1. Herramientas y constructos del enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos para el diseño y análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje

*Marcel Pochulu y Vicenç Font Moll**

Introducción

En este capítulo describimos y ejemplificamos las diferentes herramientas y constructos que tiene el enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos (EOS), para el diseño y análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje llevados a cabo en una clase de matemática.[1]

En el EOS, las cuestiones instruccionales se estudiaron partiendo de las teorías y marcos disponibles –entre otras, la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1998)– proponiendo un conjunto de herramientas y constructos que, en parte, son el resultado de una hibridación (Godino, 2017) de constructos teóricos generados en dichos marcos para el análisis de los procesos instruccionales. Los problemas y preguntas iniciales que conformaron la base del EOS se

* *M. Pochulu*: Universidad Nacional de Villa María, Argentina.
V. Font Moll: Universidad de Barcelona, España.

[1] Para el lector que quiera ampliar en fundamentos y principios de esta línea de la didáctica de la matemática, puede recurrir a los trabajos de síntesis que se hallan en la siguiente dirección URL: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/.

pueden sintetizar en dos: el problema epistemológico y el problema semiótico cognitivo asociado. Posteriormente, se le sumaron y perfilaron el problema ontológico, el problema educativo-instruccional, el problema ecológico y el problema de optimización del proceso de instrucción, conformando los problemas, principios y métodos de investigación en didáctica de la matemática, como puede verse en Godino, Batanero y Font (2020).

El problema epistemológico parte de cuestionarse: ¿qué es un objeto matemático? O de manera equivalente, ¿cuál es el significado de un objeto matemático en un contexto o marco institucional determinado? En tanto, el problema epistemológico se complementa dialécticamente con el problema semiótico cognitivo asociado, cuando se busca responder a las preguntas: ¿qué es conocer un objeto matemático? ¿Qué significa el objeto para un sujeto en un momento y circunstancias dadas?

El EOS propone que el análisis de un proceso de enseñanza y aprendizaje (planificado o implementado) se realice teniendo en cuenta cinco tipos de análisis (ver figura 1).

1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas (significados sistémicos);
2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos;
3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas;
4. Identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa);
5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio (Godino, Batanero y Font, 2007, p. 132).

Figura 1. Tipos de análisis de un proceso de enseñanza y aprendizaje

Fuente: adaptación de Godino, Font y Whihelmi (2008, p. 39).

Los primeros cuatro tipos de análisis corresponden a una didáctica descriptivo-explicativa, permitiendo comprender y explicar lo que está ocurriendo en un determinado sistema didáctico (análisis del sistema de prácticas; análisis de los objetos que intervienen y emergen de dichas prácticas; análisis de la gestión de la trayectoria didáctica en la que se realizan dichas prácticas, y análisis de las normas y metanormas que regulan todo el proceso).

El quinto tipo (análisis de la idoneidad didáctica), en tanto, permite avanzar de una didáctica descriptiva a otra prescriptiva, proporcionando un sistema de criterios de intervención, sobre los cuales existe un consenso en la comunidad de educación matemática, para valorar y producir mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Cada uno de estos cinco tipos de análisis conlleva, de acuerdo con Godino, Font y Whihelmi (2008), las siguientes acciones:

1. *Sistemas de prácticas (previos y emergentes).* Se aplica a la planificación que realiza el profesor y a la implementación que lleva a cabo. Es necesario descomponer los procesos de enseñanza y aprendizaje en una secuencia de episodios, desarrollados en el tiempo, para describir las prácticas realizadas.

2. *Configuraciones ontosemióticas.* Se describen los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas orientadas a la resolución de un tipo de situaciones-problema, y de los significados matemáticos involucrados.
3. *Configuraciones y trayectorias didácticas.* Se describen los patrones de interacción (alumno-alumno, alumno-profesor) y el modo en que se relacionan con los aprendizajes de los estudiantes (trayectorias cognitivas). Asimismo, se describen y explican los conflictos semióticos que se producen en la clase.
4. *Sistema de normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio.* Se describe, estudia y explica la trama de normas que soportan y condicionan las configuraciones didácticas, así como su articulación en trayectorias didácticas (según las dimensiones epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica). En particular, en este tipo se propone un procedimiento sistemático para reconocer el sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible los procesos de enseñanza y aprendizaje en matemática.
5. *Idoneidad didáctica del proceso de estudio.* Se aplican los criterios de idoneidad didáctica que permiten valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y guiar su mejora. En Breda, Font y Pino-Fan (2018) se halla una explicación de cómo se generó esta noción.

El primer y segundo tipo de análisis son fundamentales en el diseño de la planificación de los procesos de enseñanza y aprendizaje. El tercer y cuarto tipo son útiles en la fase de planificación, pero, sobre todo, en el análisis de la implementación realizada por el profesor. El quinto tipo hay que tenerlo en cuenta tanto en la fase de planificación como en la valoración de los procesos de instrucción. Ejemplos de análisis de un proceso de enseñanza y aprendizaje pueden verse en Godino, Font y Whihelmi (2008) y en Pochulu y Font (2011).

A su vez, Godino (2013a) propone una serie de componentes e indicadores que permiten valorar la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, y los define de la siguiente manera:

> *Idoneidad epistémica.* Se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

> *Idoneidad cognitiva.* Expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
>
> *Idoneidad interaccional.* Un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales y, por otra parte, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
>
> *Idoneidad mediacional.* Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
>
> *Idoneidad afectiva.* Grado de implicación (interés, motivación, entre otros) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.
>
> *Idoneidad ecológica.* Grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla (p. 116).

En Breda y Lima (2016), Breda, Pino-Fan y Font (2017) y Breda (2020) se realizó una adaptación de los componentes e indicadores desarrollados en Godino (2013a) para ser usados en la formación de profesores.

El diseño de procesos de enseñanza y aprendizaje

Entre las tareas habituales de un profesor se encuentra la planificación de procesos de enseñanza y aprendizaje, el diseño de secuencias didácticas, la gestión de la clase y la evaluación de los aprendizajes. No entraremos en detalles sobre la planificación ni cómo desarrollarla, pero entendemos que involucra articular de manera coherente seis elementos o componentes básicos: fundamentación, objetivos, contenidos, metodología o estrategias de enseñanza, evaluación y bibliografía.

Para el diseño de la planificación habrá que tener en cuenta, entre otros aspectos, las prácticas matemáticas que se pretende que los alumnos realicen, los objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas, una posible manera de gestionar el proceso (por ejemplo, cómo afrontar los conflictos semióticos que se puedan producir). Además, hay que tener en cuenta ciertos criterios que orientarán dicha planificación (idoneidad didáctica del proceso de instrucción). Como no es posible realizar y mostrar en este capítulo una planificación completa para un curso escolar, ejemplificaremos el uso de algunas herramientas con el diseño de una tarea escolar.

La relación entre diseño de tareas y formación de profesores ha sido discutida por muchos investigadores (Pochulu, Font y Rodríguez, 2016; Serrazina, 2010; Sousa, Gusmão, Font & Landa, 2020). La investigación también muestra que el uso de tareas adecuadas, contextualizadas y enfocadas en el desarrollo de la cognición influye fuertemente en el aprendizaje de los estudiantes (Moreira, Gusmão e Font, 2018a y 2018b; Stein y Smith, 2009). Pero ¿qué son las tareas? Lejos de la visión del sentido común (que entiende como "tarea", ejercicio, la repetición "mecánica" de procedimientos), en este trabajo nos anclamos a la concepción de que las tareas son situaciones de aprendizaje propuestas por el docente, como detonantes de la actividad matemática del alumno, y son vistas como "una secuencia de momentos didácticos" para ser utilizados en un "contexto de aula", los cuales incluyen desde la planificación de las actividades hasta los procesos comunicativos y la resolución de conflictos de significado.

