridimensionales.

Los sólidos de revolución que representaron un mayor desafío para los estudiantes fueron los sólidos con hueco, puesto que el desempeño en general fue menor que en los sólidos sin hueco. Un ejemplo de este tipo de objeto matemático es el correspondiente al ítem 13 mostrado en la figura 11, que fue el que peor desempeño tuvo en la evaluación final con apenas un 51.5% de representaciones gráficas correctas. Los estudiantes tenían que visualizar, por un lado, su forma exterior formada por dos conos unidos por su frontera circular, y por otro, su interior hueco con forma de elipsoide.

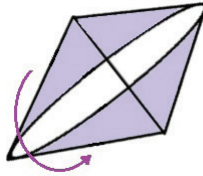


Figura 11. Representación gráfica del sólido de revolución del ítem 13

Otro sólido de revolución con hueco cuya visualización también se les dificultó a los estudiantes fue el solicitado en el ítem 15 descrito en la figura 7, en el que el eje de revolución no interseca en ningún punto a la región plana a girar. Para realizar la tarea era necesario realizar los siguientes procesos:

- a) Dibujar dos funciones en el plano xy identificando sus puntos de intersección (región plana a girar).
- b) Identificar la recta que fungía como eje de revolución.
- c) Identificar el sólido de revolución generado por la rotación de la región plana alrededor del eje de revolución.
- d) Calcular el volumen del sólido obtenido (esto último se pidió a los estudiantes solo en la evaluación final).

Realizar este proceso requería de los estudiantes no solamente habilidades de visualización como generación de la imagen, reconstrucción visual y manipulación de la imagen en dos y tres dimensiones, sino una conversión efectiva entre los registros de representación verbal, gráfico, simbólico y algebraico. Asimismo, tenían que identificar los diversos usos de las funciones involucradas en cada registro, como se describe en la tabla 9. Este resultado concuerda con el obtenido por Andrade y Montecino (2013), quienes también observaron que los estudiantes presentaron limitaciones al establecer los diferentes significados que toman las funciones en el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución.

Tabla 9. Usos de las funciones involucradas en la visualización de sólidos de revolución y el cálculo de su volumen

Tipo de registro	Usos de las funciones involucradas
Registro gráfico	Como bordes de la región plana a girar.
Registro simbólico	Como parte del integrando en la integral definida para calcular el volumen.
Registro algebraico	Como expresiones algebraicas en el cálculo de la integral definida.

Con respecto a este ítem, se observó en la evaluación diagnóstica un desempeño nulo de representaciones gráficas correctas. En el postest 57.6% logró realizar únicamente la representación gráfica correcta del sólido y solo 33% de los estudiantes realizó también el cálculo de su volumen. Estos resultados evidencian que lograr visualizar y realizar una representación gráfica correcta de un sólido de revolución no es garantía de que el cálculo de su volumen sea correcto. Este resultado concuerda con el obtenido por Andrade y Montecino (2013), quienes evidenciaron limitaciones en el traspaso del registro gráfico al registro algebraico.

Sin embargo, en general el uso de los applets de GeoGebra en dispositivos móviles permitió a los estudiantes realizar las tareas visualizando, tanto las regiones planas a rotar, como los sólidos de revolución con o sin hueco generados de forma dinámica por el movimiento de deslizadores. Con ello se logró promover la intuición geométrica espacial de los estudiantes (Del Río, 2017). Asimismo, con el desarrollo de las tareas y su representación gráfica con lápiz y papel, se atendieron las dificultades mencionadas por Andrade y Montecino (2013) acerca del traspaso entre dimensiones, y de la representación de figuras tridimensionales en dos dimensiones.

CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación fue identificar el desarrollo de habilidades visuales espaciales que exhiben estudiantes de segundo semestre de ingeniería a través de sus representaciones de sólidos de revolución y el tránsito entre ellas para el cálculo de su volumen, después de la implementación de un conjunto de tareas asistidas por GeoGebra.

