 https://doi.org/10.24844/EM3401.08

Ciclos de modelación y razonamiento covariacional al realizar una actividad provocadora de modelos

Modeling cycles and covariational reasoning when carrying out a model eliciting activity

Luis E. Montero Moguel,[1]
Verónica Vargas Alejo[2]

Resumen: El objetivo de este artículo es presentar un análisis de los ciclos de modelación que estudiantes del primer cuatrimestre de la licenciatura en contabilidad y licenciatura en administración de empresas y negocios construyeron, al realizar una actividad provocadora de modelos [MEA]; derivado de este análisis se propone una guía que permita evaluar modelos construidos por estudiantes al resolver MEAs, donde subyace el concepto de función. Este estudio se fundamentó en la Perspectiva de Modelos y Modelación y el Marco Conceptual de Razonamiento Covariacional. La metodología fue cualitativa, participaron diez alumnos con edades entre 23 y 32 años. Los resultados muestran que los estudiantes exhibieron ideas de linealidad en sus primeros modelos, los cuales evolucionaron para convertirse en modelos exponenciales; al mismo tiempo, el razonamiento covariacional de los estudiantes se modificó, amplió y refinó a través de distintos niveles.

Fecha de recepción: 4 de diciembre de 2019. **Fecha de aceptación:** 13 de enero de 2021.

[1] College of Education and Human Development, Department of Interdisciplinary Learning and Teaching, University of Texas at San Antonio, luis.monteromoguel@utsa.edu, orcid.org/0000-0002-9009-1377

[2] Departamento de Matemáticas, División de Ciencias Básicas, Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías, Universidad de Guadalajara, veronica.vargas@academicos.udg.mx, orcid.org/0000-0002-7431-0568

Palabras clave: *Razonamiento covariacional, Actividad provocadoras de modelos, ciclos de modelación, función exponencial, estudiantes de licenciatura.*

Abstract: The objective of this article is to present an analysis of the modeling cycles that students of the first quarter of an Accounting and Business Administration career built by carrying out a model eliciting activity [MEA]; derived from this analysis, a guide is proposed that allows evaluating models built by students when solving MEAs where the concept of function underlies. This study was based on the Models and Modeling Perspective and the Covariational Reasoning Framework. The methodology was qualitative, ten students with ages between 23 and 32 participated. The results show that the students exhibited ideas of linearity in their first models, which evolved to become exponential models; at the same time, the students' covariational reasoning was modified, extended, and refined across different levels.

Keywords: *Covariational reasoning, Model Eliciting Activity, Cycles of modeling, exponential function, undergraduate students.*

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de los fenómenos naturales permite entender el mundo que nos rodea, predecir el comportamiento de los fenómenos, tener control de estos y crear nuevas situaciones. "Todo fenómeno natural, desde las vibraciones cuánticas de las partículas subatómicas hasta el propio universo, son una manifestación del cambio. Los organismos en desarrollo cambian conforme crecen" (Steen, 2003, p. 193). Todas las personas deben tener la posibilidad de desarrollar conocimiento matemático que les permita entender y representar el comportamiento de fenómenos de su entorno.

Uno de los comportamientos que le interesa estudiar a la sociedad es el crecimiento poblacional, el cual puede ser descrito por medio de la función logística. De acuerdo con Steen (2003), inicialmente los estudiantes en el aula podrían estudiar este comportamiento mediante la función exponencial, debido a la forma que adquiere la gráfica de la función logística en su primer tercio; posteriormente, la discusión de estos modelos podría ser guiada hacia la comprensión de la función logística. Aprender el concepto de función exponencial va más allá de memorizar la definición y realizar operaciones, significa conocer cómo se usa este concepto para interpretar, describir, explicar, predecir y controlar fenómenos asociados a este tipo de crecimiento (Ärlebäck *et al.*, 2013). Se requiere que los estudiantes profundicen en distintas representaciones, en la conexión entre ellas, y en la flexibilidad para construir una representación a partir de la otra; que comprendan el sistema conceptual asociado a la función exponencial (compuesto por conceptos como variación, crecimiento, decrecimiento, dominio, rango) y, de acuerdo con Carlson *et al.* (2002), es necesario que desarrollen su razonamiento covariacional.

En investigaciones de Sevinc y Lesh (2018) y Lesh y Doerr (2003) se sugiere el uso de situaciones problema cercanas al entorno real del estudiante, para apoyar el desarrollo de una comprensión profunda de ideas y conceptos matemáticos, como el de función y variación. En particular, la Perspectiva de Modelos y Modelación [PMM] (Lesh y Doerr, 2003) muestra cómo la realización de MEAs posibilita el desarrollo de conocimiento, mediante procesos de modificación, ampliación y refinamiento de formas de pensamiento.

Aprender matemáticas mediante la modelación y aprender a modelar se ha convertido en un tema importante en las últimas décadas, en el nivel básico, medio superior y universitario (Garfunkel y Montgomery, 2019; Stillman *et al.*, 2013). Debido a esto, en varios países existen investigaciones enfocadas hacia la modelación matemática, su inclusión en la currícula escolar, el diseño de actividades y la forma de implementarlas en el aula (Cheng, 2013; Lesh y Doerr, 2003; Stillman *et al.*, 2013); en estos estudios se señala que la modelación se encuentra ausente en varios planes de estudio actuales, inclusive en la currícula universitaria. Al respecto, Serrano-Martínez (2013), señala que,

> en la enseñanza universitaria española de las matemáticas para la economía y empresa (y de manera bastante análoga al caso de las ciencias experimentales), prevalece una organización de los contenidos matemáticos que sigue una lógica matemática de construcción de conceptos y no de construcción de modelos. (p. 252)

Generalmente, en licenciaturas de economía y empresas se adoptan programas estándar, similares "a los seguidos en carreras científicas, en los que los contenidos se organizan en torno a la lógica interna de los conceptos matemáticos y no en torno a tipos de problemas económicos o empresariales" (Serrano-Martínez, 2013, p. 262). Los problemas propuestos en los libros pueden estar bien estructurados, sin embargo, normalmente el proceso de enseñanza tradicional implica tres pasos: aprender las ideas de forma descontextualizada, aprender un procedimiento heurístico para resolver problemas y finalmente, si el tiempo lo permite, aprender a utilizar las ideas y heurísticas para resolver problemas de la vida real (Lesh y Doerr, 2003). Este método de enseñanza propicia que los estudiantes difícilmente tengan la oportunidad de desarrollar conocimientos y habilidades para resolver problemas de la vida real. En consecuencia, Serrano-Martínez (2013) señala la necesidad de emprender mayores esfuerzos para incluir la modelación en los cursos de matemáticas de estas carreras con el objetivo de apoyar la formación de los estudiantes de las licenciaturas de economía y empresas.

En este artículo, se muestra el análisis de los ciclos de modelación desarrollados por estudiantes de la licenciatura en contabilidad y la licenciatura en administración de empresas y negocios, al resolver una MEA en el contexto del crecimiento poblacional donde subyace el concepto de función exponencial. Los ciclos de modelación se caracterizaron a partir de las representaciones incluidas en los modelos, el entendimiento de los conceptos asociados a la función exponencial y el nivel de razonamiento covariacional de los estudiantes.

Las preguntas de investigación son las siguientes: ¿Qué características tienen los modelos construidos por los estudiantes en los ciclos de modelación que desarrollan al resolver una MEA asociada al concepto de función exponencial? y ¿cómo se relacionaron el razonamiento covariacional y los ciclos de modelación?

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

La revisión de investigaciones realizadas por Ärlebäck *et al.* (2013), Ärlebäck y Doerr (2018) permitió conocer la importancia de diseñar e implementar MEAs para que los estudiantes desarrollen conocimiento relacionado con la función exponencial. En esta misma línea de investigación sobre el aprendizaje de las funciones, Carlson *et al.* (2002) mencionan que los estudiantes requieren desarrollar razonamiento covariacional que les permita la comprensión "acerca de las situaciones dinámicas que involucran dos cantidades que cambian simultáneamente" (p. 354).

Dado el objetivo de esta investigación y derivado de la revisión de literatura, en este estudio se utilizaron: i) la PMM (Lesh y Doerr, 2003) para analizar los ciclos de modelación asociados a la función exponencial que exhibieron los estudiantes al realizar una MEA, y ii) el marco conceptual de razonamiento covariacional (Carlson *et al.*, 2002), debido a que el razonamiento covariacional desarrollado por los estudiantes al construir los modelos es fundamental para ampliar y refinar los conceptos de variación, covariación, función y función exponencial.

Perspectiva de modelos y modelación

Para la PMM aprender matemáticas se considera un proceso en el cual los individuos desarrollan sistemas conceptuales o modelos, que cambian de manera continua, se modifican, extienden y refinan a partir de las interacciones del estudiante con su entorno, es decir, con los profesores y compañeros, y al resolver problemas (Lesh, 2010). Para la PMM los modelos

> son sistemas conceptuales (que consisten en elementos, relaciones y reglas que gobiernan las interacciones) que son expresados utilizando sistemas de notación externa, y que son usados para construir, describir, o explicar los comportamientos de otros sistemas –quizás de tal manera que el otro sistema pueda ser manipulado o predicho de manera inteligente. (Lesh y Doerr, 2003, p. 10)

La PMM sugiere estructurar experiencias para el alumno en las cuales exprese, pruebe y refine sus formas de pensamiento, y realice construcciones matemáticas significativas durante el proceso de construcción de modelos matemáticos (Brady y Lesh, 2021; Lesh, 2010; Sriraman y Lesh, 2006). Estas situaciones, intencionalmente diseñadas en contextos cercanos a la vida real se denominan MEAs (Aliprantis y Carmona, 2003; Doerr, 2016; English, 2021; Lesh y Doerr, 2003).

La realización de las MEAs posibilita que los estudiantes realicen procesos de "matematización –cuantificar, dimensionar, coordinar, categorizar, algebrizar, y sistematizar objetos relevantes, relaciones acciones, patrones y regularidades–" (Lesh y Doerr, 2003, p. 5) y desarrollen ciclos de modelación, también llamados ciclos iterativos de modelación, los cuales son interpretaciones (o sistemas conceptuales) de las situaciones problema (Sevinc y Lesh, 2018; Sriraman y Lesh, 2006).

Para propiciar que los estudiantes construyan modelos y evolucionen sus ciclos de modelación, las MEAs se diseñan con base en seis principios: significado personal (principio de realidad), construcción del modelo, autoevaluación, externalización del modelo (principio de documentación del modelo); prototipo simple; generalización del modelo. Estos principios pueden revisarse en Lesh *et al.* (2000) y Lesh *et al.* (2003).