Más en concreto, en este trabajo entendemos una tarea, acorde con lo planteado por Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez (en Rodríguez, 2017), como una estructura compuesta por un contexto, objetivos y la consigna. Dado un contenido de matemática, deberíamos considerar un contexto que nos ubica en el tipo de trabajo que vienen realizando los alumnos, los conocimientos previos que disponen, el tipo de consignas que han venido realizando, el momento en que se plantearía o llevaría a cabo esa consigna (por ejemplo, antes o después de haber explicado un tema nuevo), la modalidad de trabajo que se propone para abordarla (individual, grupal, la coordinará el docente, etcétera) y una anticipación de lo que se trabajará luego.

El objetivo que el profesor plantea es el objetivo de aprendizaje, es decir, lo que él quiere que los alumnos aprendan (o comiencen a aprender) a partir de la clase. Vale la pena distinguir que los objetivos no son los propósitos que plantea el docente. Con esta última terminología nos referimos a cuestiones que le interesan al profesor y que intentará lograr en su clase, aunque no necesariamente tenga éxito, y se relacionan con los criterios, componentes e indicadores de la idoneidad didáctica. Un propósito podría ser favorecer la comunicación entre estudiantes. Los objetivos, en tanto, plasman logros irrenunciables que el docente pretende que sus estudiantes alcancen y los tendrá que evaluar.

Por último, tenemos la consigna, que es el enunciado de la situación problema que se le da al estudiante. Asumimos que la tarea debe tener coherencia entre sus partes, en el sentido de que el objetivo tendrá que estar en consonancia con el contexto, y la consigna debe responder al objetivo y ser razonable para el contexto. De no darse esta coherencia, habría una dificultad inicial en la formulación de la tarea que deberá corregirse.

En la realización de la tarea los estudiantes llevarán a cabo prácticas matemáticas, entendidas como "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etcétera) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. En el estudio de la matemática, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas, discursivas y normativas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas.

No obstante, el EOS hace la distinción entre prácticas institucionales y personales. Estas últimas (las personales) las entendemos como prácticas que llevan a cabo los estudiantes. Las prácticas institucionales, en tanto, están ligadas a las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas, en ellas tendríamos al profesor, la matemática como ciencia, un libro de texto, una sociedad de educación matemática, entre otros. La distinción entre prácticas personales e institucionales permite tomar conciencia de las relaciones dialécticas entre las mismas, las que se ven implicadas en la resolución de situaciones problemas, más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios rutinarios, etcétera. Estas situaciones problemas inducen la actividad matemática y se realiza en un contexto institucional mediante la articulación de secuencias de prácticas operativas, discursivas y normativas. Hay que señalar que esta distinción entre estos dos tipos de prácticas no quiere decir que haya dos tipos de prácticas diferentes, sino, más bien, que las prácticas se pueden mirar desde la perspectiva personal o institucional, lo cual es una mirada diferente de la misma práctica. Por ejemplo, la práctica personal que realiza el alumno en la pizarra al resolver un problema se convierte en institucional si el profesor la valida.

Consideremos que el contenido u objeto matemático elegido para trabajar con los estudiantes en una clase de matemática es la divisibilidad. Nos podríamos preguntar: ¿qué significa que un número sea divisible por otro?, ¿qué es un divisor?, ¿qué es un múltiplo?, ¿qué es un número primo?, entre tantos otros interrogantes. En todos ellos está involucrada la noción de significado, que Godino, Batanero y Font (2007) la entienden como el sistema de prácticas que realiza una persona (conformaría el significado personal) o compartidas en el seno de una institución (refiere al significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas en los cuales interviene el objeto matemático en cuestión (divisibilidad).

En consecuencia, no tenemos que confundir la noción de significado circunscripta a la definición o lo expresado por un diccionario. Para clarificar esta diferencia, pensemos en el significado del símbolo: $a|b$. Una respuesta habitual es que el significado de este símbolo es el correspondiente a una relación entre números: la "relación de divisor" o la "relación divide". Se puede asumir esta concepción como una manera elemental de responder el problema. Desde este punto de vista, para especificar el significado de $a|b$ solo basta dar una definición. Otra posible forma de afrontar el problema de atribución de significados al símbolo en cuestión es hacerlo de manera pragmática, teniendo en cuenta lo que se puede hacer con él. Esta concepción nos da una perspectiva sistémica, relacional, al considerar que el significado de $a|b$ es el conjunto de prácticas matemáticas en las que el uso de esta expresión (u otras que se consideran equivalentes) es determinante para su realización. Por lo tanto, el significado de divisor no aludiría solo a la definición del objeto matemático, sino también al conjunto de prácticas (operativas y discursivas) que realiza un sujeto (ya sea institucional si aludimos al profesor, libro de texto o materiales de estudio, o personal, si hacemos referencia a un estudiante).

Teniendo en claro esta noción, podemos avanzar en una tipificación y caracterización de los significados, entendidos como sistemas de prácticas, lo cual lleva a introducir una tipología básica que tiene un triple condicionamiento: institucionales, personales y temporales (figura 2). Estos últimos (los temporales) devienen de considerar los diferentes momentos en los que se presentan los dos primeros (institucionales y personales). Los significados institucionales se articulan mediante el sistema de prácticas (operativas y discursivas) más un acoplamiento entre ellos. Entre el acoplamiento y la participación podremos analizar el proceso de enseñanza, mientras que, entre el acoplamiento y la apropiación, tenemos el proceso de aprendizaje.

Figura 2. Significados institucionales y personales

Fuente: adaptación de Godino, Font y Whihelmi (2008, p. 30).

La idea de significado institucional de referencia de un objeto o tema de estudio orienta el análisis sistemático de la literatura hacia la identificación de los diversos significados contextuales de los objetos, conformando el significado global, holístico u holosignificado. Este significado se articula con la población de referencia (de situaciones problemas) de la cual se seleccionarán muestras adecuadas a las circunstancias particulares de los procesos de enseñanza que se pretenden diseñar, conformando el significado global de referencia.

Con estas herramientas el EOS trata de responder a las cuestiones ontológicas y epistemológicas siguientes: ¿Cuáles son los diversos significados de un objeto matemático en un contexto o marco institucional determinado? ¿Qué significa el objeto para un sujeto en un momento y circunstancias dadas? ¿Cómo emergen los objetos a partir de las prácticas matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional como personal? Asimismo, esto nos permite cuestionarnos sobre la importancia que tiene enseñar ese objeto matemático en particular, el tipo de situaciones problemas que resuelve, los contextos en que surgió y los que les dan sentido a las prácticas matemáticas, entre otros.