Con base en los resultados obtenidos, después de analizar, tanto cualitativa como cuantitativamente, las producciones de los estudiantes a través de sus representaciones, se logró evidenciar que las tareas asistidas por GeoGebra propuestas a los estudiantes y realizadas por ellos en forma escrita trabajando colaborativamente, incidieron positivamente en el desarrollo de su visualización, específicamente en sólidos de revolución, al representarlos gráficamente significativamente mejor en la evaluación final que en la diagnóstica.

Se puede concluir que el desarrollo de sólidos de revolución y el cálculo de sus volúmenes requiere de habilidades de visualización como las que se estudiaron en este trabajo: las habilidades de bajo nivel como la organización, el escaneo y la reconstrucción visual, permiten desarrollar los elementos básicos de la conceptualización de los sólidos de revolución al describir su componente conceptual correctamente; y las habilidades de alto nivel como son la generación y la manipulación de la imagen, que les permiten visualizar y representar gráficamente su componente figural, realizando movimientos dinámicos de rotación mental tridimensional.

Se mostró también que los estudiantes logran visualizar más fácilmente los sólidos de revolución sin hueco que los que tienen hueco.

Finalmente, se mostró evidencia de que lograr visualizar y realizar una representación gráfica correcta de un sólido de revolución no es garantía de que el cálculo de su volumen sea correcto. Esto significa que además de que los estudiantes logren la adecuada visualización y representación del sólido de revolución en cuestión, identifiquen los diversos usos de las funciones involucradas en el proceso y logren transitar entre los registros verbal, gráfico, simbólico y algebraico que les permita calcular su volumen, sea que se trate de un sólido con hueco o sin él.

REFERENCIAS

- Aiken, L. R. (1980). Content validity and reliability of single items or questionnaires. *Educational and Psychological Measurement*, 40(4), 955-959. <https://doi.org/10.1177/001316448004000419>
- Aiken, L. R. (1985). Three coefficients for analyzing the reliability and validity of ratings. *Educational and Psychological Measurement*, 45(1), 131-142. <https://doi.org/10.1177/0013164485451012>
- Anaya, F. (s.f.). Volumen entre dos curvas. <https://www.geogebra.org/m/ajs2kh8j>

- Andrade, M. M., y Montecino, M. A. (2013). Conversión de registros en el cálculo integral: la problemática de los sólidos de revolución. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Volumen 26* (pp. 473-479). Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241. <https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>
- Battista, M. T. (1990). Spatial Visualization and Gender Differences in High School Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(1), 47-60. <http://www.jstor.org/stable/749456>
- Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education-A review. *Educational Studies in Mathematics*, 11(3), 257-269. <https://doi.org/10.1007/BF00697739>
- Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 175-203). Academic Press.
- Boaler, J. (2014). Ability grouping in mathematics classrooms. En *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 1-5). Springer.
- Del Río, L. (s.f.-a). *Calculadora de sólidos de revolución*. <https://www.geogebra.org/m/xa43BaV6>
- Del Río, L. (s.f.-b). *Sólido de revolución de eje y*. <https://www.geogebra.org/m/rkNvjZGQ#material/mnGjGVYh>
- Del Río, L. (2017). Enseñar y aprender cálculo con ayuda de la vista gráfica 3D de GeoGebra. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 17(1), 1-13. <https://doi.org/10.18845/rdmei.v17i1.2739>
- Delgado, A. R., y Prieto, G. (2004). Cognitive mediators and sex-related differences in mathematics. *Intelligence*, 32(1), 25-32. [https://doi.org/10.1016/S0160-2896\(03\)00061-8](https://doi.org/10.1016/S0160-2896(03)00061-8)
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processings. En M. J. Sutherland R. (Ed.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142-157). Springer Science and Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-57771-0>
- Duval, R. (1999). Representation, vision, and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3-26.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162. <https://doi.org/10.1007/BF01273689>

