2. Distintas formas de inclusión de la historia de la matemática en la enseñanza
Algunas ideas usando logaritmos

*Gustavo Carnelli**

Introducción

Una pregunta de interés para quien enseña matemática en el nivel secundario es: ¿cómo incluir la historia de la matemática en las propuestas de enseñanza? En este capítulo avanzaremos sobre algunos aspectos de este asunto. Veremos primero qué lugar tiene la historia de la matemática en la formación docente inicial; luego, daremos un vistazo a la producción académica acerca de posibles formas de incluirla en la enseñanza y, por último, daremos algunas ideas para su efectiva implementación en las aulas.

En la bibliografía disponible solemos encontrar ideas generales acerca del uso de la historia en la enseñanza para algunos contenidos, pero cuya expresión concreta en actividades para el aprendizaje no se percibe simple. Incluiremos aquí algunas de estas ejemplificaciones generales ya que pueden aportar ideas para que el docente tome, pero también mostraremos algunas actividades para el aula que pretenden ejemplificar los distintos usos de la historia que hemos encontrado.

Es cierto que hay una pregunta previa: ¿por qué incluir la historia en la enseñanza? A lo largo del capítulo tomaremos, en algunas ocasiones, la palabra

* Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina.

de Juan Nápoles Valdés. A propósito, este investigador argentino da respuestas a este interrogante: entre ellas, que el conocimiento de la evolución de las ideas matemáticas da al docente elementos para reconocer y atender a los obstáculos epistemológicos en la formación de ciertas nociones y también que favorece la reflexión sobre la enseñanza y el aprendizaje de las dificultades inherentes a las nociones (Nápoles Valdés, 2015). No nos detendremos en esto, no abordamos aquí los fundamentos del uso de la historia de la matemática en la enseñanza de la matemática, pero a partir de estas respuestas, pensamos que contemplar la historia en la enseñanza no solo puede verse en su manifestación explícita en las consignas de las actividades para la clase, sino también en el aporte a la formación continua del docente que le permita diseñar una propuesta más rica para la enseñanza de un cierto tema.

Una mirada a la formación docente

Si pensamos en incluir la historia en la enseñanza, podemos preguntarnos qué acceso a la historia de la matemática tiene un docente en su formación. Para esto –apenas para un abordaje preliminar–, resulta de interés mirar cómo aparece este campo de conocimientos en la formación docente inicial. La inclusión de la historia de la matemática adquiere, con frecuencia, la forma de un espacio curricular en los últimos años de la carrera de profesorado de matemática. Recorramos algunos casos.

- Diseño curricular para la formación docente en matemática de CABA: aparece el bloque "Historia, fundamentación y profundización del conocimiento matemático", dentro del campo de la formación específica. En la descripción del bloque, algunas de las finalidades formativas son: "comprender la evolución histórica de los conceptos y conceptualizaciones fundamentales de la matemática y su interrelación, promover la inclusión de temas históricos en la enseñanza de la matemática y vincular a los alumnos con algunos de los diferentes procesos que dieron origen a los conocimientos matemáticos, así como las problemáticas que motivaron tales aspiraciones" (Diseño curricular jurisdiccional para la formación docente del profesorado de educación superior en matemática, 2014).

- Diseño de la provincia de Buenos Aires: plantea una asignatura anual de 64 horas, ubicada en el tercer año. Los contenidos se presentan organizados según un criterio cronológico. Entre los propósitos que se enuncian, podemos destacar; "promover la valoración crítica de las condiciones socioculturales que incidieron en el desarrollo del conocimiento matemático, para concluir en las relaciones que se establecen entre los procesos sociales y el conocimiento matemático específico" (Diseño curricular jurisdiccional del profesorado de educación secundaria en matemática, 2017).
- Universidad Nacional de General Sarmiento, Universidad Nacional de La Plata y Universidad del Comahue: no hay una asignatura de historia de la matemática.
- Universidad Nacional de Villa María: en el tercer año de la carrera hay Historia y Fundamentos de la Matemática.
- Universidad Nacional de La Pampa: en el cuarto año de la carrera hay Historia y Filosofía de la Matemática.
- Universidad de Buenos Aires: hay Historia de la Matemática, que incluye algo novedoso entre sus contenidos: la matemática en la Argentina.
- Universidad Tecnológica Nacional (el Instituto Superior del Profesorado Técnico) e Instituto Superior del Profesorado Dr. Joaquín V. González: hay Historia de la Matemática en tercer año.