Para evaluar los modelos que desarrollan los estudiantes al realizar las MEAs, la PMM propone la "Guía de evaluación de calidad" (Lesh, 2010, p.33). Esta Guía considera cinco niveles denominados *niveles de actuación*: a) los modelos requieren redirección, b) los modelos requieren mayores extensiones o refinamientos, c) los modelos solo requieren ediciones menores, d) los modelos son útiles para estos datos específicos dados, e) los modelos son compartibles y reutilizables. Estos niveles de actuación permiten que se puedan caracterizar los tipos de modelos con base en su utilidad para resolver la situación problema planteada.

Ärlebäck *et al.* (2013) proponen el uso de MEAs −basadas en la PMM− para propiciar que los estudiantes desarrollen la capacidad de razonamiento covariacional relacionado con la función exponencial.

Marco conceptual de razonamiento covariacional

El aprendizaje asociado a las funciones exponenciales implica que los alumnos desarrollen su razonamiento covariacional; es decir, "actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (Carlson *et al.*, 2002, p. 124). El razonamiento covariacional involucra que los alumnos tengan en "su mente una imagen sostenida de valores de dos cantidades que varían simultáneamente" (Saldanha y Thompson, 1998, p. 298). De acuerdo con Thompson (1994b) las imágenes conceptuales que desarrollan los alumnos "comprenden representaciones visuales, imágenes mentales, experiencias e impresiones evocadas por el nombre del concepto" (p. 6). El constructo de la imagen se describe como "dinámico, que se origina en acciones corporales y movimientos de la atención, y como la fuente y el vehículo de operaciones mentales" (Thompson, 1994a, p. 231).

La imagen que tiene un alumno de un símbolo puede tener tres significados diferentes: a) si se tiene una imagen del símbolo como un valor que no cambia, el alumno le da un significado de constante, b) si la imagen del símbolo es como una cantidad que varía respecto a otra entonces su significado es de parámetro, y c) si la imagen se concibe como una cantidad que varía dentro de un ajuste (función), el significado es de variable (Thompson y Carlson, 2017).

La evolución de la imagen de covariación permite un razonamiento covariacional más sofisticado (Carlson *et al.*, 2002). El razonamiento covariacional evoluciona por niveles y de forma ordenada (Carlson *et al*., 2002; Saldanha y Thompson, 1998; Thompson, 1994). La forma de observar la evolución que tiene el razonamiento covariacional en los estudiantes se puede determinar examinando los comportamientos y acciones mentales que exponen durante el desarrollo de actividades, las cuales implican el manejo de dos cantidades que cambian una respecto a la otra (Carlson *et al*., 2002).

El marco conceptual de razonamiento covariacional propuesto por Carlson *et al*. (2002) va dirigido al estudio del razonamiento covariacional que desarrollan los estudiantes al resolver problemas, los cuales implican situaciones dinámicas y el uso de dos cantidades que cambian simultáneamente. Carlson *et al*. (2002) clasifica el razonamiento covariacional en cinco niveles [N] (tabla 1). Se puede determinar que un alumno ha alcanzado un nivel N si sustenta las acciones mentales [AM] del nivel considerado y las acciones mentales asociadas a los niveles inferiores. Las acciones mentales del marco conceptual para la covariación "proporcionan un medio para clasificar los comportamientos que se pueden ver cuando los estudiantes se involucran en tareas de covariación" (Carlson *et al*., 2002, p. 356), y son las siguientes: AM1 coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra, AM2 coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable, AM3 coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable, AM4 coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada y AM5 coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.

Para Carlson *et al*. (2002) las imágenes de covariación son evolutivas y usan el término *evolutivo* en el sentido piagetiano; es decir, consideran "que las imágenes de covariación se pueden definir por niveles y que los niveles emergen en una sucesión ordenada" (p. 354).

Tabla 1. Marco conceptual para los niveles de la covariación

Niveles de razonamiento covariacional El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.
Nivel 1 (N1). ***Coordinación*** En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2). ***Dirección*** En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 son sustentadas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3). ***Coordinación cuantitativa*** En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4). ***Razón promedio*** En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5). ***Razón instantánea*** En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una conciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Nota: Tabla extraída de Carlson *et al.* (2003, p. 358).

La revisión de literatura (Carlson *et al.*, 2002; Lesh, 2010; Lesh y Doerr, 2003) y los resultados obtenidos en las investigaciones de Montero-Moguel (2020) y Montero-Moguel *et al.* (2021) permitieron identificar que los niveles de razonamiento covariacional, propuestos por Carlson *et al.* (2002), posibilitaron describir con profundidad los tipos de modelos construidos por los estudiantes y los ciclos de modelación desarrollados, al resolver la MEA relacionada con el concepto de función exponencial.

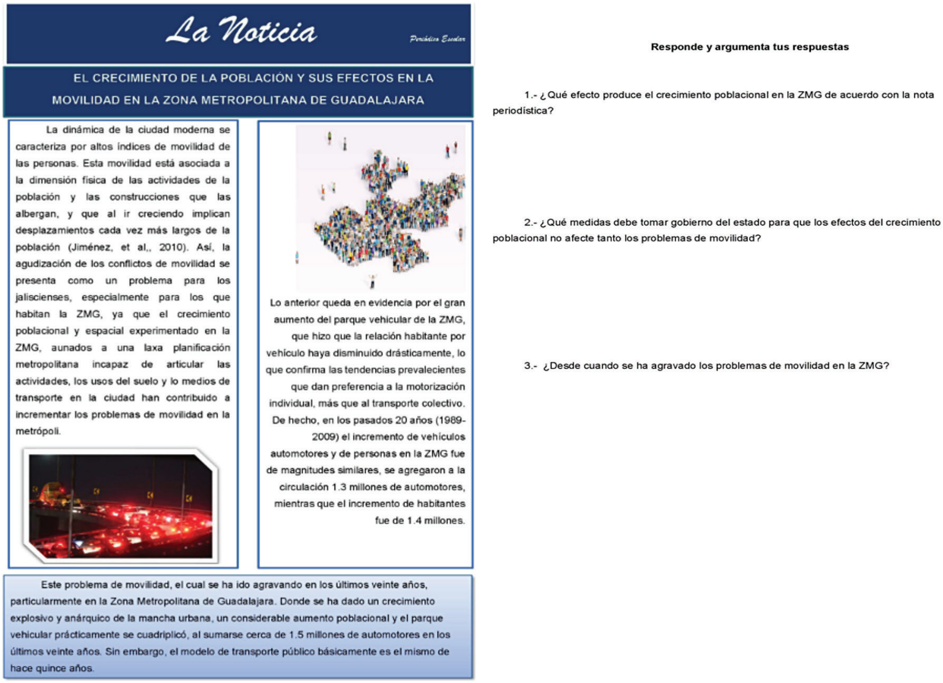
3. METODOLOGÍA

La investigación fue cualitativa. Los participantes fueron diez alumnos del primer cuatrimestre de la licenciatura en contabilidad y licenciatura en administración de empresas y negocios. Los estudiantes de ambas licenciaturas conformaban un solo grupo en la asignatura de matemáticas aplicadas a los negocios I; el sistema era escolarizado en una escuela privada. Las edades de los participantes estaban entre 23 y 32 años, eran adultos que estudiaban y trabajaban. Los estudiantes no habían abordado en las clases de esta asignatura el concepto de función exponencial, previo a la implementación de la MEA.

LA MEA

La MEA Crecimiento Poblacional [CP] (figuras 1 y 2) se diseñó con base en la problemática del incremento de tránsito vehicular derivado del crecimiento poblacional de la Zona Metropolitana de Guadalajara y los principios de construcción de una MEA descritos por Lesh *et al.* (2003, p. 43). La MEA CP se compone de tres partes (sugeridas por la PMM): Actividad de Calentamiento, preguntas y situación problema:

a) Actividad de Calentamiento. Se diseñó una nota periodística con base en datos reales extraídos de Gutiérrez *et al.* (2011) de la ciudad donde actualmente viven los estudiantes participantes en este estudio.
b) Preguntas de calentamiento. Se compone de tres preguntas relacionadas con el contexto de la nota periodística de la actividad de calentamiento.
c) Situación problema. Se diseñó para que los alumnos redactaran una carta dirigida a la Secretaría de Infraestructura Vial sobre la situación del crecimiento poblacional de la Zona Metropolitana de Guadalajara.



La Noticia

Periódico Escolar

EL CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN Y SUS EFECTOS EN LA MOVILIDAD EN LA ZONA METROPOLITANA DE GUADALAJARA

La dinámica de la ciudad moderna se caracteriza por altos índices de movilidad de las personas. Esta movilidad está asociada a la dimensión física de las actividades de la población y las construcciones que las albergan, y que al ir creciendo implican desplazamientos cada vez más largos de la población (Jiménez, et al., 2010). Así, la agudización de los conflictos de movilidad se presenta como un problema para los jaliscienses, especialmente para los que habitan la ZMG, ya que el crecimiento poblacional y espacial experimentado en la ZMG, aunados a una laxa planificación metropolitana incapaz de articular las actividades, los usos del suelo y lo medios de transporte en la ciudad han contribuido a incrementar los problemas de movilidad en la metrópoli.

Lo anterior queda en evidencia por el gran aumento del parque vehicular de la ZMG, que hizo que la relación habitante por vehículo haya disminuido drásticamente, lo que confirma las tendencias prevalecientes que dan preferencia a la motorización individual, más que al transporte colectivo. De hecho, en los pasados 20 años (1989-2009) el incremento de vehículos automotores y de personas en la ZMG fue de magnitudes similares, se agregaron a la circulación 1.3 millones de automotores, mientras que el incremento de habitantes fue de 1.4 millones.

Este problema de movilidad, el cual se ha ido agravando en los últimos veinte años, particularmente en la Zona Metropolitana de Guadalajara. Donde se ha dado un crecimiento explosivo y anárquico de la mancha urbana, un considerable aumento poblacional y el parque vehicular prácticamente se cuadriplicó, al sumarse cerca de 1.5 millones de automotores en los últimos veinte años. Sin embargo, el modelo de transporte público básicamente es el mismo de hace quince años.

Responde y argumenta tus respuestas

1.- ¿Qué efecto produce el crecimiento poblacional en la ZMG de acuerdo con la nota periodística?

2.- ¿Qué medidas debe tomar gobierno del estado para que los efectos del crecimiento poblacional no afecte tanto los problemas de movilidad?

3.- ¿Desde cuando se ha agravado los problemas de movilidad en la ZMG?

Figura 1. Nota periodística de la MEA CP y preguntas de calentamiento

Santiago Vázquez, alumno egresado de la carrera de administración de nuestro campus UVM GDL SUR, está haciendo su Maestría en Desarrollo Local y Territorio. Su profesor le solicitó que elabore una carta dirigida a la Secretaría de infraestructura vial sobre el crecimiento poblacional de la zona metropolitana de Guadalajara, para que sea tomada en cuenta en los próximos proyectos de infraestructura vial.

Santiago investigó y encontró que en el año 2018 la población de la zona metropolitana de Guadalajara llegó a 4.299 millones y que el promedio de crecimiento es de un 1.7% anual.