Veamos cómo se materializan estos significados en el diseño de una tarea de matemática. Cuando planificamos una clase sobre el objeto matemático, comenzamos a delimitar lo que dicen las instituciones matemáticas y didácticas acerca de él. Por lo general, acudimos a los textos matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares, a lo expresado por los "expertos" en las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, así como a los conocimientos personales previamente adquiridos. A partir de este significado global de referencia, seleccionamos, ordenamos y delimitamos la parte específica que vamos a proponer a los estudiantes durante un proceso de estudio. Asimismo, tomamos en cuenta el tiempo asignado a la materia, los conocimientos previos de los alumnos y los medios y recursos instruccionales disponibles. De este modo, logramos un sistema de prácticas planificadas sobre el objeto matemático para cierto proceso instruccional, que conforma el significado institucional pretendido. Posteriormente, al desarrollar la clase volvemos a realizar ajustes y pueden existir diferencias entre lo que pretendíamos y lo que efectivamente ocurrió en el aula. Este conjunto de prácticas realizadas en la clase de matemática sirve de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes, y constituyen el significado institucional implementado. Por último, las respuestas a una colección de tareas o cuestiones que incluimos en las pruebas de evaluación conforman una muestra del significado institucional evaluado.

Si bien conviene distinguir conceptualmente estos tipos de significados institucionales, en los procesos de instrucción reales se mezclan e interactúan constantemente entre ellos, razón por la cual no siempre es tan clara la línea que los separa en un momento dado. No obstante, realizar un análisis didáctico de ellos nos puede aportar algunas pautas de dificultades que se presentan cuando damos clases. Por ejemplo, podría ser que los significados evaluados no estén completamente contenidos en los significados implementados y sí en el pretendido, lo cual explicaría algunas dificultades que tuvieron los alumnos. Cuando los significados pretendidos/implementados no concuerdan con los significados de referencia, podríamos encontrar errores que se introdujeron en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Por otra parte, si tenemos en cuenta a los estudiantes, podríamos considerar la totalidad del sistema de prácticas personales que son capaces de manifestar potencialmente sobre un objeto matemático, lo que involucra sus conocimientos previos, y nos daría una muestra del significado personal global que cada uno de ellos tiene. Al abordar la enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático particular, los estudiantes darán cuenta, a través de un conjunto de prácticas efectivamente expresadas en las evaluaciones y actividades de clase (sean estas correctas o incorrectas) el significado que le confieren al mismo. Nos encontramos en este caso con el significado personal declarado. Por último, si analizamos el cambio que han sufrido los significados personales que tuvieron lugar al inicio, o previos de los estudiantes, con el que finalmente alcanzaron, nos encontraremos con un conjunto de prácticas manifestadas que guardan relación con la pauta institucional establecida, lo que constituye el significado personal logrado. Si incluimos el factor temporal, podríamos discriminarlo en significado personal logrado inicial o final.

Se asume que las prácticas matemáticas se realizan en un trasfondo ecológico (material, biológico y social) que determina una relatividad institucional, personal y contextual de las prácticas, los objetos y significados, esto es, relatividad respecto de los juegos de lenguaje y formas de vida.

Determinación del significado global de referencia para las tareas

Previo a definir la primera tarea sobre divisibilidad, tendremos que determinar el significado global de referencia. Para ello, recurrimos a estudios específicos realizados sobre la temática elegida (en nuestro caso divisibilidad), recuperando aspectos históricos sobre el tratamiento que tuvieron los objetos matemáticos, familias de problemas, así como también, los errores y dificultades que habitualmente presentan los estudiantes y el diseño de propuestas de enseñanza que surgen de procesos de investigación.

Situándose en la enseñanza de la divisibilidad para la escuela secundaria de la Argentina, Espinoza (2019, p. 69) revisó los textos escolares de aritmética (ocho destinados a estudiantes de escuela secundaria, básica o media y cinco para la formación de maestros y profesores de matemática), diseños curriculares jurisdiccionales y las investigaciones que se hicieron sobre la temática, identificando los siguientes contenidos como los más destacados: "División; Múltiplos y divisores de un número. Relación con los objetos 'factor', 'divisible' y 'divide'; Factorización y factorización prima; Propiedades de los múltiplos y divisores; Criterios de divisibilidad; Números primos y compuestos; Mínimo común múltiplo; Máximo común divisor". Asociados a estos contenidos, surgen las siguientes situaciones problemas detalladas en Espinoza y Pochulu (2020, pp. 302-303):

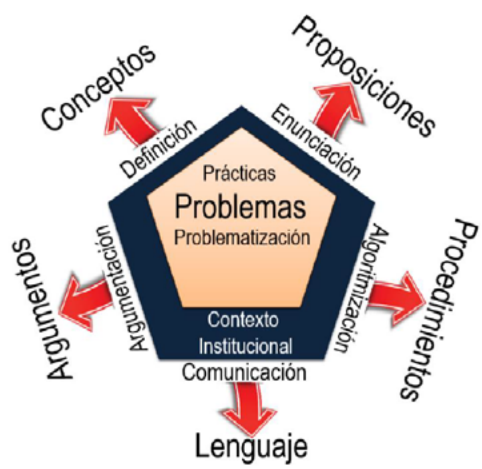
- Dado el cardinal de una colección que se pretende subdividir en subcolecciones equipotentes, determinar el número de subcolecciones de la partición, el cardinal de cada subcolección y el resto.
- Determinar si un número *a* es divisor o factor de otro *b*, cuando *b* está expresado en base decimal, como producto de factores primos, con base en el algoritmo de la división o la propiedad distributiva.

- Determinar si a, número natural o entero, está expresado como producto de factores primos, con base en el algoritmo de la división o en la propiedad distributiva.
- Determinar si 0 es divisor o múltiplo de todos los números.
- Determinar si 1 es divisor o múltiplo de todos los números.
- Caracterizar las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$, cuando a es divisor de b, siendo a y b números no simultáneamente nulos.
- Determinar en qué condiciones, en una división, el divisor de la división es divisor del dividendo.
- Hallar múltiplos de un número.
- Hallar un número conociendo una lista finita, exhaustiva y ordenada de sus múltiplos.
- Hallar todos los divisores de un número.
- Dados los divisores (naturales o enteros), encontrar el número correspondiente.
- Decidir si un número es primo, compuesto, cuadrado perfecto.
- Determinar la cantidad de divisores de un número.
- Determinar la paridad de la cantidad de divisores de un número.
- Hallar un número con una determinada cantidad de divisores.
- Encontrar el mínimo común múltiplo de dos o más números.
- Encontrar el máximo común divisor de dos o más números.
- Determinar si dos números son coprimos.

Teniendo en cuenta la tipología de situaciones problemas que conllevan a la divisibilidad, plantearemos una primera tarea. El profesor tendrá que tomar la decisión si propone el enunciado de la consigna o realiza una adaptación de alguna situación problema ya existente. Al realizar un análisis *a priori* de esa consigna, pondremos en juego otros objetos primarios (pueden ser algunos o todos ellos) y diferentes procesos. De este modo, se involucrarán conceptos o definiciones y con ellos asociamos el proceso de definición. ¿Qué más interviene en una resolución de una situación problema? Proposiciones, propiedades, lemas y teoremas, los que conllevan a un proceso de enunciación. También intervienen procedimientos, algoritmos, técnicas y rutinas propias de la matemática, dando lugar a procesos de algoritmización. En la resolución de la situación problema será necesario utilizar argumentos, que están condicionados por las definiciones, las proposiciones y los procedimientos. En un argumento necesariamente intervienen alguno, o todos, de estos elementos, pues argumentamos apoyándonos en una definición, una proposición y un procedimiento propio de la matemática. Entrará en acción un proceso de justificación y argumentación.