Corresponde mencionar que aquellos planes de estudios que no incluyen una asignatura, podrían contemplar la inclusión de la historia de la matemática dentro de las asignaturas de matemática o de la didáctica de la matemática. Por ejemplo, esto se observa en algunos programas de la carrera que ofrece la Universidad Nacional del Comahue. También conocemos algunas experiencias en las que, al planificar la enseñanza de un cierto contenido en asignaturas de la didáctica disciplinar, se debe realizar un recorrido histórico y epistemológico de la noción a enseñar, con vistas a reconocer obstáculos epistemológicos, orígenes del tema y avances y estancamientos en su evolución, para tener un panorama más completo al diseñar una secuencia para el aprendizaje y prever posibles dificultades de los estudiantes.

La ubicación de la asignatura en el tramo final de la carrera permite suponer que se espera un estudiante con amplia formación matemática para abordar el estudio de la historia.

Una tarea que puede tener que realizar un docente de matemática en su actividad profesional es enseñar una asignatura de la historia de la matemática en el nivel superior. En lo recorrido, vemos que la organización temática usual es cronológica. Entendemos que podría combinarse –o sustituirse– con un criterio de organización por asuntos matemáticos. Por ejemplo, el surgimiento y evolución del cálculo, el pasaje de la aritmética al álgebra, la resolución de ecuaciones polinómicas, el infinito, etcétera.

Uso de la historia en la enseñanza

Comentamos al principio que nos interesamos aquí por ver de qué modos puede ser contemplada la historia de la matemática en las propuestas de enseñanza. González Urbaneja (2004), Protti (2003) y Maza Gómez (1994) están entre quienes proponen diversos usos, que organizamos de la siguiente manera:

- Preceder el desarrollo de un tema con una introducción histórica, o bien, añadir resúmenes o notas históricas, de modo de situar los contextos científico y cultural de su origen y la evolución de los problemas que se van a abordar.
- Indicar, durante el desarrollo del tema, a qué matemáticos o corrientes matemáticas se debe la introducción de la nueva noción, la demostración de un teorema o la resolución de un problema o ubicarlo temporalmente.
- Tomar un cierto problema y analizar cómo fue resuelto en el momento histórico correspondiente.
- Aplicar el método genético, que pretende que el estudiante replique, a grandes rasgos, el proceso histórico que se ha desarrollado hasta la formulación actual del concepto.

González Urbaneja (2004) también destaca la influencia que la historia de la matemática tiene en la historia del pensamiento a través de las relaciones e influencias recíprocas que la matemática ha establecido con otros campos de conocimiento, en particular, con las humanidades. Con esto, podemos pensar en un quinto uso de la historia:

- Incluir situaciones extramatemáticas que sirvieron de emergentes de nuevos conocimientos matemáticos o que son aplicaciones centrales de ellos.

A partir de lo desarrollado, organizamos los usos de la historia en dos grandes grupos: *usos ilustrativos* y *usos significativos* de la historia en la enseñanza. Los usos ilustrativos de la historia de la matemática son aquellos en los que esta aparece como complementaria o accesoria en el desarrollo del tema y pretende, principalmente, funcionar como motivante para el estudiante. Podría suprimirse sin que la actividad se viera modificada sustantivamente en cuanto a lo matemático. Estos usos hacen más atractiva, más convocante, a la actividad y aportan información nueva que vincula al contenido con elementos de su historia. Pero estos usos reciben críticas: entre ellas, riesgo de reducir la historia de la matemática a anécdotas y favorecer la idea de que los conocimientos matemáticos son una especie de milagro o están asociados a personajes endiosados (Nápoles Valdés, 2009). Los tres primeros usos de los cinco mencionados entran en esta categoría.