- Fraenkel, J. R., Wallen, N. E., y Hyun, H. H. (2011). *How to design and evaluate research in education*. McGraw-Hill.
- Guay, R. B., y Mcdaniel, E. D. (1977). The relationship between mathematics achievement and spatial abilities among elementary school children. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8(3), 211–215. <http://www.jstor.org/stable/748522>
- Hawes, Z., y Ansari, D. (2020). What explains the relationship between spatial and mathematical skills? A review of evidence from brain and behavior. *Psychonomic Bulletin & Review*. <https://doi.org/10.3758/s13423-019-01694-7>
- Hegarty, M., y Kozhevnikov, M. (1999). Types of Visual-Spatial Representations and Mathematical Problem Solving. *Journal of Educational Psychology*, 91(4), 684–689.
- Hernández-Moreno, A., Cervantes-Barraza, J. A., Ordoñez-Cuastumal, J. S., y García-González, M. D. S. (2017). *Teoría de registros de representaciones semióticas*.
- Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D., Hoyles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M., y Vinner, S. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Neshet y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A research Synthesis by the international group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70–95). Cambridge University Press.
- Höffler, T. N. (2010). Spatial ability: Its influence on learning with visualizations—a meta-analytic review. *Educational Psychology Review*, 22(3), 245–269. <https://doi.org/10.1007/s10648-010-9126-7>
- Juárez, E. L., Hernández, C. A., Slisko, J., y García, R. (2020). Instrumento diagnóstico para la evaluación de habilidades espaciales en sólidos de revolución: Validación de contenido. En R. L. A. Hernández, M. G. Kantún, y I. J. Slisko (Eds.), *Tendencias en la educación matemática 2020* (1º, pp. 97–115). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- Krutetskiĭ, V. A. (Vadim A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school-children*. University of Chicago Press.
- Kyttälä, M., y Lehto, J. E. (2008). Some factors underlying mathematical performance: The role of visuospatial working memory and non-verbal intelligence. *European Journal of Psychology of Education*, XXIII(1), 77–94.
- Miragliotta, E., Baccaglioni-Frank, A., y Tomasi, L. (2017). Apprendimento della geometria e abilità visuo-spaziali: un possibile quadro teorico e un'esperienza didattica. *L'Insegnamento Della Matematica e Delle Scienze Integrate*, 40(B), 339–360.
- Mix, K. S., y Cheng, Y. L. (2012). The Relation Between Space and Math. Developmental and Educational Implications. En *Advances in Child Development and Behavior* (Vol. 42, pp. 197–243). Academic Press Inc. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-394388-0.00006-X>
- Patkin, D. (2015). Various Ways of Inculcating New Solid Geometry Concepts. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 3(2), 140–154. <https://doi.org/10.18404/ijemst.99466>

- Reuhkala, M. (2001). Mathematical skills in ninth-graders: Relationship with visuo-spatial abilities and working memory. *Educational Psychology*, 21(4), 387–399. <https://doi.org/10.1080/01443410120090786>
- Rodríguez, D., y Valldeoriola, J. (2009). *Metodología de la investigación*. Universitat Obrerta de Catalunya.
- Tam, Y. P., Wong, T. T. Y., y Chan, W. W. L. (2019). The relation between spatial skills and mathematical abilities: The mediating role of mental number line representation. *Contemporary Educational Psychology*, 56(October 2018), 14–24. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2018.10.007>
- Tolar, T. D., Lederberg, A. R., y Fletcher, J. M. (2009). A structural model of algebra achievement: Computational fluency and spatial visualization as mediators of the effect of working memory on algebra achievement. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*, 29(2), 239–266. <https://doi.org/10.1080/01443410802708903>
- Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., y Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, 139(2), 352–402. <https://doi.org/10.1037/a0028446>
- Wei, W., Yuan, H., Chen, C., y Zhou, X. (2012). Cognitive correlates of performance in advanced mathematics. *British Journal of Educational Psychology*, 82(1), 157–181. <https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.2011.02049.x>
- Zimmermann, W., y Cunningham, S. (1991). Editors' Introduction: What is mathematical visualization? En S. C. W. Zimmermann (Ed.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 1–8). Mathematical Association of America.

ESTELA DE LOURDES JUÁREZ RUIZ

Dirección: Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
estela.juarez@correo.buap.mx