Por supuesto, resulta imposible no pensar en el lenguaje o entidades lingüísticas (términos, expresiones, notaciones, gráficos) que vienen dados en forma escrita o gráfica, aunque en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual) para describir los objetos propios de la matemática. Esto da lugar a un proceso de comunicación en matemáticas. Estos seis elementos, que podemos calificar de matemáticos porque se ponen en juego en la actividad matemática (ver figura 3), son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, teorías, etcétera.

Figura 3. Objetos y procesos primarios



Fuente: adaptación de Godino, Font y Whihelmi (2008, p. 30).

A su vez, estos seis objetos primarios se relacionan entre sí formando configuraciones (ver figura 4), definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, constituyendo los elementos del significado de un objeto matemático.

Figura 4. Configuración epistémica y cognitiva

Fuente: adaptado de Pochulu y Font (2011, p. 371).

Estas configuraciones pueden ser epistémicas si son redes de objetos institucionales, o cognitivas si representan redes de objetos personales. Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional.

En las configuraciones epistémicas o cognitivas, las situaciones problemas son el origen o razón de ser de la actividad, y las que vienen a motivar el conjunto de reglas que aparecen en ella. En este conjunto de reglas tenemos las definiciones que son introducidas mediante descripciones, como recta, punto, número, media, función. Las proposiciones, propiedades, atributos, lemas, teoremas y enunciados que hacemos sobre los objetos definidos. Los procedimientos, algoritmos, operaciones, acciones, técnicas de cálculo o rutinas. El conjunto de reglas, regulan el uso del lenguaje, términos, expresiones, notaciones, gráficos, que sirve de instrumento para la acción, razón por la cual expresa y soporta el conjunto de reglas.

Al resolver una situación problema, el lenguaje puede aparecer de manera verbal (oral o escrita), por ejemplo, si enunciamos un criterio de divisibilidad; o simbólica, cuando utilizamos las expresiones que nos permiten realizar los cálculos; o gráfica, si hacemos las representaciones correspondientes. Finalmente, tenemos los argumentos que justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan las definiciones entre sí, todo lo cual viene a regular el uso del lenguaje que, por su parte, sirve de instrumento para la comunicación. Asimismo, el conjunto de reglas son los que intervienen y condicionan los argumentos.

Es de destacar que cada objeto matemático, dependiendo del tipo de análisis, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos. Por ejemplo, un argumento, que es un objeto matemático para el EOS, puede poner en juego definiciones, proposiciones, procedimientos y, obviamente, está soportado por el lenguaje. Por último, todo este proceso viene a resolver la situación problema que dio origen a la actividad matemática.

El diseño y análisis didáctico de una tarea sobre divisibilidad

Pasemos a un ejemplo en que usamos la herramienta configuración epistémica y cognitiva que propone el EOS. Consideremos una tarea que se enmarca en una situación problema del significado global de referencia del tipo: “encontrar el máximo común divisor de dos o más números”. Las tres partes que componen la tarea son las siguientes.

Contexto

Los alumnos manejan operaciones con naturales (suma, resta, multiplicación y división, potenciación y radicación) y propiedades (asociativa, conmutativa, distributiva, elemento neutro), y principios de conteo. Saben calcular el máximo común divisor de un número, conocen reglas de la divisibilidad, descomponer en factores primos y determinar los divisores de un número. Están acostumbrados a trabajar en grupos y a argumentar sus respuestas. El docente viene trabajando con Divisibilidad y tiene pensado trabajar el cálculo del máximo común divisor entre dos números relativamente grandes. Les propone trabajar en grupo y defender la resolución en una puesta en común al final de la clase.

Objetivos

Que los alumnos:

- Propongan formas de encontrar el máximo común divisor entre dos números.
- Argumenten sobre la validez de distintas formas de encontrar el máximo común divisor.

Consigna

Tenemos dos trozos de alambre de acero inoxidable símil plata y oro, de 240 cm y 396 cm de longitud respectivamente. Con ellos se quiere realizar un accesorio de joyería para pendientes, tal como muestra la imagen. ¿Cuál será la mayor longitud en que se puede cortar estos alambres, de forma tal que la longitud de corte sea la misma en ambos trozos y que no sobre material? Fundamenta tu respuesta.

La situación problema es contextualizada (encontrar el trozo de alambre de acero inoxidable de mayor longitud que entre en partes enteras iguales en otros dos trozos dados), para lo cual la resolución se reduce a hallar el máximo común divisor entre dos números naturales que son relativamente grandes para los estudiantes.

Como tenemos que cortar trozos de alambre de la misma longitud, inicialmente tendríamos muchas opciones como, por ejemplo, cortarlos en trozos de

0,5 cm, de 1 cm, de 2 cm, etcétera, pues el problema no establece condición alguna para ello. No obstante, asumiremos que serán cortados en trozos que resulten tener una longitud entera y como debemos encontrar la mayor longitud que sea común, recurriremos al cálculo del máximo común divisor, ya que nos ofrece esta posibilidad.

Para determinar una configuración epistémica y cognitiva, tendremos que realizar una resolución experta, estableciendo los diferentes caminos que podrían ser tomados por los estudiantes para encontrar una solución a la situación problema e identificando los objetos primarios involucrados.

Sabemos que un número *d* es el máximo común divisor (MCD) de los números *a* y *b* (concepto), cuando:

d es divisor común de los números *a* y *b*, y

d es divisible por cualquier otro divisor común de los números *a* y *b*.

Para encontrar el MCD podemos realizar la descomposición en factores primos de cada número, expresándolo como el producto de potencias de números primos (*procedimiento*), o usar el algoritmo de Euclides (*concepto y procedimiento*) que es más eficiente cuando se trata de números grandes. No obstante, cabe destacar que este procedimiento no se considera un conocimiento previo de todos los estudiantes.

Al tener dos números naturales, podemos encontrar el MCD a través de la descomposición en factores primos (procedimiento usual en los estudiantes). Para ello, realizamos divisiones del número recurriendo al menor número que lo divide (*procedimiento*) y tendremos en cuenta algunos criterios de divisibilidad (proposición) involucrados. En nuestro caso resulta:

$$\begin{array}{r|l} 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 308 & 2 \\ 154 & 2 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5 \qquad\qquad 308 = 2^2 \times 7 \times 11$$

Para el cálculo se podrían tener en cuenta los siguientes criterios de divisibilidad:

- Un número es divisible por 2, cuando termina en una cifra par (*proposición*).
- Un número es divisible por 5, cuando termina en 0 o 5 (*proposición*).
- Un número es divisible por 7, cuando la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 o un múltiplo de 7 (*proposición*).
- Un número es divisible por 11, si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan los lugares impares y la de los pares es 0 o un múltiplo de 11 (*proposición*).

Notemos que podríamos no haber utilizado los criterios de divisibilidad. Por ejemplo, podemos darnos cuenta que el 77 es divisible entre 7, pero ignorando el criterio de divisibilidad. Lo mismo acontece con números como el 11. Teniendo la descomposición en factores primos de cada uno de los números, encontramos el MCD determinando los factores comunes con su menor exponente (*procedimiento*), esto es:

$$240 = 2^4 \times 3 \times 5 \quad 308 = 2^2 \times 7 \times 11$$

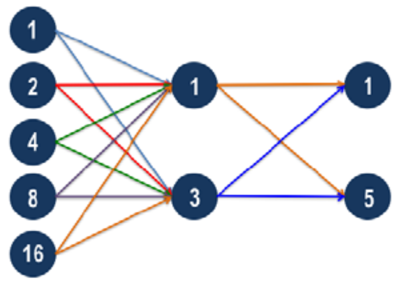
$$MCD\ (240{,}308) = 2^2 = 4$$

En síntesis, y para fundamentar la respuesta, el trozo de alambre de 240 cm podría ser cortado en longitudes enteras con las siguientes medidas:

$$\text{Longitudes}_{\{240\}} = \{1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,16,20,24,30,40,48,60,80,120,240\}$$

Estas medidas surgen de considerar los divisores de 240 que se obtienen por aplicar principios de conteo (*procedimiento*) entre los divisores positivos de cada uno de los factores que tiene la descomposición prima. Sabemos que los divisores de cada uno de los factores en que se descompone un número *a*, también son divisores de *a* (*proposición*).