Los usos significativos de la historia de la matemática son aquellos en los que su inclusión transforma el tratamiento del contenido y, en alguna medida, es medular y constitutiva del contenido. El cuarto de los cinco usos detallados, el método genético, es un ejemplo; el último de los cinco, el de las aplicaciones, es otro. Eventualmente, el tercero podría tener una elaboración tal que corresponda a este uso. Para Nápoles Valdés, este tipo de usos tiene como ventajas favorecer el flujo entre la ciencia y la cultura, apreciar el arte de los procesos de creación matemática, mostrar la interdependencia de las diferentes partes de la matemática, humanizar la enseñanza de la matemática, etcétera (Nápoles Valdés, 2009).

En cuanto al uso del método genético pensamos que la elaboración de actividades que permitan recrear el proceso de creación y evolución de una noción de un modo más o menos completo, requiere de un trabajo de elaboración didáctico-matemático muy profundo. Aceptamos, entonces, que en la aplicación del método genético se hagan ciertos recortes y simplificaciones del proceso histórico. Esto es explicitado, por ejemplo, en la propuesta didáctica que realizan Abrate y Pochulu (2007) para el abordaje de los logaritmos.

Entre las muchas producciones que pueden tomarse para diseñar actividades acordes con el método genético –elaboración docente mediante– podemos mencionar a Galán Atienza (2012), que realiza una propuesta para abordar el tema de cambios de unidades. Para ello describe varias ideas y da algunos elementos históricos, aunque no se presentan ejemplos de consignas para su bajada al aula. Entendemos que las ideas presentadas son fértiles para diseñar actividades para el aprendizaje que se enmarquen en el método genético. Otro ejemplo: hay un trabajo de González Urbaneja (2008) que da ideas para la elaboración de actividades acerca de la irracionalidad de ciertos radicales. Y uno más, de Palenzuela Rodríguez (2017), quien describe varias situaciones: las notas musicales y su vínculo con la suma de fracciones, las producciones de Euclides vinculadas a los números primos, la anécdota de Gauss en la escuela y su relación con las sucesiones aritméticas, etcétera. En todos los casos, con menor labor, pueden diseñarse actividades para un uso ilustrativo de la historia. En la tabla 1 se muestra un resumen.

Tabla 1. Tipos y caracterizaciones de los usos de la historia

Tipos	Caracterización
Usos ilustrativos de la historia en la enseñanza	Proponer una introducción histórica del tema.
	Incluir resúmenes, notas históricas, referencias a los matemáticos o corrientes matemáticas asociados a la noción trabajada, durante su desarrollo.
	Analizar un problema, vinculado a alguna noción, y ver cómo fue resuelto en el momento histórico correspondiente.
Usos significativos de la historia en la enseñanza	Hacer recorrer (en forma adaptada) al estudiante el proceso histórico de la noción.
	Trabajar aplicaciones centrales de la noción en otras disciplinas.

En lo que resta del capítulo desarrollamos algunas propuestas para el uso de la historia en la clase de matemática del nivel secundario. Los logaritmos son un tema fértil para nuestro fin y los tomaremos para ejemplificar los distintos usos.

En el nivel medio, los logaritmos tienen uno de estos dos tratamientos: un enfoque funcional, a partir de la necesidad de darle entidad a la función inversa de la exponencial, previamente trabajada; o un enfoque numérico. La presentación de los logaritmos a partir de lo numérico puede ser muy rica si se conoce cómo surgieron en la historia de la matemática. A grandes rasgos, los logaritmos surgieron con el fin de simplificar la realización de multiplicaciones y divisiones a partir de una transformación conveniente en sumas y restas (Abrate y Pochulu, 2007). Sin embargo, suele verse partir de la definición de logaritmo, aplicarla en la resolución de cálculos y dar las propiedades con ejercitación de aplicación. De esta forma quedan ocultas las situaciones que dieron origen a los logaritmos.

Ejemplos de actividades

A continuación, presentamos ejemplos de actividades sobre logaritmos con distintos usos de la historia. Las actividades están redactadas de un modo genérico, más bien para que el docente entienda su idea. Su transformación efectiva en actividades para el aprendizaje requiere una reformulación para su adaptación a las intencionalidades del docente.