Para que la carta tenga el impacto necesario en la Secretaría, Santiago necesita enviar un procedimiento que permita conocer cuál sería la población en los años 2020, 2022, 2024, 2030, 2040, 2041, 2100, expresar si la variación es constante y saber en qué año habrán 6 millones de habitantes, 7.560 millones, 8.232 millones y para qué año la población se duplicará respecto a la del año 2018.

Ayúdale a Santiago a redactar la carta. Describe el procedimiento de tal manera que pueda ser útil para describir el crecimiento poblacional de cualquier otra ciudad o del mundo.

Figura 2. Situación problema de la MEA CP

La situación problema incluida en la MEA CP fue diseñada para que los estudiantes construyeran modelos y propiciara que pudieran incluir procedimientos: tabular (recursivo), tabular (relación funcional), gráfico y algebraico, relacionados con la función exponencial siguiente.

$P(t) = P_i(1+r)^{kt}$ donde:
$P(t) =$ *Población en el tiempo* t,
$P_i =$ *Población inicial,*
$r =$ *tasa de crecimiento anual,*
$t =$ *tiempo transcurrido,*
k = *constante.*

Ambiente de aprendizaje

La investigación se implementó en un aula de cómputo, cada estudiante tenía acceso a una computadora. Los diez estudiantes trabajaron de forma individual, en equipo y grupal (se describe en detalle, en cada fase). La MEA CP se implementó en dos sesiones, la primera de ellas tuvo una duración de tres horas y media, y la segunda de una hora y media.

Las fases de implementación fueron las siguientes:

1) Fase lectura de la nota periodística –individual y luego grupal. El objetivo fue que los estudiantes se situaran en el contexto. Posteriormente, este contexto pudiera servir para asociar conocimientos matemáticos con conocimientos propios del contexto y experiencias previas entre sí, lo cual permitiera resolver la situación problema y autoevaluar los modelos construidos.

En esta fase los estudiantes reflexionaron sobre la situación problema. Se plantearon preguntas asociadas, en este caso, a cómo les ha afectado el crecimiento de la Zona Metropolitana de Guadalajara en su vida cotidiana y cómo les afectaría si la población continuara creciendo.

2) Fase resolución de la MEA CP –en equipo. El objetivo fue promover la interacción entre los estudiantes, ya que la PMM sugiere que es esencial para que puedan modificar, ampliar, y refinar los modelos construidos individualmente. Además, recomienda que los estudiantes sean agrupados en equipos, para que

puedan discutir, analizar y evaluar los modelos propuestos, así como preparar la exposición ante la clase.

Los equipos se agruparon de la siguiente manera. El equipo A se conformó por los alumnos S1 y S2, el equipo B se integró con los alumnos S3, S4 y S5, el equipo C por los alumnos S6, S7 y S8 y el equipo D se integró con los alumnos S9, S10.

3) Fase presentación de los modelos –grupal. El objetivo fue que los estudiantes expusieran sus modelos ante la clase, para que pudieran analizar y evaluar tanto los modelos propios como los de los otros equipos. Esto posibilita que los estudiantes reorganicen su sistema conceptual; es decir, que tengan la oportunidad de modificar, ampliar y refinar con base en el análisis de los modelos presentados. Por lo tanto, que puedan aprender a expresar sus modelos mediante el uso fluido y con comprensión de distintas representaciones donde la identificación de patrones, abstracción y generalización es importante.

De acuerdo con la PMM, la importancia de la carta toma sentido en esta fase ya que el objetivo de la MEA es que los estudiantes presenten procedimientos generales a un usuario –Santiago en este caso– que desea resolver una situación: “Ayúdale a Santiago a redactar la carta. Describe el procedimiento de tal manera que pueda ser útil para describir el crecimiento poblacional de cualquier otra ciudad del mundo” (figura 2).

4) Fase resolución, la MEA CP como tarea extra-clase: individual. El objetivo fue que los estudiantes tuvieran la oportunidad de refinar sus modelos individuales y, por lo tanto, su sistema conceptual, con base en el entendimiento de los modelos que se presentaron por los diferentes equipos durante la discusión grupal. Esta fase permite al profesor identificar qué tanto aprendieron los estudiantes durante la resolución de la situación problema.

Se esperaba que a lo largo de estas cuatro fases los modelos construidos por los estudiantes se modificaran, ampliaran y refinaran y, por lo tanto, se apoyara la evolución del razonamiento covariacional. El papel del docente fue como observador y facilitador. Intervino para hacer preguntas como: ¿ha quedado claro el problema?, ¿es similar a los que ustedes utilizan en sus clases?, ¿qué información proporciona?, ¿cómo lo están resolviendo?, ¿por qué ese modelo es útil? Finalmente, participó para generar reflexiones sobre las conclusiones de los estudiantes en la sesión grupal. Buscó que se construyera la representación algebraica con el objetivo de generalizar los procedimientos y que los estudiantes pudieran utilizarlos en otros contextos.

Fuentes de datos

En esta investigación de tipo cualitativa se recopilaron videos de las sesiones de trabajo, audios de las discusiones de los equipos, archivos de Excel y Word elaborados por los estudiantes y documentos escritos tales como: las cartas redactadas por los estudiantes y notas de campo del profesor.

Categorías de análisis

Para el análisis de los modelos que emergieron al resolver la MEA CP se construyó la "Guía de evaluación de modelos relacionados con el concepto de función" [GEMF], la cual permite clasificar el tipo de modelos construidos por los estudiantes al resolver MEAs que propician la construcción, modificación, ampliación y refinamiento del concepto de función.

La GEMF se construyó con base en la "Guía de evaluación de calidad" propuesta por Lesh (2010, p. 33). Se diseñó considerando las representaciones incluidas en los modelos, el uso de los conceptos asociados a la función que mejor responde a la situación problema y el nivel de razonamiento covariacional de los estudiantes. Este último con base en la clasificación propuesta por Carlson *et al*. (2002).

La GEMF permite caracterizar desde los modelos en los cuales los estudiantes requieren redirección, hasta los modelos compartibles y reutilizables; esto, debido a que la PMM enfatiza la importancia de que los modelos construidos por los estudiantes al resolver una MEA sean compartibles con otras personas y, reutilizables en otras situaciones problema con estructura matemática semejante (Lesh, 2010). De esta forma se propusieron cuatro tipos de modelos (tabla 2).

Tabla 2. Clasificación de tipos de modelos

Modelo T1. **El modelo requiere dirección**
El modelo no está asociado a la función –exponencial, en esta MEA– que permite describir, interpretar, predecir y controlar mejor la situación problema. Los estudiantes asocian un comportamiento lineal a la situación, necesitan comentarios adicionales de sus compañeros o preguntas que propicien la reflexión por el profesor, que les posibiliten redireccionar su manera de pensar. Con relación al razonamiento covariacional, los estudiantes exhiben coordinación, es decir el modelo incluye las variables implicadas en la situación problema.
Modelo T2. **El modelo requiere mayor extensión o refinamiento**
El modelo está asociado a la función –exponencial, en esta MEA– que describe mejor la situación problema, sin embargo, los estudiantes no logran disociar el comportamiento lineal de su sistema conceptual. El estudiante necesita trabajar más en la resolución del problema que le permita mayor extensión o refinamiento. Respecto al razonamiento covariacional, el modelo incluye dirección de las variables, es decir los alumnos identifican si la función es creciente o decreciente.
Modelo T3. **El modelo es situado**
Está asociado a la función –exponencial, en esta MEA– que describe mejor la situación problema, es útil únicamente para el contexto de la situación problemática presentada. El sistema conceptual de los estudiantes se amplía y refina al diferenciar entre un comportamiento exponencial y lineal. Con relación al razonamiento covariacional, asociado a la función que describe mejor la situación problema, los estudiantes coordinan la cantidad de cambio entre las variables.
Modelo T4. **El modelo es compartible y reutilizable**
La herramienta no solo funciona para el problema propuesto, sino que también sería fácil para otros modificarla y utilizarla en situaciones similares fuera del contexto de la situación problemática planteada. Respecto al razonamiento covariacional, asociado a la función que describe mejor la situación problema, los estudiantes coordinan la razón de cambio promedio de las variables.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El análisis de los resultados obtenidos al implementar la MEA CP se hizo con base en la clasificación de modelos (T1, T2, T3, T4) mencionada en el apartado anterior y se organizaron los resultados de acuerdo con los tres ciclos de modelación que emergieron durante la implementación.

Primer ciclo de modelación

El primer ciclo de modelación de los cuatro equipos se puede caracterizar por el uso del *Modelo T1* (tabla 3). Respecto al razonamiento covariacional, todos los equipos coordinaron las dos variables implicadas en la MEA CP, tiempo y población. Las características de los modelos y el tipo de razonamiento covariacional asociado se describen enseguida.

Tabla 3. Primer ciclo de modelación

Equipos	Modelo inicial Equipo
A, B, C, D	T1

Equipos A y D

Los estudiantes de ambos equipos (A y D) multiplicaron la población inicial de 4.299 millones por la tasa de crecimiento de 1.7% y obtuvieron el valor de 0.073803 (tabla 4); supusieron que el crecimiento era constante e igual a 0.073803 ello les permitió encontrar los valores solicitados de población para los años 2020, 2022, 2024, 2030, 2040, 2041, 2100 (tabla 4). Es decir, los alumnos identificaron un patrón de comportamiento lineal.

Como evidencia se muestra el siguiente comentario del alumno S10 del equipo D. En sus cálculos subyace la relación recursiva: $P_n = P_{n-1} + C$ con $C = 0.073803$.

S10: Si la tasa es constante [*el estudiante identificó un comportamiento lineal*], hay que sacar la cuenta… y esto es lo que aumenta cada año [*se refiere a la cantidad de* 0.073803, *tabla* 4].

Tabla 4. Modelo inicial de los equipos A y D

AÑO	2018	2019	2020	2021	2022
Población inicial	4.299	4.373	4.447	4.520	4.594
Crecimiento anual	0.073803	0.073803	0.073803	0.073803	0.073803
Población final [población inicial + crecimiento]	4.373	4.447	4.520	4.594	4.668

Nota: Datos en millones de habitantes

El equipo A, por su parte, construyó un modelo semejante al del equipo D, pero inicialmente incluyó una tasa crecimiento de 0.17 en lugar de usar 0.017 o 1.7%.

S1: Son 730 millones… ¿no será que tiene trampa?

S2 corrigió las operaciones y sustituyó el factor 0.17 por 0.017 y contestó:

S2: Entonces ya tenemos la proyección [*su modelo lineal les permitió obtener la cantidad de población requerida*].

Equipo B

El modelo de los alumnos del equipo B, se caracterizó por el uso de "la regla de tres" para describir el crecimiento poblacional. Las alumnas comentaron lo siguiente.