Así, 2^4 tiene 5 divisores: {1,2,4,8,16}, mientras que el 3 tiene a {1,3} y el 5 a {1,5}. En total tendremos 5 × 2 × 2 = 20 divisores, que surgen de las siguientes combinaciones.



Resultan ser divisores del 240 los siguientes números:

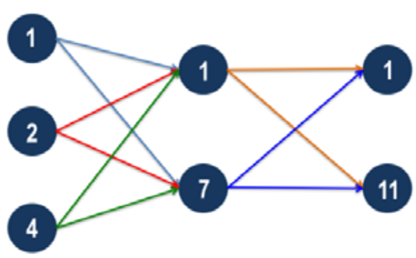
$D(240) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240\}$

El trozo de 308 cm podría ser cortado en longitudes enteras con las siguientes medidas:

$Longitudes_{\{308\}} = \{1, 2, 4, 7, 11, 14, 22, 28, 44, 77, 154, 308\}$

Estas medidas surgen de considerar los divisores de 308 que se obtienen por aplicar principios de conteo (*procedimiento*) entre los divisores positivos de cada uno de los factores que tiene la descomposición prima, pues sabemos que los divisores de cada uno de los factores en que se descompone un número *a*, también son divisores de *a* (*proposición*).

Así, 2^2 tiene 3 divisores: {1,2,4}, mientras que el 7 tiene a {1,7} y el 11 a {1,11}. En total tendremos $3 \times 2 \times 2 = 8$ divisores, que surgen de las siguientes combinaciones:



Resultan ser divisores del 308 los siguientes números:

$D(308) = \{1, 2, 4, 7, 11, 14, 22, 28, 44, 77, 154, 308\}$

Los divisores comunes de ambos números son 1, 2 y 4. Por ello, los trozos de alambre podrían ser cortados en longitudes de 1, 2 y 4 cm, cuyos valores numéricos son los divisores comunes del 240 y 308, y como el 4 es el mayor de ellos en tanto $MCD(204{,}308) = 4$, resultando ser el modo óptimo de hacerlo (*argumento*), esto es, cortar cada alambre en tramos de 4 cm.

Ahora bien, ¿son los únicos procedimientos que tenemos para encontrar el MCD? Ciertamente no, y vale la pena analizar algunos que resultan más intuitivos e involucran mucha riqueza matemática. Podríamos usar la definición de divisor: "Un número natural '*a*' es divisor de un número natural '*b*', si existe un número natural '*c*' tal que $a = b \times c$". En consecuencia, el 2 es un divisor y podemos descomponer al 240 como $240 = 2 \times 120$. Si un estudiante solo advierte que el 2 es un divisor y no el 120, no está articulando adecuadamente la *definición* con una *proposición*, la cual establece que tanto "*b*" como "*c*" son divisores. Aquí surge un detalle relevante para profundizar la comprensión alcanzada en divisibilidad por parte de un estudiante: ¿es posible que exista algún otro divisor de 240 mayor a 120? La respuesta es no, pero el fundamento implica entender profundamente la divisibilidad. Si existiera un divisor de 240 mayor a 120, tendría que existir otro natural que multiplicado por él sea casualmente 240. Pero si $2 \times 120 = 240$ y $1 \times 240 = 240$, entonces deberíamos multiplicar a este número (mayor a 120) por un natural comprendido entre 1 y 2, lo cual no existe.

Ahora, si 3 y 80 son divisores de 240, entonces tampoco existen otros divisores entre 80 y 120. Si admitimos que existe un natural m, con $80 < m < 120$, que es divisor de 240, tendríamos que encontrar otro número natural que multiplicado por m sea exactamente igual a 240. Esto no es posible pues:

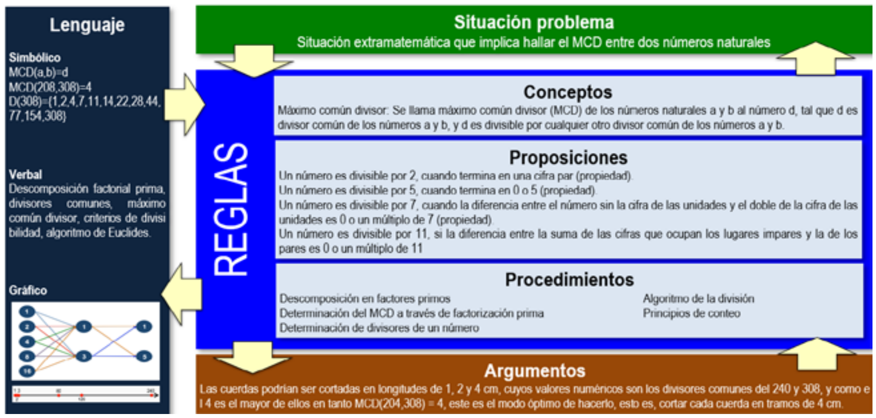
$$80 = 80 \bullet 1 < m \bullet 1 < 120 \bullet 1 = 120$$

$$160 = 80 \bullet 2 < m \bullet 2 < 120 \bullet 2 = 240$$

$$240 = 80 \bullet 3 < m \bullet 3 < 120 \bullet 3 = 360$$

Resulta muy interesante que se establezca este debate con los estudiantes, porque ayuda a que se articulen proposiciones (propiedades), definiciones (conceptos) y procedimientos vinculados a divisibilidad.

Ya tenemos segregados todos los objetos primarios para estructurar la *configuración epistémica* asociada a la situación problema. Asimismo, podríamos discriminar los elementos lingüísticos en sus diferentes registros (verbal, simbólico, gráfico), y el de los argumentos que devienen de la situación problema.



Pero ¿para qué sería útil la configuración epistémica y cognitiva en el diseño de una tarea que realiza el profesor? Entre las ventajas de esta herramienta tenemos:

- Se establecen los objetos matemáticos que entran en juego en la situación problema. Una dificultad habitual suele encontrarse en la imposibilidad de distinguir, en algunos casos, si el objeto involucrado es una definición (explícita o implícita), proposición (propiedad) o procedimiento, o asume un doble rol en la resolución.
- Se ponen en evidencia los nuevos objetos matemáticos que emergen de la situación problema.
- Permite visualizar de manera simple los objetos matemáticos que intervienen, dando lugar a modificar la situación problema para convertirla en una más rica o que desafíe cognitivamente al estudiante.
- Ayuda a comparar los objetos matemáticos involucrados ante otra situación problema perteneciente al mismo tipo, ya sea en un contexto intramatemáticos como contextualizados.
- Permite valorar la comprensión alcanzada por cada estudiante en la situación problema al estructurar la configuración cognitiva y compararla con la epistémica.