La primera actividad es un ejemplo de uso ilustrativo de la historia. Conocido ya qué es un logaritmo, se propone trabajar específicamente con los logaritmos decimales, añadiendo apostillas de su creación.

Actividad 1

	Reseña histórica: Briggs, Neper y los logaritmos
Los logaritmos en base 10 se llaman decimales y se los simboliza sin indicar la base. Por ejemplo, cuando escribimos *log* 37, queremos decir 37.	Los nuevos logaritmos de Neper implicaban una simplificación en los cálculos. Briggs, profesor de geometría en Londres, pensó que debía reunirse con Neper y mejorar aún más esa idea. Ambos se reunieron dos veces en los veranos de 1615 y 1616.
a) Leer la reseña histórica que acompaña la actividad. b) Calcular sin usar calculadora: 1) *log* 1000 2) *log* (10^7) 3) *log* (10^(-6)) 4) *log* 0,00001	En el primer encuentro, pasaron casi un cuarto de hora observándose el uno al otro con admiración, hasta que una palabra fue dicha. Al fin, Briggs empezó: "he emprendido este largo viaje a propósito para ver a su persona y saber por qué método de ingenio o inventiva llegó a pensar en la más excelente ayuda para la astronomía, o sea, los logaritmos. Pero mi Lord, habiendo sido descubiertos por usted, me pregunto si nadie más los encontró antes cuando siendo conocidos ahora, son tan fáciles".
c) Considerando *log* 4500, 1) Sin usar calculadora, decir entre qué dos enteros consecutivos se encuentra. 2) Usando calculadora, dar una aproximación con dos cifras decimales. d) Usando propiedades de los logaritmos, calcular: 1) *log* 20 + *log* 50. 2) *log* 200 - *log* 20.	Ambos personajes llegaron a la conclusión que la reformulación de los logaritmos era una buena idea y Briggs fue el encargado de llevarla a cabo. Así, en 1617 publicó una obra en que vieron la luz los logaritmos decimales de los números naturales entre el 1 y el 1 000 con 14 cifras decimales. En 1624, Briggs completó su trabajo dando los logaritmos decimales del 1 al 20 000 y del 90 001 al 100 000, también con 14 cifras decimales. Además, hubo algunas ediciones de sus tablas que incluyeron un apéndice con los logaritmos del 100 001 al 101 000. Los logaritmos pasaron a ser para él una obsesión y, en 1625, llegó a contactar con Kepler para discutir con él sobre el uso de los logaritmos en la astronomía.
	(Adaptado de "El impacto de la invención de los logaritmos en el siglo XVII", de Carlos Dorce Polo).

La siguiente actividad puede pensarse como la resolución de un problema en un momento de la historia. El problema es una de las preguntas principales que podemos hacernos: ¿cómo se calcula el logaritmo de un número cualquiera? Actualmente, tenemos el problema resuelto por la existencia de las calculadoras científicas, pero ¿si vamos atrás en el tiempo? La actividad propone el trabajo con tablas de logaritmos, ampliamente difundidas en la escolaridad secundaria y el nivel superior hasta algunas décadas atrás. En este caso, consideramos que es un uso significativo de la historia ya que atiende a cómo fue resuelto el problema en un cierto momento histórico. Por su centralidad en el recorrido histórico de la noción, también podemos enmarcar la situación en el método genético.

Actividad 2

Imaginemos por un rato que estamos en el secundario en una clase de matemática en 1980 (o antes aún). En ese entonces, las calculadoras no estaban difundidas en forma amplia y menos aún las científicas. Muy pocos estudiantes disponían de este recurso. En este contexto, imaginemos que nos asignaron resolver la ecuación:

$$0{,}2^x = 2153$$

Entonces, realizamos los siguientes pasos:

$$0{,}2^x = 2153$$

$$\mathit{log}\,(0{,}2^x) = \mathit{log}\,2153$$

$$x\,.\mathit{log}\,0{,}2 = \mathit{log}\,2153$$

$$x = \frac{(\mathit{log}\,2153\,)}{(\mathit{log}\,0{,}2)}$$

Hasta acá logramos "despejar x", pero ¿cómo calculamos *log* 2153? ¿Y *log* 0,2? Para calcular logaritmos cuando no se disponía de recursos tecnológicos que lo hicieran, se usaban unas extensas tablas, llamadas tablas de logaritmos. Usaremos aquí la tabla de logaritmos a cinco decimales de Hoüel (1989). Es importante precisar que la tabla nos dará resultados aproximados. En esta tabla se toman en cuenta solo hasta las cuatro primeras cifras del número (esto significa que, por ejemplo, obtendremos la misma aproximación si calculamos el logaritmo de 56928 y de 56924).