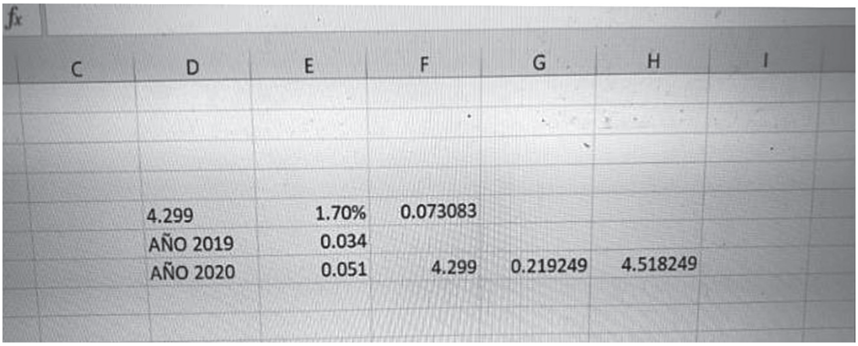
S4: A ver, entonces tenemos que sacar el 1.7, ¿entonces sí sería como una regla de tres no?

Posteriormente, mencionaron:

S5: ¿Tú multiplicaste por dos?

S3: El 1.7 pues sí, porque son dos años.

Usaron la calculadora para resolver las operaciones y Excel como "hoja de cuaderno". Es decir, de acuerdo con Vargas-Alejo y Guzmán-Hernández (2012), los estudiantes utilizaron la hoja electrónica para organizar sus datos, escribir resultados de operaciones, sin escribir fórmulas explícitas en el lenguaje de Excel. Fue un trabajo similar al de papel y lápiz ya que no se utilizó el potencial de Excel. Su procedimiento se observa en la figura 3.



C	D	E	F	G	H	I
	4.299	1.70%	0.073083			
	AÑO 2019	0.034				
	AÑO 2020	0.051	4.299	0.219249	4.518249	

Figura 3. Modelo inicial del equipo B

Para encontrar el crecimiento del primer año, los estudiantes multiplicaron la cantidad de la población del año 2018 (celda D5, figura 3) por la tasa de 1.7%; para el segundo año usaron el doble de la tasa de crecimiento 2(1.7%) = 3.4% (en la celda E6 aparece como 0.034, figura 3); para el tercer año el triple 3(1.7%) = 5.1% (en la celda E7 aparece como 0.051, figura 3).

Equipo C

El equipo C desarrolló su modelo (figura 4) con base en la identificación de un patrón de crecimiento poblacional observado durante los tres primeros años. Los estudiantes detectaron que el crecimiento para los años 2019, 2020 y 2021 era de 0.073, 0.074 y 0.075 millones de habitantes, respectivamente (columna 3, figura 4). El uso de cantidades con tres decimales ocasionó que pensaran que la población aumentaba 0.001 millones de personas por año, es decir argumentaron que el crecimiento era constante. Los alumnos mencionaron:

> S6: Mire profe, en teoría sería 0.073 más... han pasado uno, dos, tres, cuatro años, 0.077 por 4.299... Cada año sube 73 mil más el año.

S6 obtuvo 0.077 a partir de la suma: 0.073 + 4(0.001). El dato 4.299 es la población inicial. Con el comentario anterior se refiere a que a la población de 4.299 del año 2018 le debe sumar 0.073 para obtener la población del año 2019, y para obtener la población del año 2020 deberá sumar a la población anterior. Los alumnos del equipo C identificaron un patrón de crecimiento constante, lo que indicó que su modelo estaba asociado a una función lineal.

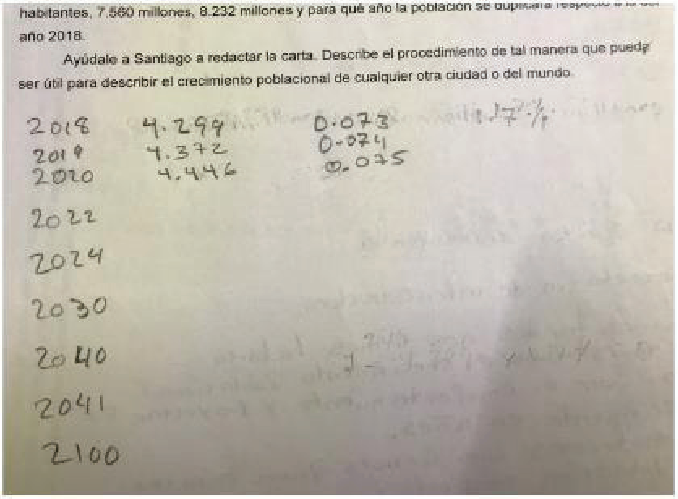


Figura 4. Modelo inicial del equipo C

Conclusión de los modelos iniciales

En los modelos se observó que los alumnos identificaron patrones, relaciones y regularidades asociadas a un comportamiento lineal de la situación y que asumieron que la tasa de crecimiento era constante. Por lo tanto, podemos considerar que los modelos no estaban asociados a la función exponencial. Con relación al razonamiento covariacional se observó que los modelos incluían las variables población y tiempo implicadas en la situación problema; es decir, los estudiantes exhibieron coordinación de las variables.

Segundo ciclo de modelación

El segundo ciclo de modelación inició posterior a la construcción del primer modelo, los estudiantes autoevaluaron su primer modelo a partir de la interacción con el profesor. Las preguntas realizadas por el docente para propiciar la reflexión y redirección de su manera de pensar fueron: ¿me pueden explicar de qué trata el problema?, ¿qué están haciendo?, ¿por qué organizaron de esa manera la información?, ¿por qué elaboraron una tabla?, ¿qué significa cada columna?, ¿qué significa que sea constante el crecimiento poblacional? y ¿cómo sabes que tu proceso de solución es correcto? Las características de los tres tipos de modelos T2, T3 y T4 (tabla 5) y el tipo de razonamiento covariacional asociado se muestran enseguida.

Tabla 5. Primero y segundo ciclo de modelación

Equipos	Modelo inicial Equipo	Modelo final Equipo
A	T1	T3
B	T1	T2
C	T1	T4
D	T1	T2

Equipos B y D

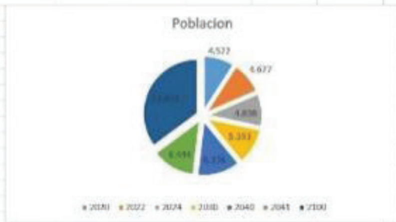
Los equipos B y D desarrollaron modelos no lineales (figura 5) del tipo *Modelo T2*. Las cartas que entregaron[3] (figura 6) incluyen tablas donde se observa una relación entre "celdas de la misma fila" ($= B3 * C3$, $= B3 + D3$, figura 5). Los equipos identificaron datos (población inicial, tasa de crecimiento), relaciones entre las variables y la tasa de crecimiento anual y escribieron fórmulas en lenguaje de Excel, las cuales arrastraron, posteriormente, a lo largo de columnas. Estas fórmulas elaboradas con Excel les permitieron obtener resultados

[3] Es importante recordar que la MEA solicitaba que los equipos entregaran una carta dirigida a la Secretaría de Infraestructura, lo cual apoyó para obtener más información sobre los modelos construidos por los estudiantes, además, de que la MEA cumpliera con el principio de documentación (Doerr, 2016).

apropiados al contexto de la situación. Sin embargo, en sus cartas escribieron que el crecimiento era constante, posiblemente debido a que identificaron que la tasa de crecimiento era 1.7% (columna C, figura 5). Es decir, los estudiantes en sus expresiones no disociaron el crecimiento exponencial de su pensamiento lineal, pero sí lo hicieron en sus cálculos.

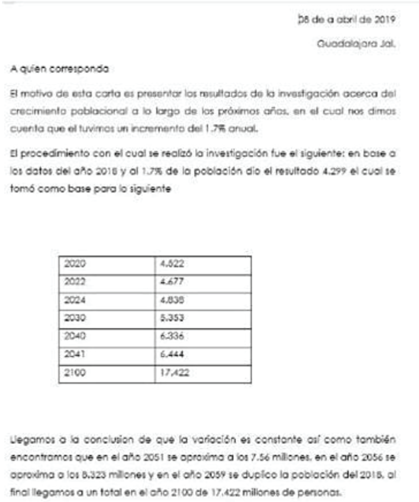
> S5: Concluimos que el crecimiento es constante porque nosotros, al hacer la tabla, hicimos solo el aumento de 1.7% por año. Independientemente del resultado, se le aumentaba 1.7%.

	B	C	D	E
1				
2	POBLACION INICIAL	CRECIMIENTO ANUAL	Nº DE PERSONAS	TOTAL DEL CRECIMIENTO
3	4.299	1.70%	0.073083	4.372
4	4.372	1.70%	0.074324	4.446
5	4.446	1.70%	0.075582	4.522
6	4.522	1.70%	0.076874	4.599
7	4.599	1.70%	0.078183	4.677
8	4.677	1.70%	0.079509	4.757
9	4.757	1.70%	0.080869	4.838
10	4.838	1.70%	0.082246	4.920
11	4.920	1.70%	0.08364	5.004
12	5.004	1.70%	0.085068	5.089
13	5.089	1.70%	0.086513	5.176
14	5.176	1.70%	0.087992	5.264
15	5.264	1.70%	0.089488	5.353



	B	C	D	E
1				
2	POBLACION INICIAL	CRECIMIENTO ANUAL	Nº DE PERSONAS	TOTAL DEL CRECIMIENTO
3	4.299	0.017	=B3*C3	=B3+D3
4	4.372	0.017	=B4*C4	=B4+D4
5	4.446	0.017	=B5*C5	=B5+D5
6	4.522	0.017	=B6*C6	=B6+D6
7	4.599	0.017	=B7*C7	=B7+D7
8	4.677	0.017	=B8*C8	=B8+D8
9	4.757	0.017	=B9*C9	=B9+D9
10	4.838	0.017	=B10*C10	=B10+D10
11	4.92	0.017	=B11*C11	=B11+D11
12	5.004	0.017	=B12*C12	=B12+D12
13	5.089	0.017	=B13*C13	=B13+D13
14	5.176	0.017	=B14*C14	=B14+D14

Figura 5. Segundo modelo del equipo B



]08 de a abril de 2019

Guadalajara Jal.

A quien corresponda

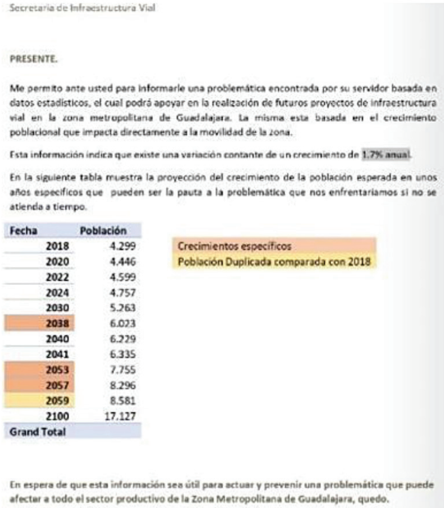
El motivo de esta carta es presentar los resultados de la investigación acerca del crecimiento poblacional a lo largo de los próximos años, en el cual nos dimos cuenta que el tuvimos un incremento del 1.7% anual.