Cabe destacar que, si se tienen pocos estudiantes, es fácil obtener datos a través de sus prácticas operativas y discursivas, con lo cual vamos estructurando el modo en que cada uno de ellos articula los seis objetos primarios en redes de significado (configuración cognitiva). Si el número de estudiantes es cuantioso, prácticamente es difícil llevar a cabo un estudio personalizado de lo que acontece en la estructura cognitiva de cada uno de ellos. Un camino posible es recurrir a las narrativas pedagógicas o diarios de clase. Entendemos a la narrativa pedagógica como:

> … instrumento que permite recoger datos significativos sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, además de la reflexión sobre los mismos, su análisis y sistematización. Asimismo, una narrativa permite recolectar opiniones, argumentos, destrezas y actitudes presentes en situaciones reales de aprendizaje, y posibilita el rescate de las discusiones espontáneas entre los estudiantes en las puestas en común iniciales (Pochulu, 2018, p. 17).

A su vez, el proceso de análisis de una narrativa no culmina en un único momento. Es recomendable que retorne al estudiante con nuevos comentarios y preguntas, con el firme propósito de mejorar los procesos de argumentación, revisar definiciones, procedimientos o técnicas que ha empleado, reflexionar sobre lo aprendido y que se planteen nuevos desafíos. Los análisis posteriores de las narrativas que son mejoradas por los estudiantes darán pistas sobre la comprensión que efectivamente alcanzan con los contenidos involucrados en la tarea, al estructurarse la correspondiente configuración cognitiva y compararla con la epistémica. No debe perderse de vista que una narrativa pedagógica es una herramienta que nos permite valorar los aprendizajes de los estudiantes y realizar una evaluación continua. Asimismo, no debe confundirse esta herramienta de evaluación con la calificación o nota que se busca poner al trabajo realizado por el estudiante.

Indicadores de idoneidad didáctica para el diseño y análisis de tareas

La noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones, criterios o indicadores y el desglose operativo fueron introducidos en diferentes trabajos (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007; Godino, 2013a y 2013b; Breda, Font y Pino-Fan, 2018) como herramientas del EOS que permiten tanto el diseño como el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Los criterios de idoneidad didáctica (CI) propuestos en el marco teórico EOS, pretenden ser una respuesta parcial a la siguiente problemática: ¿qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, que permitan evaluar y desarrollar competencias matemáticas de los alumnos, y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de estas competencias? Los CI pueden servir primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática y, segundo, para valorar sus implementaciones. Los CI son útiles en dos momentos de los procesos de instrucción. *A priori*, los criterios de idoneidad son principios que orientan "cómo se deben hacer las cosas". *A posteriori*, los criterios sirven para valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado.

En el EOS se consideran los siguientes CI (Font, Planas y Godino, 2010):

- *Idoneidad epistémica.* Para valorar si la matemática que está siendo enseñada es "buena matemática".
- *Idoneidad cognitiva.* Para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben y, después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar.
- *Idoneidad interaccional.* Para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos.
- *Idoneidad mediacional.* Para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.
- *Idoneidad emocional.* Para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad ecológica.* Para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional.

La operatividad de los CI exige definir indicadores observables, que permitan valorar el grado de idoneidad de cada uno de ellos. En Breda y Lima (2016); Breda, Pino-Fan y Font (2017) y Breda (2020) se aporta un sistema de indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa. Cada uno de estos criterios se desglosa en componentes e indicadores a manera de rúbrica, con el fin de hacerlos operativos. A continuación, en el cuadro 1 se detallan los criterios y componentes de idoneidad didáctica (por cuestiones de espacio no se detallan los indicadores).

Cuadro 1. Criterios y componentes de idoneidad

Criterio de idoneidad	Componente
Epistémica	(IE1) Errores, (IE2) Ambigüedades, (IE3) Riqueza de procesos, (IE4) Representatividad
Cognitiva	(IC1) Conocimientos previos, (IC2) Adaptación curricular a las diferencias individuales, (IC3) Aprendizaje, (IC4) Alta demanda cognitiva
Interaccional	(II1) Interacción docente-discente, (II2) Interacción entre discentes, (II3) Autonomía, (II4) Evaluación formativa
Mediacional	(IM1) Recursos materiales, (IM2) Número de estudiantes, horario y condiciones del aula, (IM3) Tiempo
Afectiva	(IA1) Intereses y necesidades, (IA2) Actitudes, (IA3) Emociones
Ecológica	(IEC1) Adaptación al currículo, (IEC2) Conexiones intra e interdisciplinares, (IEC3) Utilidad sociolaboral, (IEC4) Innovación didáctica

Fuente: basado en Breda y Lima (2016).

El uso de los criterios de idoneidad didáctica en la formación de profesores

Planteamos en esta sección cómo puede usarse el constructo criterios de idoneidad didáctica (CI) en la formación inicial de profesores, principalmente cuando se desconocen las herramientas del EOS. Para ello, proponemos y fundamentamos un ciclo formativo que toma como base diferentes experiencias e investigaciones realizadas al respecto.

Sabemos que las diversas tendencias sobre la formación de profesores proponen la investigación del profesorado y la reflexión sobre su práctica como una estrategia clave para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza. Entre dichas tendencias destacamos la investigación, acción (Eliot, 1993), la práctica reflexiva (Schön, 1983) y el estudio de lecciones (Hart, Alston & Murata, 2011). En esta línea de lograr potenciar la reflexión del profesor sobre su propia práctica, el constructo CI (y su desglose en componentes y descriptores) se ha utilizado como herramienta para organizar la reflexión del profesor, tal como se viene haciendo en diferentes procesos de formación en algunos países de Iberoamérica. En estas experiencias se ha evidenciado que los CI constituyen un instrumento metodológico útil para promover y apoyar en los profesores la reflexión sobre su propia práctica. Por otra parte, estas herramientas pueden ser impartidas como parte de la formación del profesorado y ser incorporadas como herramientas para organizar la reflexión sobre la propia práctica.

En Breda, Font y Lima (2015) se explica cómo surgió la noción de idoneidad didáctica y su uso en diferentes investigaciones y procesos de formación, en especial en Latinoamérica. Garcés, Flores, Morales-Maure y Seckel (2018) continuaron estudiando el impacto de los CI en la formación de profesores a partir de 2015 en Latinoamérica. Para ello, realizaron una búsqueda, en diferentes bases de datos, tomando como criterio la aparición en títulos, resúmenes y palabras claves del término "criterios de idoneidad didáctica" (en español o en inglés), completada con otras fuentes de información (por ejemplo, la revisión realizada por Kaiber, Lemos e Pino-Fan, 2017). Estos autores encontraron dos usos de los CI:

1. Para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje, por parte de investigadores, pero no son enseñados a los participantes. Por ejemplo, en las investigaciones de Moreira, Gusmão y Font (2018a) o en Morales-López y Font (2017 y 2019).
2. Como contenido a explicar para organizar la reflexión del profesor sobre su propia práctica y para organizarla. Esto aconteció en dos posgrados: un máster de formación de profesores de secundaria en servicio en Ecuador y un diplomado para maestros de primaria en servicio en Panamá.

Tomando como base el segundo uso de los CI, se desarrolló un ciclo formativo para la capacitación de profesores, cuya primera vez fue implementado por Rubio (2012) con profesores de secundaria de España y rediseñado por Seckel (2016) para la formación de futuros profesores de primaria de Chile. Si los profesores, o futuros profesores, desconocen las herramientas y constructos del EOS, este ciclo implica la siguiente secuencia:

1. *Análisis de casos (sin teoría)*. Se propone a los futuros profesores la lectura y análisis de episodios de clase para que hagan un análisis a partir de sus conocimientos previos.