Sabemos que los logaritmos decimales de números mayores que 1 dan positivos y que los logaritmos de los números que están entre 0 y 1 dan negativos. Por esto, hay un procedimiento para los primeros y otro procedimiento para los otros. Veamos el primero de los casos: números mayores que 1. Para calcular *log* 2153, seguimos este procedimiento:

Tomamos el número 2153. Contamos cuántas cifras significativas tiene el número que está a la izquierda de la coma y, luego, restamos 1. Resulta: 4 - 1 = 3. Al valor obtenido lo llamamos *característica del logaritmo*.

Ahora buscamos lo que llamamos *mantisa*, que será la parte decimal del logaritmo buscado. Esto se hace usando la tabla siguiente (mostramos la imagen de una parte de la tabla).

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes Proporcionales								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes Proporcionales								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tomamos las dos primeras cifras significativas del número (21), buscamos en la tabla la fila 21 y, luego, moviéndonos en ella, vamos a la columna correspondiente a la tercera cifra (5) y registramos el valor: 3324. Continuamos deslizándonos por la fila 21, buscamos la cuarta cifra (3) en las columnas de la parte proporcional y registramos el valor: 6. Así, el resultado es:

$$0{,}3324 + 0{,}0006 = 0{,}3330.$$

El logaritmo buscado se obtiene sumando la característica y la mantisa:

$$\textit{log}\ 2153 \approx 3 + 0{,}3330 = 3{,}3330$$

(usando los recursos de la actualidad, una calculadora arroja: 3,333044…).

Algunas consignas antes de avanzar:

a. ¿Cuánto vale la mantisa de 21530000? ¿Y de 21530? ¿Y de 2153683? ¿Y de 21,53748?
b. Calcular los logaritmos de cada uno de los números indicados en (a).
c. ¿Qué puede conjeturarse de lo respondido en (a)? Explicarlo usando la noción de mantisa y también usando las propiedades que conocemos del logaritmo.

Veamos ahora el caso de logaritmos de números que están entre 0 y 1, que sabemos que son negativos. Consideremos un número vinculado al ejemplo anterior. Calculemos *log* 0,2153. Observemos que:

$$0{,}2153 = \frac{2{,}153}{10} = \frac{10^{0{,}3330}}{10} = 10^{0{,}3330-1} = 10^{-0{,}6670}$$

Lo realizado tiene alcance general (obviamente, no lo estamos probando). Por lo tanto, la mantisa de un número entre 0 y 1 se calcula restando 1 al valor obtenido en la tabla; en este caso: 0,3330 - 1 = -0,6670.

La característica, en estos casos, se obtiene contando los ceros después de la coma hasta la primera cifra significativa: no hay ningún 0; entonces: 0. Luego: *log* 0,2153 ≈ 0 - 0,6670 = -0,6670.

Veamos otro ejemplo, el del logaritmo que aparece en la ecuación inicial: *log* 0,2.Tomamos el número 0,2.

Característica: no hay ningún 0 hasta la primera cifra significativa; entonces: 0.

Mantisa: completamos 0,2 con ceros hasta tres cifras significativas para buscarlo en la tabla: 200.

Buscamos en la tabla: 200.

Obtenemos: 3010.

Entonces: 0,3010 - 1 = -0,6990.

Entonces: *log* 0,2 ≈ -0,6990

(en la calculadora: -0,698970…).