El procedimiento con el cual se realizó la investigación fue el siguiente: en base a los datos del año 2018 y al 1.7% de la población dio el resultado 4.299 el cual se tomó como base para lo siguiente

2020	4.522
2022	4.677
2024	4.838
2030	5.353
2040	6.336
2041	6.444
2100	17.422

Llegamos a la conclusion de que la variación es constante así como también encontramos que en el año 2051 se aproxima a los 7.56 millones, en el año 2056 se aproxima a los 8.323 millones y en el año 2059 se duplico la población del 2018, al final llegamos a un total en el año 2100 de 17.422 millones de personas.

a) Carta del equipo B



Secretaria de Infraestructura Vial

PRESENTE.

Me permito ante usted para informarle una problemática encontrada por su servidor basada en datos estadísticos, el cual podrá apoyar en la realización de futuros proyectos de infraestructura vial en la zona metropolitana de Guadalajara. La misma esta basada en el crecimiento poblacional que impacta directamente a la movilidad de la zona.

Esta información indica que existe una variación contante de un crecimiento de 1.7% anual.

En la siguiente tabla muestra la proyección del crecimiento de la población esperada en unos años especificos que pueden ser la pauta a la problemática que nos enfrentariamos si no se atienda a tiempo.

Fecha	Población
2018	4.299
2020	4.446
2022	4.599
2024	4.757
2030	5.263
2038	6.023
2040	6.229
2041	6.335
2053	7.755
2057	8.296
2059	8.581
2100	17.127
Grand Total	

Crecimientos especificos

Población Duplicada comparada con 2018

En espera de que esta información sea útil para actuar y prevenir una problemática que puede afectar a todo el sector productivo de la Zona Metropolitana de Guadalajara, quedo.

b) Carta del equipo D

Figura 6. Carta de los equipos B y D

Durante la exposición, el equipo B puso énfasis en que el crecimiento era constante.

S5: Para mí es constante porque el crecimiento es el mismo porcentaje que yo le voy a aumentar año con año. Variaría si yo le pusiera que 1.72, 1.78…

Respecto al razonamiento covariacional, los equipos B y D desarrollaron acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables (Población) con cambios en la otra (tiempo), nivel 2 de Carlson *et al.* (2002). Ambos equipos exhibieron la coordinación de variables y la dirección de cambio tipo creciente, pero tuvieron dificultades para interpretar el comportamiento exponencial.

Equipo A

El modelo que presentó el equipo A se puede considerar *Modelo T3*. Los estudiantes describieron en la carta su modelo, basado en una tabla que contiene las columnas llamadas “% Crec Promedio” y “Crecimiento incremental MDH”. Se observan relaciones entre los datos contenidos en celdas de la misma fila y distintas columnas (= $D6 * E6$, = $D6 + E6$, figura 7). Tomaron columnas como variable (año, población inicial, población final), identificaron relaciones exponenciales y escribieron fórmulas en cada columna que en conjunto se asocian a la función exponencial. Arrastraron las fórmulas a lo largo de las columnas para hacer cálculos e identificaron que la población siempre estaba cambiando. Posiblemente, la expresión relacionada a un crecimiento constante solo se asociaba a que el valor 0.017 no variaba en la tabla.

Tlaquepaque Jalisco a 8 de abril del 2019

Secretaria de Infraestructura Vial

A quien Corresponda

Con el gusto de saludarle, le expreso mi opinión y análisis acerca del crecimiento poblacional de la ZMG, con el fin de reflexionar sobre el tema y exponer soluciones para implementar acciones que mejoren la calidad de desplazamiento y control del crecimiento urbano y así mejorar la calidad de vida de la población en la ciudad.

En el presente anexo lo puntos importantes y la representación con la proyección poblacional de los próximos 82 años, tomando como base la población actual (2018) e incrementando el 1.7% promedio de incremento anual hasta el 2100.

- Se muestra que **el crecimiento poblacional anual no es constante por cual su taza de crecimiento es más elevada cada año.**
- **Por lo tanto, en un rango de 19 y 20 años (2037 y 2038) el crecimiento población aumentara 1.7 MDH (6MDH), equivalente al 39.6% vs 2018.**
- **A este ritmo nos llevara a duplicar la población en un rango de 41 y 42 años (2059 y 2060) vs 2018 (4.4MDH) , lo que lo convierte en un dato alarmante que afectara a la vialidad, el crecimiento descontrolado en la infraestructura y daños colaterales como el impacto ambiental.**

Año	Poblacion	Observaciones
2020	4,446,408	
2022	4,598,871	
2024	4,756,562	
2030	5,262,824	
2037	5,921,961	Año en llegar a 6MDH
2038	6,022,634	
2040	6,229,145	
2041	6,335,040	
2059	8,580,775	Se duplicacion actual (2018)
2060	8,726,648	
2100	17,127,169	

Lo anterior expuesto es con fin de lograr tomarlo en cuenta como parámetro a tomar para otras ciudades en crecimiento y próximos proyectos de infraestructura vial.

	A	B	C	D	E
4					
5		Año	Poblacion Incremental MDH	Poblacion MDH	% Crec Prom
6		2018	=+D6*E6	4299000	0.017
7		=+B6+1	=+D7*E7	=+D6+C6	0.017
8		=+B7+1	=+D8*E8	=+D7+C7	0.017
9		=+B8+1	=+D9*E9	=+D8+C8	0.017
10		=+B9+1	=+D10*E10	=+D9+C9	0.017
11		=+B10+1	=+D11*E11	=+D10+C10	0.017
12		=+B11+1	=+D12*E12	=+D11+C11	0.017
13		=+B12+1	=+D13*E13	=+D12+C12	0.017
14		=+B13+1	=+D14*E14	=+D13+C13	0.017
15		=+B14+1	=+D15*E15	=+D14+C14	0.017
16		=+B15+1	=+D16*E16	=+D15+C15	0.017
17		=+B16+1	=+D17*E17	=+D16+C16	0.017
18		=+B17+1	=+D18*E18	=+D17+C17	0.017

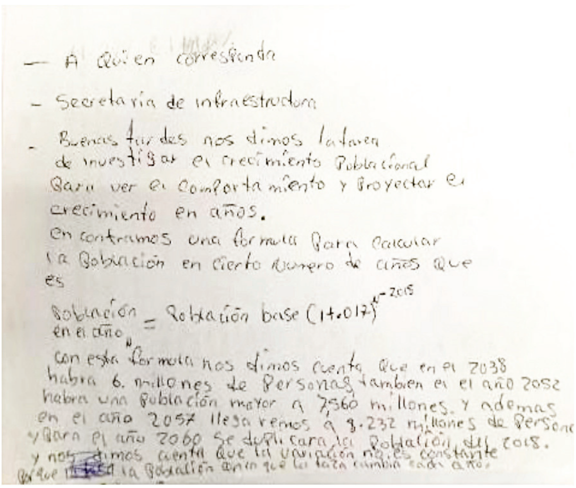
Figura 7. Carta del equipo A

Respecto al razonamiento covariacional, los alumnos observaron una covariación entre la variable de entrada y la de salida, de forma creciente, además coordinaron la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra (Nivel 3, coordinación de la cantidad de cambio de acuerdo con Carlson *et al.*, 2002). Disociaron la relación lineal de la exponencial. El equipo exhibió la coordinación de variables, la dirección de cambio tipo creciente y cuantificación tipo exponencial. El modelo funcionó para resolver la situación problemática en el contexto específico y describió de forma adecuada el crecimiento poblacional.

Equipo C

Un análisis de las características del modelo desarrollado por el equipo C, permitió situarlo en *Modelo T4.* Los alumnos escribieron su carta (figura 8) basada en un modelo que incluía, en forma sincopada,[4] una función de tipo exponencial:

$$\textit{Población en el año} = \textit{Población base}\ (1+.017)^{N-2018}$$



— A Quien corresponda

- Secretaría de infraestructura

- Buenas tardes nos dimos la tarea de investigar el crecimiento poblacional para ver el comportamiento y proyectar el crecimiento en años.
en contramos una formula para calcular la población en cierto numero de años que es

población en el año$_N$ = población base $(1+.017)^{N-2018}$

con esta formula nos dimos cuenta que en el 2038 habra 6. millones de personas tambien en el año 2052 habra una población mayor a 7,560 millones. y ademas en el año 2057 llegaremos a 8.232 millones de persona y para el año 2060 se duplicara la población del 2018.
y nos dimos cuenta que la variación no es constante porque [illegible] la población ya que la taza cambia cada año.

Figura 8. Modelo del equipo C

Describieron su modelo y señalaron las variables consideradas (figura 8). En la siguiente transcripción de audio se puede observar parte de la descripción:

[4] Se denota como álgebra sincopada a aquella donde los estudiantes además de utilizar palabras de lenguaje ordinario utilizan abreviaciones de palabras y símbolos matemáticos para expresar conceptos y operaciones (Puig y Rojano, 2004).

S6: Queremos sacar la población en cierto número de años. Entonces la población base es el dato que nos dieron, 4.299. La tasa es 1.7%. [*Posteriormente, el alumno señaló el exponente* $N-2018$ *y mencionó lo siguiente*] esto es la diferencia de años. Si yo quiero sacar el año 2020, es 2020 menos 2018. Lo elevas a dos y eso te va a dar la población en el año 2020.

El modelo desarrollado le permitió al equipo apreciar que el crecimiento poblacional no era constante y que aumentaba con el paso de los años:

S6: Y así nos dimos cuenta que al principio se puede ver un poquito constante, y después del año 2600, ahí daría el pico.

Es decir, los alumnos identificaron que la tasa de cambio no era constante, que la población total dependía en forma exponencial de la cantidad de población inicial, la tasa y la variable tiempo; acentuaron que los años se debían considerar después del año 2018. Respecto al razonamiento covariacional, los estudiantes además de coordinar el cambio de la variable “población” con cambios en la otra variable “tiempo” (Nivel 1, Carlson *et al*., 2002), coordinaron la dirección y cantidad del cambio entre las variables (Nivel 2 y 3, Carlson *et al*., 2002), y la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable (Nivel 4, Carlson *et al*., 2002).

Conclusión respecto al segundo ciclo de modelación

El segundo ciclo de modelación construido a partir de la interacción entre los estudiantes y su profesor, así como la autoevaluación, permitió a los estudiantes la observación de nuevos patrones, relaciones, regularidades y el reconocimiento del comportamiento exponencial en el fenómeno de crecimiento poblacional. Este ciclo posibilitó que los estudiantes evolucionaran en su razonamiento covariacional y construyeran modelos más refinados. Los modelos iniciales (tabla 3) de los cuatro equipos se refinaron en el segundo ciclo de modelación (tabla 5). Tal como lo establecen Lesh y Doerr (2003) la interacción del estudiante con su entorno permite que los estudiantes desarrollen ciclos iterativos de modelación.