2. *Emergencia de los tipos de análisis didácticos propuestos por el EOS.* La puesta en común de los análisis realizada por los diferentes grupos permite observar cómo el gran grupo contempla los diferentes tipos de análisis didácticos propuestos por el EOS, aunque cada grupo solo llegue a proponer alguno de ellos.
3. *Tendencias en la enseñanza de la matemática.* El episodio analizado se selecciona de manera que los asistentes apliquen de manera implícita alguna de las tendencias actuales sobre la enseñanza de la matemática o prescriptas en los currículos escolares. Seguidamente se les hace observar a los asistentes que han utilizado esta tendencia de manera implícita. A continuación, se hace un resumen de las principales tendencias en la enseñanza de la matemática.
4. *Teoría (criterios de idoneidad).* Se explican y ejemplifican los CI propuestos en el EOS (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica).
5. *Análisis de trabajos de cursos anteriores.* Los futuros profesores utilizan los CI para valorar la unidad didáctica de procesos de estudio implementados y documentados. También se solicita a los futuros profesores que propongan una mejora de alguna tarea mostrada en esos trabajos, explicitando los CI que tuvieron en cuenta.

Recientemente se han realizado experiencias de formación de profesores que combinan la metodología de la *Lesson Study* con los CI. Las experiencias de *Lesson Study* son una metodología para la formación del profesorado desarrollada inicialmente en Japón, que consiste básicamente en el diseño colaborativo y cuidadoso de una clase, de su implementación y observación directa en el aula, y de un análisis conjunto posterior (Hart, Alston & Murata, 2011).

Las *Lesson Studies* son metodologías de trabajo docente apoyadas en actitudes investigativas y prácticas colaborativas entre profesores, que buscan, al mismo tiempo, la mejora de la práctica docente y del aprendizaje de los estudiantes y el desarrollo profesional de los profesores. Una de sus virtudes es que sitúa a los profesores en el epicentro de su actividad profesional: el diseño, implementación y rediseño de secuencias de tareas con el objetivo de, primero, comprender mejor el aprendizaje de los alumnos sobre la base de sus propias experiencias de enseñanza y, segundo, mejorar este aprendizaje. La idea es que los profesores se reúnan con una duda en común sobre el aprendizaje de sus alumnos, planifiquen una clase para que los estudiantes aprendan, y examinen y discutan lo que observan en la implementación de esta lección. A través de múltiples iteraciones del proceso, los profesores tienen muchas oportunidades para discutir el aprendizaje de los alumnos y cómo su enseñanza incide sobre el aprendizaje. Básicamente se desarrollan en cuatro etapas:

1. *Planificación de la clase*. Un grupo de profesores elige los temas a desarrollar; establece los objetivos para los aprendizajes y el desarrollo de los alumnos; elige el material didáctico; y apunta las expectativas sobre posibles respuestas y el comportamiento de los estudiantes frente a las cuestiones propuestas.
2. *Realización y observación de la clase*. Un profesor comparte su clase mientras los demás observan y registran el proceso de enseñanza y aprendizaje. La participación de los otros miembros del grupo es activa en cada etapa de resolución de las cuestiones propuestas, desde la comprensión del problema, el establecimiento de estrategias y análisis de la resolución, estimulando el cuestionamiento y el descubrimiento de los estudiantes.
3. *Reflexión conjunta sobre los datos registrados*. Después de la clase, los profesores (observados y observadores) se reúnen para evaluar los procesos de enseñanza observados, reflexionando acerca de las actitudes y aprendizajes de los alumnos y del profesor durante la clase. El grupo hace un análisis de la clase, teniendo en cuenta sus perspectivas, tanto de enseñanza y del área en sí.
4. *Rediseño*. A partir de las discusiones realizadas en la etapa anterior el plan de clase es reestructurado. Se aplica en otra clase y se inicia un nuevo ciclo.

El diseño de los dispositivos formativos que pretenden enseñar el uso de los CI se basa en la suposición, observada en diversas investigaciones (Breda, 2016), de que los CI funcionan como regularidades en el discurso de los profesores, cuando estos tienen que diseñar y valorar secuencias didácticas orientadas a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, incluso sin habérseles enseñado el uso de esta herramienta para guiar su reflexión. Por tanto, se supone que, en las fases iniciales de estos dispositivos formativos, los participantes formulan y usan de manera implícita algunos indicadores y componentes de los CI. Esta suposición ha funcionado como una regularidad en las diversas experiencias realizadas, pero en ellas se ha hecho evidente que esta fase inicial de reflexión no pautada es relativamente corta y que sería conveniente que fuese más amplia. Por otra parte, la metodología de las *Lesson Studies*, en cierta manera, se puede considerar como una fase de reflexión no pautada muy amplia que está orientada a la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, por tanto, es de esperar que en la fase de planificación, en la de observación, en la de reflexión y en la de rediseño orientada a la mejora, los participantes usen de manera implícita muchos de los indicadores y componentes de los CI para hacer valoraciones positivas de algunos aspectos de la experiencia realizada. Por tanto, en una experiencia de *Lesson Study* van a surgir consensos implícitos entre los participantes sobre aspectos que se valoran positivamente, los cuales se pueden reinterpretar en términos de indicadores y componentes de los CI.

Dicho de otra manera, la metodología de estudio de clase se puede convertir en un tipo de dispositivo de formación que favorece que algunos de los indicadores y componentes de los CI surjan como consensos de la reflexión del grupo de profesores. Esto da pie a la ampliación de la *Lesson Study* con un ciclo formativo que introduzca los indicadores, componentes y CI, tal como se relató en las experiencias de formación comentadas.

Los dispositivos formativos que pretenden enseñar los CI también parten de la suposición de que estos pueden ser enseñados como herramienta para organizar la reflexión del profesor y, por tanto, la mayor parte del ciclo formativo se dedica a implementar un proceso de enseñanza y aprendizaje de estas nociones con los participantes. En cambio, en las *Lesson Studies* no se realiza este proceso de generación de una pauta organizada en criterios, componentes e indicadores como herramienta para organizar la reflexión. Por tanto, si la metodología *Lesson Study* puede ser muy útil para mejorar la fase inicial de la metodología de los CI, esta última puede ser una ampliación de la metodología *Lesson Study* para generar una pauta con el fin de organizar la reflexión del profesor. En consecuencia, la estructura del dispositivo formativo que permite combinar la *Lesson Study* con los CI es la siguiente:

- Primera etapa: *Lesson Study*.
- Segunda etapa: hacer observar a los participantes que en la fase del estudio de clase usaron de manera explícita o implícita algunos de los componentes e indicadores de los CI.
- Tercera etapa: enseñanza de los CI.

- Cuarta etapa: uso de los CI como herramienta metodológica que permite organizar y mejorar la reflexión realizada en la fase de la *Lesson Study*, lo cual repercute en mejores propuestas de rediseño de la secuencia de tareas confeccionada en la *Lesson Study* (Hummes, Font & Breda, 2019).