Para finalizar, podemos dar una aproximación del valor de x de la ecuación inicial:

$$x = \frac{\textit{log}\ 2153}{\textit{log}\ 0{,}2} \approx \frac{3{,}3330}{-0{,}6990} \approx -4{,}768$$

d. Calcular, en forma aproximada, los siguientes logaritmos usando las tablas:

1) 84781
2) 84786
3) 3,12
4) 0,123

En (a) y (b) vemos que los logaritmos de esos números (en rigor, las aproximaciones que nos da la tabla) tienen la misma mantisa y difieren en su característica. Por lo tanto, podemos conjeturar en (c) que dos números mayores que 1, que tienen las mismas primeras cuatro cifras significativas, tienen logaritmos (de tabla) con igual mantisa.

La igualdad de las mantisas se da porque todos ellos tienen las mismas primeras cuatro cifras significativas, por lo que debemos buscar en la tabla los mismos valores.

Lo mencionado no es válido para los valores exactos del logaritmo. Pero sí tiene alcance para el caso de los números a y $10^n.a$. En términos de las propiedades de los logaritmos, vale que $log\,(10^n.a) = log(10^n) + log\,a = n \,.\, log\,10 + log\,a = n + log\,a$, siendo n natural y a un real mayor que 1. Llegamos entonces a que $log\,(10^n.a)$ y $log\,a$ difieren en n. Como n es natural, tienen la misma mantisa.

Todas las actividades que siguen corresponden a usos significativos de la historia. En particular, la actividad 3 propone trabajar la noción de logaritmo recreando el interés que la originó.

Actividad 3

1) Resolver el cálculo 65536 . 4096 bajo los siguientes supuestos:
- No disponemos de calculadoras.
- No recordamos el algoritmo de la multiplicación usual, el que aprendimos en la escuela primaria.

Para ello, diseñar en Excel una tabla de doble entrada que muestre los resultados de 2^n, 3^n, 4^n, 5^n y 6^n para valores naturales de n hasta 20. Ver que los números del cálculo propuesto aparezcan en la tabla.

2) Siguiendo la misma idea que en 1), calcular:
a) 1024 . 16384
b) 10077696 : 1296
c) 16777216 : 256

En (1), podemos ver en la tabla que $65536 = 4^8$ y que $4096 = 4^6$.

Entonces $4^8 \,.\, 4^6 = 4^{14}$, que en la tabla vemos que es $4^{14} = 268435456$.

En (2.a), $1024 \,.\, 16384 = 2^{10} \,.\, 4^7 = 2^{10} \,.\, (2^2)^7 = 2^{10} \,.\, 2^{14} = 2^{22} = 16777216$.

En (2.b), $10077696 \; : 1296 = 6^9 : 6^4 = 6^5 = 7776$.

En (2.c), $16777216 \; : 256 = 4^{12} : 2^8 = (2^2)^{12} : 2^8 = 2^{24} : 2^8 = 2^{16} = 65536$.

Para resolver estos cálculos usando la tabla de potencias, resulta necesario localizar la fila en la que se encuentran las potencias dadas y la resultante. Esto justifica darle entidad al número de fila, que es el *logaritmo*. Por ejemplo, como a 65536 se lo encuentra en la columna de las potencias de 4 y en la fila 8, decimos que 65536 = 8.

Esta actividad habilita otros avances con las propiedades de las potencias. Abrate y Pochulu (2007) muestran un cuidado desarrollo con vistas a trabajar con los logaritmos desde un enfoque numérico, atendiendo a su surgimiento.

La actividad 4 pretende recrear parte del proceso de la construcción de tablas de logaritmos.

Actividad 4

Henry Briggs fue un religioso y matemático inglés que vivió entre 1561 y 1630 y enseñaba geometría en la universidad de Oxford. En un momento se reunió en Edimburgo (Escocia) con John Neper, otro matemático de la época y que también venía trabajando con los logaritmos. En ese encuentro acordaron que el logaritmo de 1 debía valer 0 y que el de 10 debía valer 1. Así nacieron los que hoy llamamos logaritmos decimales, y la tarea fue, entonces, construir tablas de logaritmos en base 10. Una aproximación de Briggs para este tema fue la siguiente:

a. Completar la siguiente tabla, expresando los valores de la columna B en forma aproximada con cuatro cifras decimales.