Tercer ciclo de modelación

Después de la sesión plenaria los alumnos realizaron de forma individual sus cartas como tarea extra-clase. Al analizarlas se observó que los modelos se encontraban en dos niveles diferentes (tabla 6). Los alumnos S4 y S5 construyeron modelos con características del *Modelo T3* (modelo situado) y los modelos de los alumnos restantes (*S1, S2, S3, S6, S7, S8, S9 y S10*) tienen características del *Modelo T4* (modelo compartible y reutilizable). Las características de los tipos de modelos y el tipo de razonamiento covariacional asociado se muestran enseguida.

Tabla 6. Primero, segundo y tercer ciclo de modelación

Equipo	Alumno	Modelo inicial equipo	Modelo final equipo	Modelo individual
A	S1	T1	T3	T4
	S2	T1	T3	T4
B	S3	T1	T2	T4
	S4	T1	T2	T3
	S5	T1	T2	T3
C	S6	T1	T4	T4
	S7	T1	T4	T4
	S8	T1	T4	T4
D	S9	T1	T2	T4
	S10	T1	T2	T4

Modelos de los alumnos S4 y S5 (Modelo T3)

Los alumnos resolvieron el problema mediante una tabla de datos. Expresaron que el crecimiento no era constante y que dependía de la tasa del 1.7% (figura 9). Los estudiantes coordinaron las variables tiempo y población, así como la dirección y cantidad de cambio entre ellas. Es decir, su nivel de razonamiento covariacional cumple las características del nivel 3 de Carlson *et al.* (2002). A diferencia de sus modelos anteriores, los estudiantes incluyeron en sus cartas representaciones gráficas. Sin embargo, debido a que graficaron información parcial de la tabla mostrada en la figura 9, la gráfica (figura 10) no corresponde a un comportamiento exponencial. Los modelos construidos por los alumnos son útiles únicamente para el contexto de la situación problemática presentada; de acuerdo con Lesh y Doerr (2003) son modelos situados. En este documento solo se exhibe el modelo de *S5* debido a la similitud entre ambos

A quien corresponda

El motivo de esta carta es presentar los resultados de la investigación acerca del crecimiento poblacional a lo largo de los próximos años, en el cual nos dimos cuenta que el tuvimos un incremento del 1.7% anual.

El procedimiento con el cual se realizó la investigación fue el siguiente: en base a los datos del año 2018 y al 1.7% de la población dio el resultado 4.299 el cual se tomó como base para lo siguiente

2020	4.522
2022	4.677
2024	4.838
2030	5.353
2040	6.336
2041	6.444
2100	17.422

Llegamos a la conclusion de que el crecimiento de la población no es constante, también encontramos que en el año 2051 se aproxima a los 7.56 millones, en el año 2056 se aproxima a los 8.323 millones y en el año 2059 se duplico la población del 2018, al final llegamos a un total en el año 2100 de 17.422 millones de personas.

Figura 9. Primera parte del modelo de S5

POBLACION INICIAL	PORCENTAJE CRECIMIENTO	Nº DE PERSONAS QUE AUMENTAN	TOTAL DEL CRECIMIENTO
4.299	1.70%	0.073083	4.372
4.372	1.70%	0.074324	4.446
4.446	1.70%	0.075582	4.522
4.522	1.70%	0.076874	4.599
4.599	1.70%	0.078183	4.677
4.677	1.70%	0.079509	4.757
4.757	1.70%	0.080869	4.838
4.838	1.70%	0.082246	4.920
4.920	1.70%	0.08364	5.004
5.004	1.70%	0.085068	5.089
5.089	1.70%	0.086513	5.176
5.176	1.70%	0.087992	5.264
5.264	1.70%	0.089488	5.353
5.353	1.70%	0.091001	5.444
5.444	1.70%	0.092548	5.537

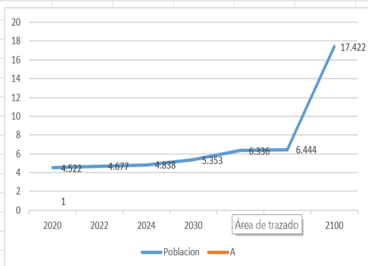


Figura 10. Segunda parte del modelo de S5

Modelos de alumnos S1, S2, S3, S6, S7, S8, S9 y S10 (Modelo T4)

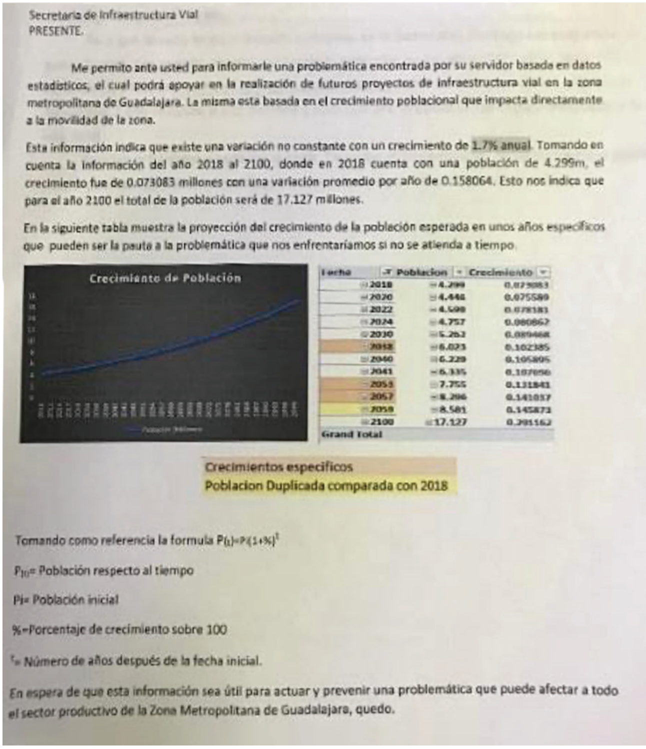
Los ocho alumnos construyeron modelos con representaciones tabulares, gráficas, verbales –para describir el comportamiento del crecimiento poblacional– y algebraicas –en las cuales definen las variables (figuras 11 a 14).

Los estudiantes crearon modelos compartibles y reutilizables (Lesh y Doerr, 2003; Lesh, 2010) y lo expresaron de la siguiente manera: "el cual podrá apoyar en la realización de futuros proyectos de infraestructura vial en la zona metropolitana de Guadalajara" (figura 11, párrafo 1), "lo anterior expuesto es con el fin de lograr tomarlo en cuenta como parámetro a tomar para otras ciudades en crecimiento y próximos proyectos de infraestructura vial" (figura 12).

Es decir, los modelos se caracterizaron por su posible facilidad para que otras personas al revisarlos puedan utilizarlos en situaciones con estructura matemática similar, diferente al contexto de la situación problemática de crecimiento poblacional. Los modelos de los ocho estudiantes fueron de forma exponencial, pero difirieron en los símbolos utilizados como se explica enseguida.

En la figura 11 se observa cómo el estudiante S9 amplió y refinó su modelo con respecto al inicial (tabla 2) al incluir, en la descripción del modelo, la expresión algebraica de la función exponencial subyacente en la situación: $P_{(t)} = P_i\,(1+\%)^t$ y la descripción de cada uno de los símbolos utilizados:

$P_{(t)} =$ *Población respecto al tiempo,*
$P_{(i)} =$ *Población inicial,*
$\% =$ *Porcentaje de crecimiento sobre 100,*
$t =$ *Número de años después de la fecha inicial.*



Secretaria de Infraestructura Vial
PRESENTE.

Me permito ante usted para informarle una problemática encontrada por su servidor basada en datos estadísticos, el cual podrá apoyar en la realización de futuros proyectos de infraestructura vial en la zona metropolitana de Guadalajara. La misma esta basada en el crecimiento poblacional que impacta directamente a la movilidad de la zona.

Esta información indica que existe una variación no constante con un crecimiento de 1.7% anual. Tomando en cuenta la información del año 2018 al 2100, donde en 2018 cuenta con una población de 4.299m, el crecimiento fue de 0.073083 millones con una variación promedio por año de 0.158064. Esto nos indica que para el año 2100 el total de la población será de 17.127 millones.

En la siguiente tabla muestra la proyección del crecimiento de la población esperada en unos años especificos que pueden ser la pauta a la problemática que nos enfrentaríamos si no se atienda a tiempo.

Fecha	Poblacion	Crecimiento
2018	4.299	0.073083
2020	4.446	0.075580
2022	4.598	0.078181
2024	4.757	0.080862
2030	5.262	0.089468
[illegible]	6.023	0.102385
2040	6.229	0.105895
2041	6.335	0.107056
2053	7.755	0.131841
2057	8.206	0.141037
2059	8.581	0.145873
2100	17.127	0.291162
Grand Total		

Crecimientos especificos
Poblacion Duplicada comparada con 2018

Tomando como referencia la formula $P_{(t)}=Pi(1+\%)^{t}$

$P_{(t)}$= Población respecto al tiempo

Pi= Población inicial

%=Porcentaje de crecimiento sobre 100

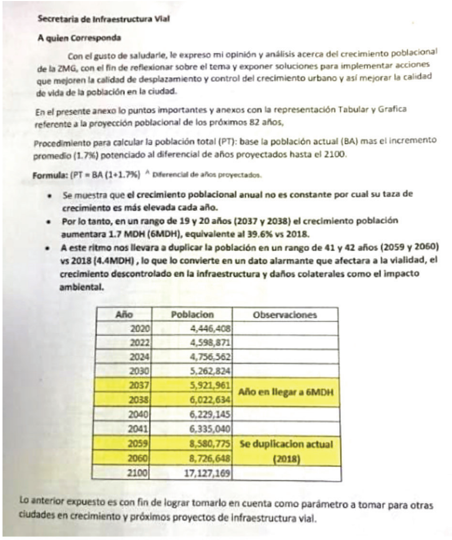
t= Número de años después de la fecha inicial.

En espera de que esta información sea útil para actuar y prevenir una problemática que puede afectar a todo el sector productivo de la Zona Metropolitana de Guadalajara, quedo.

Figura 11. Modelo de S9

En la figura 12 se observa cómo el estudiante S1 amplió y refinó su modelo con respecto al modelo inicial (tabla 4) al incluir también, en la descripción del modelo, la expresión algebraica de la función exponencial subyacente en la situación:

$PT = BA\ (1 + 1.7\%)^{\textit{Diferencial de años proyectados}}$ y la descripción de cada uno de los símbolos utilizados:
población total (PT) ,
base la población actual (BA),
incremento promedio (1.7%).