Reflexiones finales

Por medio del ejemplo de una tarea logramos mostrar y ejemplificar algunas herramientas del EOS, en particular, el constructo configuración epistémica y cognitiva y cómo se articulan los diferentes objetos primarios. Esto le permite al profesor identificar conocimientos previos y emergentes de sus estudiantes, caracterizar las argumentaciones que podrían estar presente y advertir los diferentes registros de representación que emplearán en la resolución. No obstante, cabe destacar que la situación problema propuesta surgió después de estructurar un marco epistémico y didáctico de referencia, y en el contexto de una tesis de doctorado, lo cual no es común en la realidad de los profesores que diseñan tareas de matemática.

La conformación de este marco epistémico y didáctico de referencia tiene dos propósitos centrales para quienes formamos profesores de matemática. El primero de ellos es poner en evidencia lo que se ha investigado sobre una temática y el acceso a las revistas y tesis de didáctica de la matemática. De alguna manera, buscamos que el futuro profesor pueda iniciar un proceso de cuestionamiento sobre el objeto matemático, su enseñanza y las implicaciones educativas, preguntándose: ¿qué es este objeto que quiero enseñar y cuáles son sus significados?, ¿por qué debería enseñar este objeto matemático?, ¿existen otras maneras de enseñarlo?, ¿cómo evitamos la reproducción de modelos que seguramente estuvieron presentes en la formación previa de los estudiantes?

Aunque la selección, adaptación y reformulación de tareas es una actividad habitual del profesor de matemática, es necesario tener una perspectiva más amplia de la planificación y contemplar los procesos de enseñanza y aprendizaje en su conjunto. En este sentido, los CI se vuelven un constructo potente para el diseño, análisis y valoración de un proceso de estudio, tanto en el estudio *a priori* como *a posteriori*. A estos CI se le incorporaron indicadores empíricos que se encuentran sintetizados y ejemplificados en diferentes trabajos del EOS que citamos oportunamente. No obstante, Godino (2013b) expresa que:

> El foco de atención en el diseño de las tareas debe orientarse a mostrar cómo la realización de las mismas influye o determina el aprendizaje matemático, el cual depende de múltiples factores, no solo de las tareas matemáticas seleccionadas. Por ello la herramienta "configuración de objetos y procesos" que ha desarrollado el EOS se revela como un recurso útil ya que ayuda a identificar los objetos y procesos matemáticos puestos en juego, prever conflictos potenciales y, en consecuencia, tomar decisiones sobre estrategias instruccionales (p. 12).

En síntesis, a través del diseño de una secuencia de tareas, el profesor podrá dar sentido a los diferentes CI propuestos desde el EOS y establecer conexiones con los objetos matemáticos de los diversos bloques temáticos, lo cual contribuirá a otorgar alta idoneidad didáctica a su planificación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de formación de profesores PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias bibliográficas

Breda, A. (2016). *Melhorias no ensino de matemática na concepção de professores que realizam o mestrado profmat no Rio Grande do Sul: uma análise dos trabalhos de conclusão de curso.* [Tesis de Doctorado]. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. https://www.researchgate.net/publication/305681739_Melhorias_no_ensino_de_matematica_na_concepcao_de_professores_que_realizam_o_mestrado_Profmat_no_Rio_Grande_do_Sul_uma_analise_dos_trabalhos_de_conclusao_de_curso_Tese_de_doutorado_nao_publicada_Ponti.

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema*, *34*(66), 69-88.

Breda, A., Font, V. e Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *8*(2), 1-41.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, *32*(60), 255-278.

Breda, A. y Lima, V. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, *5*(1), 74-103.

Breda, A., Pino-Fan, L. R. & Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*, 1893-1918.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.

Elliott, J. (1993). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Ediciones Morata.

Espinoza, R. F. (2019). *La comprensión alcanzada por estudiantes de Profesorado en Matemática, referida a la Divisibilidad, al comenzar la Universidad.* [Tesis de doctorado]. Universidad Nacional de Misiones, Posadas, Argentina.

Espinoza, R. F. y Pochulu, M. (2020). Diseño de un instrumento para valorar la comprensión alcanzada en divisibilidad por futuros profesores de matemática. *Bolema*, *34*(66), 294-313.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *26*, 9-25.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Garcés, W., Flores, M. J., Morales-Maure, L. y Seckel, M. J. (2018). El uso de los criterios de idoneidad en grados y postgrados de formación de profesores de Latinoamérica. En M. Guillot-Valdés y A. Guillén-Riquelme (Comp.), *XV Foro internacional sobre la evaluación de la calidad de la investigación y de la educación superior* (pp. 254-259). Granada: Asociación Española de Psicología Conductual.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49-68). SEIEM.

Godino, J. D. (2013a). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*, 111-132.

Godino, J. D. (2013b). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 1-15). Universidad de Granada.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico. del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-20). Universidad de Granada.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D. Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 37- 42.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2020). El Enfoque Ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *12*(2), 3-15.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *XXVII*(2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *26*(1), 39-88.

Godino, J., Font, V. y Whihelmi, M. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el Enfoque Ontosemiótico. *Publicaciones*, *38*(1), 25.48.

Hart, L. C., Alston, A. & Murata, A. (2011). *Lesson study research and practice in mathematics education*. Springer.

Hummes, V. B., Font, V. & Breda, A. (2019). Combined Use of the Lesson Study and the Criteria of Didactical Suitability for the Development of the Reflection on the own Practice in the Training of Mathematics Teachers. *Acta Scientiae*, *21*(1), 64-82.

Kaiber, T., Lemos, A. e Pino-Fan, L. (2017). Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS): um panorama das pesquisas na América Latina. *Perspectivas da Educação Matemática, 10*(23), 531-552.

Morales-López, Y. y Font, V. (2017). Análisis de la reflexión presente en las crónicas de estudiantes en formación inicial en educación matemática durante su periodo de práctica profesional. *Acta Scientiae*, *19*(1), 122-137.

Morales-López, Y. & Font, V. (2019). Evaluation by a teacher of the suitability of her mathematics class. *Educaçao e Pesquisa, 45,* 1-19.

Moreira, C., Gusmão, T. e Font, V. (2018a). Pra lá e pra cá, vou a qualquer lugar! O papel do corpo e do seu movimento no contexto das tarefas para o desenvolvimento da percepção espacial na Educação Infantil. *Unión, 52*, 144-166.

Moreira, C., Gusmão, T. e Font, V. (2018b). Tarefas matemáticas para o desenvolvimento da percepção de espaço na educação infantil: potencialidades e limites. *Bolema*, *32*(60), 231-254.

Pochulu, M. (2018). Las narrativas de los estudiantes como instrumento para valorar la comprensión. En M. Pochulu (Comp.), *Relatos de investigación y experiencias docentes en Educación Matemática* (pp. 15-22). GIDED-UNVM.

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(3), 361-394.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(1), 71-98.

Rodríguez, M. (Coord.) (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática.* Ediciones UNGS.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos.* [Tesis doctoral]. Universitat de Barcelona.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática.* [Tesis doctoral]. Universitat de Barcelona.

Schon, D. A. (1983). *The reflective practitioner: how professionals think in action*. Basic Books.

Serrazina, M. (2010). A Formação Contínua de Professores em Matemática: o conhecimento e a supervisão em sala de aula e a sua influência na alteração das práticas. *International Journal for Studies in Mathematics Education*, *2*, 2-24.

Sousa, J. R., Gusmão, T., Font, V. & Landa, J. C. (2020). Task (re)design to enhance the didactic-mathematical knowledge of teachers. *Acta Scientiae, 22*(4), 97-123.

Stein, M. H. e Smith, M. S. (2009). Tarefas Matemáticas como quadro para reflexão. *Educação e Matemática*, *105*, 22-28.