	A	B	
Sucesión aritmética de razón $\frac{-1}{8}$	1	10	Sucesión geométrica de razón $10^{-1/8}$

b. ¿Cómo se interpretan los logaritmos decimales en esta tabla?

c. Si se suman dos elementos de la columna A, tales que su resultado se encuentre en ella, ¿qué relación tienen con los correspondientes elementos de la columna B? Y en términos de logaritmos, ¿qué relación tienen?

d. Construir una tabla análoga de modo de poder calcular el logaritmo decimal de $\frac{a}{13}$, con a natural de 0 a 13.

Entre las aplicaciones que podemos considerar centrales de los logaritmos, está el interés compuesto. La actividad 5 propone trabajar una situación sobre este tipo de interés, lo que la encuadra en un uso significativo de la historia.

Actividad 5

Juan depositó \$ 18000 a plazo fijo en un banco que le ofrecía una tasa mensual de 3%. Renovó la inversión una cierta cantidad de veces –sin retirar nada–, hasta obtener un total de \$ 24916. ¿Cuántos meses duró la inversión?

El *interés compuesto* es una aplicación del crecimiento exponencial ya que el monto y el tiempo se relacionan a través de la fórmula $M = C \,.\, (1+i)^n$, donde M es el monto, C es el capital, n es la cantidad de períodos de la inversión e i es la tasa expresada en la misma unidad que el tiempo. Así, cuando la incógnita es la duración de la inversión, se requiere de los logaritmos: $n = -1 + \log\left(\frac{M}{C}\right)$. El conocimiento de la fórmula de interés compuesto puede ser previo o puede verse en el contexto de la actividad.

Otra de las aplicaciones de los logaritmos, de las principales en otros campos disciplinares, es la noción de *potencial de hidrógeno*, más conocido por su abreviatura: pH. En la actividad siguiente se trabaja sobre ella.

Actividad 6

En experimentos de electrólisis, se descubrió que las soluciones acuosas estaban formadas por iones hidrógeno H^+ e iones hidroxilo OH^- y que el agua pura tiene el mismo número de ambos iones (a este tipo de soluciones se las llamó neutras).

Las soluciones neutras tienen una concentración de iones hidrógeno de 10^{-7} moles / litro. A las que tienen una concentración mayor de iones hidrógeno que ese valor se las llama *ácidas* y, a las que tienen una concentración menor, *básicas* o *alcalinas*.

a) Clasificar a las siguientes sustancias en ácidas o alcalinas, a partir de la información de su concentración de iones hidrógeno.

Amoníaco: $10^{-11,9}$
Leche: $10^{-6,4}$
Jugo de limón: $10^{-2,4}$
Leche de magnesia: $10^{-10,5}$

b) Las siguientes sustancias son ácidas. Ordenarlas de menor a mayor acidez a partir de la información dada y sabiendo que cuanto más lejos está de ser una solución neutra, mayor es su acidez.

Café: 10^{-5}
Cerveza: $10^{-4,5}$
Jugo gástrico: $10^{-1,5}$

c) Las siguientes sustancias son alcalinas. Ordenarlas de menor a mayor alcalinidad a partir de la información dada y sabiendo que cuanto más lejos está de ser una solución neutra, mayor es su alcalinidad.

Solución de detergente: 10^{-10}
Hipoclorito de sodio: $10^{-12,5}$
Agua de mar: 10^{-8}

d) Considerar dos sustancias tales que una es diez veces más ácida que la otra. Dar un ejemplo de los valores de la concentración de iones hidrógeno que cumplan esa condición.

e) Ídem d) para dos sustancias alcalinas.

f) Analizar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

- A medida que aumenta la concentración de iones hidrógeno de una sustancia, esta es más ácida.
- Dos sustancias tienen una concentración de iones hidrógeno de 10^a y 10^b, respectivamente. Si $a > b$, la primera sustancia es más ácida que la segunda.