Secretaria de Infraestructura Vial

A quien Corresponda

Con el gusto de saludarle, le expreso mi opinión y análisis acerca del crecimiento poblacional de la ZMG, con el fin de reflexionar sobre el tema y exponer soluciones para implementar acciones que mejoren la calidad de desplazamiento y control del crecimiento urbano y así mejorar la calidad de vida de la población en la ciudad.

En el presente anexo lo puntos importantes y anexos con la representación Tabular y Grafica referente a la proyección poblacional de los próximos 82 años,

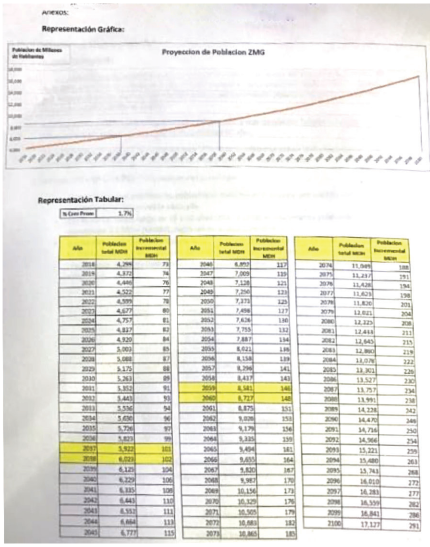
Procedimiento para calcular la población total (PT): base la población actual (BA) mas el incremento promedio (1.7%) potenciado al diferencial de años proyectados hasta el 2100.

Formula: (PT = BA (1+1.7%) ^ Diferencial de años proyectados.

- Se muestra que **el crecimiento poblacional anual no es constante por cual su taza de crecimiento es más elevada cada año.**
- **Por lo tanto, en un rango de 19 y 20 años (2037 y 2038) el crecimiento población aumentara 1.7 MDH (6MDH), equivalente al 39.6% vs 2018.**
- **A este ritmo nos llevara a duplicar la población en un rango de 41 y 42 años (2059 y 2060) vs 2018 (4.4MDH) , lo que lo convierte en un dato alarmante que afectara a la vialidad, el crecimiento descontrolado en la infraestructura y daños colaterales como el impacto ambiental.**

Año	Poblacion	Observaciones
2020	4,446,408	
2022	4,598,871	
2024	4,756,562	
2030	5,262,824	
2037	5,921,961	Año en llegar a 6MDH
2038	6,022,634	
2040	6,229,145	
2041	6,335,040	
2059	8,580,775	Se duplicacion actual (2018)
2060	8,726,648	
2100	17,127,169	

Lo anterior expuesto es con fin de lograr tomarlo en cuenta como parámetro a tomar para otras ciudades en crecimiento y próximos proyectos de infraestructura vial.



Anexos:

Representación Gráfica:

Representación Tabular:

% Crec Prom	1.7%

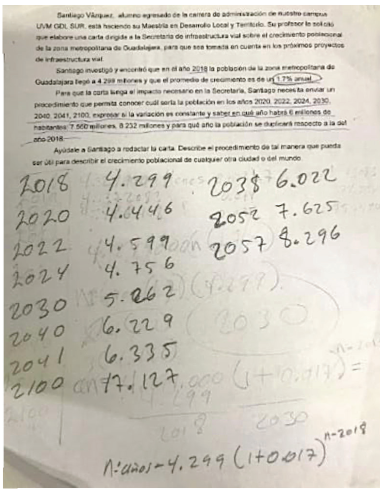
Año	Poblacion total MDH	Poblacion Incremental MDH
2018	4,299	73
2019	4,372	74
2020	4,446	76
2021	4,522	77
2022	4,599	78
2023	4,677	80
2024	4,757	81
2025	4,837	82
2026	4,920	84
2027	5,003	85
2028	5,088	87
2029	5,175	88
2030	5,263	89
2031	5,352	91
2032	5,443	93
2033	5,536	94
2034	5,630	96
2035	5,726	97
2036	5,823	99
2037	5,922	101
2038	6,023	102
2039	6,125	104
2040	6,229	106
2041	6,335	108
2042	6,443	110
2043	6,553	111
2044	6,664	113
2045	6,777	115

Año	Poblacion total MDH	Poblacion Incremental MDH
2046	6,892	117
2047	7,009	119
2048	7,128	121
2049	7,250	123
2050	7,373	125
2051	7,498	127
2052	7,626	130
2053	7,755	132
2054	7,887	134
2055	8,021	136
2056	8,158	139
2057	8,296	141
2058	8,437	143
2059	8,581	146
2060	8,727	148
2061	8,875	151
2062	9,026	153
2063	9,179	156
2064	9,335	159
2065	9,494	161
2066	9,655	164
2067	9,820	167
2068	9,987	170
2069	10,156	173
2070	10,329	176
2071	10,505	179
2072	10,683	182
2073	10,865	185

Año	Poblacion total MDH	Poblacion Incremental MDH
2074	11,049	188
2075	11,237	191
2076	11,428	194
2077	11,623	198
2078	11,820	201
2079	12,021	204
2080	12,225	208
2081	12,433	211
2082	12,645	215
2083	12,860	219
2084	13,078	222
2085	13,301	226
2086	13,527	230
2087	13,757	234
2088	13,991	238
2089	14,228	242
2090	14,470	246
2091	14,716	250
2092	14,966	254
2093	15,221	259
2094	15,480	263
2095	15,743	268
2096	16,010	272
2097	16,283	277
2098	16,559	282
2099	16,841	286
2100	17,127	291

Figura 12. Modelo de S1

En la figura 13 se observa cómo el estudiante S7 amplió su modelo con respecto al modelo inicial (figura 4) al incluir una gráfica. No usó Excel.



Santiago Vázquez, alumno egresado de la carrera de administración de nuestro campus UVM GDL SUR, está haciendo su Maestría en Desarrollo Local y Territorio. Su profesor le solicitó que elabore una carta dirigida a la Secretaría de infraestructura vial sobre el crecimiento poblacional de la zona metropolitana de Guadalajara, para que sea tomada en cuenta en los próximos proyectos de infraestructura vial.

Santiago investigó y encontró que en el año 2018 la población de la zona metropolitana de Guadalajara llegó a 4.299 millones y que el promedio de crecimiento es de un 1.7% anual.

Para que la carta tenga el impacto necesario en la Secretaría, Santiago necesita enviar un procedimiento que permita conocer cuál sería la población en los años 2020, 2022, 2024, 2030, 2040, 2041, 2100, expresar si la variación es constante y saber en qué año habrá 6 millones de habitantes, 7.560 millones, 8.232 millones y para qué año la población se duplicará respecto a la del año 2018.

Ayúdale a Santiago a redactar la carta. Describe el procedimiento de tal manera que pueda ser útil para describir el crecimiento poblacional de cualquier otra ciudad o del mundo.

2018 4.299 2038 6.022
2020 4.446 2052 7.625
2022 4.599 2057 8.296
2024 4.756
2030 5.262
2040 6.229
2041 6.335
2100 17.127

N° años – 4.299 (1+0.017)^n-2018

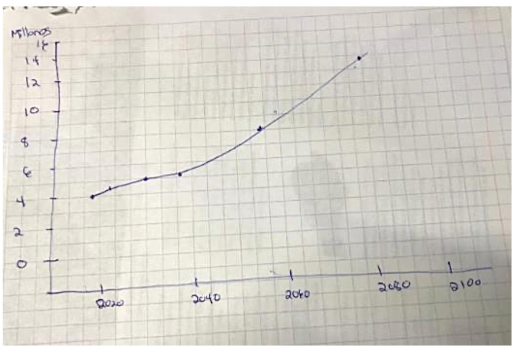


Figura 13. Modelo de S7

En la figura 14 se observa cómo el estudiante S3 amplió y refinó su modelo con respecto al modelo inicial (figura 3) al incluir la expresión algebraica de la función exponencial subyacente en la situación: $Pt = Pi(1 + r)^t$. La estudiante no describió los símbolos utilizados (Pt, Pi, r y t); fue la única de su equipo que exhibió un *Modelo T4* y nivel de covariación 4.

A quien corresponda

Esperando que se encuentre muy bien y que sus proyectos se encuentren forjándose con satisfacción, me atrevo a hacer de su conocimiento la presente, ya que tenemos una situación que a mi punta de vista es bastante grave.

Es en cuanto al crecimiento poblacional en la Zona Metropolitana de Guadalajara, la realidad es que esta situación nos esta causando bastantes complicaciones como, por ejemplo: los conflictos de movilidad incapaz de articular las distintas actividades, los usos del suelo y los medios de transporte, sin mencionar el impacto en nuestro medio ambiente con referencia a la contaminación.

Investigué a cuanto es que haciende la población por año, y los números son exorbitantes, me percaté que entre los años 2037 y 2038 estaremos alcanzando la cantidad de 6 millones de habitantes, en 2051 la cantidad de 7.560 millones y en 2056 la cantidad de 8.232 millones, lo que nos lleva a que estaríamos cerrando el siglo con una cantidad de habitantes de 17.1272 millones. tomando en cuenta el porcentaje de crecimiento en el año 2018 o sea el 1.7 %, el procedimiento que utilicé fue mediante una gráfica en la cual se aplicó la fórmula "Pt = Pi $(1+r)^t$ " simplificado, población inicial durante el año, por crecimiento inicial, multiplicado por el porcentaje (1.017) y por último multiplicado por la cantidad de veces requeridas según el año correspondiente.

Las estadísticas de los años posteriores son:

AÑO	CRECIMIENTO POBLACIONAL
2018	4.299 millones
2020	4.4464 millones
2022	4.5220 millones
2024	4.7566 millones
2030	5.2628 millones
2040	6.2291 millones
2041	6.3350 millones
2100	17.1272 millones

Como se puede apreciar, vemos que la variación de crecimiento no es constante y por tanto es de mayor preocupación, así que espero pueda atender mi situación y así poder tomar ciertas medidas y de igual manera escuchar mis propuestas en cuanto a los proyectos de infraestructura vial, todo por un futuro más saludable.

De antemano agradezco su tiempo, quedo atento a su pronta respuesta, saludos cordiales.

C. Santiago Vázquez.

	A	B	C	D
1	AÑO	CRECIMIENTO POBLACIONAL INICIAL	PORCENTAJE DE CRECIMIENTO	CRECIMIENTO POBLACIONAL FINAL
2	2019	4.299	1.017	4.3721
3	2020	4.3721	1.017	4.4464
4	2021	4.4464	1.017	4.5220
5	2022	4.5220	1.017	4.5989
6	2023	4.5989	1.017	4.6771
7	2024	4.6771	1.017	4.7566
8	2025	4.7566	1.017	4.8374
9	2026	4.8374	1.017	4.9197
10	2027	4.9197	1.017	5.0033
11	2028	5.0033	1.017	5.0883
12	2029	5.0883	1.017	5.1749
13	2030	5.1749	1.017	5.2628
14	2031	5.2628	1.017	5.3523
15	2032	5.3523	1.017	5.4433
16	2033	5.4433	1.017	5.5358
17	2034	5.5358	1.017	5.6299

Figura 14. Modelo de S3

En la figura 10 puede observarse cómo la gráfica de los estudiantes *S4 y S5 (Modelo T3)* difiere de las gráficas de los estudiantes *S1, S2, S3, S6, S7, S8, S9 y S10* (*Modelo T4*). Las últimas (figuras 11 a 14) son más suaves y se ajustan al modelo exponencial construido algebraicamente.

Conclusión respecto al tercer ciclo de modelación

Para el tercer ciclo de modelación los alumnos construyeron modelos de forma individual para solucionar la situación problema de la MEA CP. Como ya se mencionó, los alumnos S4 y S5 pudieron disociar sus conocimientos de la función lineal respecto a la función exponencial, lo que les permitió construir un

Modelo T3; es decir, modelos asociados a la función exponencial y útiles únicamente para el contexto de la situación problemática presentada. El sistema conceptual de los estudiantes se amplió y refinó al diferenciar entre un comportamiento exponencial y lineal. En relación con el razonamiento covariacional, los estudiantes exhibieron coordinación, dirección y cuantificación de las variables población y tiempo. Se puede considerar que alcanzaron el nivel 3 de Carlson *et al.* (2002).

Los modelos de los alumnos restantes (S1, S2, S3, S6, S7, S8, S9 y S10) tuvieron características *Modelo T4*, es decir, el modelo no solo funciona para el problema propuesto, sino que también sería fácil para otros modificarlo y utilizarlo en situaciones similares fuera del contexto de la situación problema planteada.

Respecto al razonamiento covariacional, asociado a la función exponencial, los estudiantes exhibieron coordinación, dirección, cuantificación y razón de cambio promedio de las variables población y tiempo. Se puede considerar que alcanzaron el nivel 4 de Carlson *et al.* (2002).

5. CONCLUSIONES

En esta investigación, los estudiantes desarrollaron tres ciclos de modelación al realizar la MEA CP, identificaron elementos y conceptos asociados al de función exponencial (datos, variables, relaciones entre las variables), expresaron sus modelos con diferentes representaciones (verbales, tabulares, gráficas y algebraicas), revisaron y validaron la función (primero lineal y después exponencial) que pensaban describía mejor el comportamiento de la situación.

Respecto a la pregunta de investigación ¿qué tipos de modelos construyen los estudiantes durante los ciclos de modelación que desarrollan al resolver una MEA asociada al concepto de función exponencial?, se puede mencionar lo siguiente: En el primer ciclo de modelación todos los equipos construyeron modelos con características *Modelo T1,* requiere redirección. En el segundo ciclo de modelación, todos los equipos de estudiantes modificaron sus modelos iniciales, dos equipos construyeron *Modelos T2*, un equipo *Modelo T3* y un equipo *Modelo T4*. El tercer ciclo de modelación fue desarrollado de forma individual, los estudiantes modificaron, extendieron y refinaron sus modelos; dos alumnos construyeron *Modelos T3*, y ocho alumnos *Modelos T4*.

Respecto a la pregunta ¿cómo se relacionaron el razonamiento covariacional y los ciclos de modelación? Con base en el análisis de resultados, se pudo observar cómo la MEA CP propició la evolución del razonamiento covariacional de los estudiantes asociado a la función exponencial. Los diferentes ciclos de modelación surgieron a partir de la interacción de los estudiantes con su entorno (compañeros y profesor) y de la autoevaluación de los modelos. Dentro de los ciclos de modelación los estudiantes desarrollaron actividades cognitivas implicadas en la coordinación de las variables tiempo y población mientras se atendían a las formas en que cada una de ellas cambiaba con respecto a la otra; es decir, de acuerdo con Carlson *et al.* (2002) los estudiantes desarrollaron su razonamiento covariacional. Aunque el razonamiento covariacional de los estudiantes no evolucionó de la misma manera en los ciclos de modelación, todos avanzaron de nivel. En los modelos de los estudiantes se pudo identificar la coordinación, dirección, cuantificación y razón de cambio promedio de las variables; los estudiantes evolucionaron del nivel 1 a los niveles 3 o 4 de razonamiento covariacional. Esta evolución fue fundamental para que los estudiantes ampliaran y refinaran sus conocimientos respecto a la función exponencial, aportando al surgimiento de nuevos ciclos de modelación, inicialmente con características *Modelo T1* hasta *Modelos T3 o Modelos T4*. Por lo tanto, el razonamiento covariacional se relacionó con los ciclos de modelación en el sentido en que formó parte de estos ciclos, y a medida que evolucionaba permitía que los estudiantes construyeran modelos cada vez más sofisticados.

Una aportación original en este documento es la construcción de la "Guía de evaluación de modelos relacionados con el concepto de función", la cual podría utilizarse para clasificar el tipo de modelos construidos por los estudiantes al resolver MEAs en las cuales subyace el concepto de función. En la clasificación se consideran las representaciones incluidas en los modelos, el uso de los conceptos asociados a la función que mejor responde a la situación problema y el nivel de razonamiento covariacional de los estudiantes.

Respecto a los trabajos futuros, los resultados de esta investigación permiten cimentar el diseño y la construcción de una secuencia de desarrollo de modelos que propicie la ampliación y refinamiento del sistema conceptual de los estudiantes respecto a la función exponencial en diferentes contextos.

AGRADECIMIENTOS

La investigación reportada en este artículo contó con el apoyo de la beca CONACYT para programas de posgrado, la Universidad de Guadalajara y el proyecto

Campus Viviente (http://campusviviente.org). Las opiniones, hallazgos y conclusiones expresados en este artículo pertenecen a los autores y no reflejan necesariamente las opiniones de las instancias y proyectos que apoyaron este estudio.

REFERENCIAS

Aliprantis, C. D., y Carmona, G. (2003). Introduction to an economic problem: a models and modeling perspective. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.) *Beyond constructivism: Models and Modeling perspectives on mathematics problem solving, Learning, and Teaching* (pp. 255-264). Lawrence Erlbaum Associates.

Ärlebäck, J. B., Doerr, H., y O'Neil, A. (2013). A modeling perspective on interpreting rates of change in context. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(4), 314-336.

Ärlebäck, J. B., y Doerr, H. (2018). Students' interpretations and reasoning about phenomena with negative rates of change throughout a model development sequence. *ZDM*, *50*(1-2), 187-200.

Brady, C., y Lesh, R. (2021). Development in Mathematical Modeling. En J. M. Suh, M.H. Wickstrom y L. D. English (Eds.), *Exploring Mathematical Modeling with Young Learners*. (pp. 95-110). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63900-6_5

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33* (5), 352-378.

Cheng, L. P. (2013). Real-Life Modelling within a traditional curriculum: lessons from a Singapore experience. En G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum y J. P. Brown, (Eds.), *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 131-140). Springer.

Doerr, H. M. (2016). Designing sequences of model development tasks. En C. R. Hirsch y A. R. McDuffie (Eds.), *Annual Perspectives in Mathematics Education 2016: Mathematical modeling and modeling mathematics* (pp. 197-205). National Council of Teachers of Mathematics.

Doerr, H. M., y Lesh, R. (2003). A modeling perspective on teacher development. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 125-140). Lawrence Erlbaum Associates.

English L. D. (2021). Mathematical and Interdisciplinary Modeling in Optimizing Young Children's Learning. En J. M. Suh, M. H. Wickstrom y L. D. English (Eds.), *Exploring Mathematical Modeling with Young Learners*. (pp. 3-23). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63900-6_1

Garfunkel, S., y Montgomery, M. (Eds.). (2019). *Guidelines for Assessment and Instruction in Mathematical Modeling Education*. SIAM. https://www.siam.org/Portals/0/Publications/Reports/GAIMME_2ED/GAIMME-2nd-ed-final-online-viewing-color.pdf

Gutiérrez, H., Mariscal, M., Almanzor, P., Ayala, M., Hernández, V., y Lara, G. (2011). *Diez problemas de la población de Jalisco: Una perspectiva Sociodemográfica*. Dirección de Publicaciones del Gobierno de Jalisco.

Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, *1*(2), 16-48.

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., y Zawojeswski, J. S. (2003). Model Development Sequences. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 35-58). Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh y H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism. Models and Modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 3-34). Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., y Post, T. (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. En A. E. Kelly (Ed.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*. (pp. 35-44). Lawrence Erlbaum Associates.

Montero-Moguel, L. (2020). *Ciclos de modelación en la resolución de problemas relacionados con funciones exponenciales, mediante el uso de tecnología* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad de Guadalajara.

Montero-Moguel, L., Vargas-Alejo, V., y Carmona-Dominguez, G. (2021). The evolution from linear to exponential models when solving a model development sequence. En D. Olanoff, K. Johnson, y S.M., Spitzer (Eds.), *Proceedings of the forty-three annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1154-1171).

Puig, L., y Rojano, T. (2004). The History of Algebra in Mathematics Education. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12thICMI Study* (pp. 189-223). Springer.

Saldanha, L., y Thompson, P.W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. En S.B. Berensen, K. R. Dawkins, M. Blanton, W. N. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood y L. Stiff (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the*

Psychology of Mathematics Education (vol. 1, pp. 298-303). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Serrano-Martínez, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica.* (Tesis doctoral, Universitat Ramon Llull, Barcelona, España). http://www.atd-tad.org/documentos/la-modelizacion-matematica-en-los-estudios-universitarios-de-economia-y-empresa-analisis-ecologico-y-propuesta-didact/

Sevinc, S., y Lesh, R. (2018). Training mathematics teachers for realistic math problems: A case of modeling-based teacher education courses. *ZDM*, *50*(1), 301–314.

Sriraman, B., y Lesh, R. A. (2006). Modeling conceptions revisited. *ZDM*, *38*(3), 247-254.

Steen, L. A. (2003). *La enseñanza agradable de las matemáticas* (R. García, Trad.). Limusa. (Obra original publicado en 1990).

Stillman, G. A., Kaiser, G., Blum, W., y Brown, J. P. (Eds.). (2013). *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice*. Springer.

Thompson, P. W. (1994a). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 229-274.

Thompson, P. W. (1994b). Students, functions, and the undergraduate curriculum. En E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld y J.J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, 1: Issues in Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 21- 44). American Mathematical Society.

Thompson, P. W., y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics.

Vargas-Alejo, V., y Guzmán-Hernández, J. (2012). Valor pragmático y epistémico de técnicas en la resolución de problemas verbales algebraicos en ambiente de hoja electrónica de cálculo. Enseñanza de las Ciencias. *Revista de investigación y experiencias didácticas, 30* (3), 89-107.

Verónica Vargas Alejo

Dirección: Departamento de Matemáticas, DCB, CUCEI. Universidad de Guadalajara.
Blvd. Marcelino García Barragán 1421, Guadalajara, Jalisco. C.P. 44430
veronica.vargas@academicos.udg.mx

Teléfono: (33) 13785900 ext 27759