Puede pensarse que es más práctico evitar el uso de números expresados en notación exponencial. Por ejemplo, para 10^{-7}, sería mejor usar -7 o mejor aún usar 7; para 10^{-9}, usar -9 o mejor 9. Esto hace pensar en los logaritmos:

$log\ (10^{-7}) = -7$; entonces $-log\ (10^{-7}) = 7$
$log\ (10^{-9}) = -9$; entonces $-log\ (10^{-9}) = 9$

Así, en 1909, el químico danés Sorensen definió el *potencial de hidrógeno* (abreviado pH) como el opuesto del logaritmo de la concentración molar de los iones hidrógeno:

pH = *-log* (H^+)

g) La concentración de iones hidrógeno en la sangre toma valores que pueden ir de $10^{-7,45}$ a $10^{-7,35}$. Si se alejara de ese rango, estarían comprometidas funciones vitales de la persona. Entonces, ¿entre qué valores se espera que varíe el pH de la sangre?

h) ¿Podría ser negativo el pH de una sustancia?

i) Una sustancia es cien veces más ácida que otra. ¿En cuánto difieren sus pH?

j) Ídem (i) para el caso de sustancias alcalinas.

A modo de cierre

La bibliografía especializada reconoce la importancia de la inclusión de la historia de la matemática en la enseñanza, aunque los usos que mayormente se mencionan son los que aquí hemos llamado ilustrativos. Si bien hemos reconocido cierto valor en ellos, limitarse a estos usos no enriquece sustancialmente nuestras propuestas de enseñanza. En cambio, los usos significativos de la historia permiten comprender –en alguna medida– cómo se construyeron y qué dificultades hubo en la evolución de ciertos objetos matemáticos y, por lo tanto, dan elementos para otorgarle sentido.

A lo largo del capítulo se brindan elementos para que quien enseña matemática pueda cuestionarse acerca del uso de la historia en la enseñanza y pueda discernir entre usos ilustrativos y significativos. También, con las actividades presentadas, le brindamos al docente un material para que lo transforme en actividades de enseñanza, le dé pistas para diseñar nuevas actividades y, además, le aporte una visión más amplia de evolución de las nociones matemáticas, en nuestro caso, los logaritmos.

Referencias bibliográficas

Abrate, R. y Pochulu, M. (2007). Ideas para la clase de logaritmos. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 10,* 77-94.

Diseño curricular jurisdiccional para la formación docente del profesorado de educación superior en matemática (2014). buenosaires.gob.ar/sites/gcaba/files/res_3931_fd_matematica_5.pdf.

Diseño curricular jurisdiccional del profesorado de educación secundaria en matemática (2017). instituto20.com.ar/archivos/Profesorado%20de%20Educacion%20Secundaria%20en%20Matematica.pdf.

Dorce Polo, C. (2014). El impacto de la invención de los logaritmos en el siglo XVII. *Suma. Revista para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, 76*, 17-25.

Galán Atienza, B. (2012). *La Historia de las Matemáticas. De dónde vienen y hacia dónde se dirigen*. repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/1764/Gal%C3%A1n%20Atienza%2C%20Benjam%C3%ADn.pdf?sequence=1.

González Urbaneja, P. (2004). La Historia de las Matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente la enseñanza. *Suma. Revista para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, 45,* 17-28.

González Urbaneja, P. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. *Sigma: revista de matemáticas, 33,* 101-129.

Hoüel, J. (1989). *Tablas de Logaritmos a Cinco Decimales*. El Ateneo.

Maza Gómez, C. (1994) Historia de las Matemáticas y su enseñanza: un análisis. *Suma. Revista para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, 17*, 17-26.

Nápoles Valdés, J. (2003). La resolución de problemas en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Un enfoque histórico. *Revista Educación y Pedagogía, 15*(35), 163-181.

Nápoles Valdés, J. (2009). *Elementos para una historia de las matemáticas griegas*. edutecne.utn.edu.ar/napoles-valdes/hist_matem_griega.pdf.

Nápoles Valdés, J. (2015). La Historia de la Matemática y el futuro de la Educación Matemática. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Comps.), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 249-268). Eduvim y Ediciones UNGS.

Palenzuela Rodríguez, H. (2017) *¿Por qué incluir la historia de las matemáticas en el aula?* repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/6028/14375_Helena%20Palenzuela%20Rodr%C3%ADguez%20%281%29.pdf?sequence=1&isAllowed=y.

Protti, O. (2003). La historia de las matemáticas como instrumento pedagógico. *Uniciencia, 20*(2), 251-257.