5. Análisis de una tarea matemática desde la resolución de problemas mediada por la tecnología

*Patricia Barreiro, Paula Leonian y Claudia Zuliani**

Introducción

En este capítulo presentamos, inicialmente, una tarea que consideramos coherente, en los términos desarrollados por Rodríguez (2017). Asimismo, entendemos que permite que los estudiantes realicen una actividad matemática valiosa, con las consideraciones respecto de la modalidad de trabajo que se indican en el contexto y el objetivo que persigue, que entendemos resulta cognitivamente exigente.

A continuación, desarrollamos posibles resoluciones de la situación, en papel y lápiz primero y con uso de TIC en un segundo momento. Esto nos da elementos para fundamentar la significatividad del uso de TIC, basados en la riqueza matemática que surge de los posibles abordajes desplegados para, finalmente, hacer un análisis de las resoluciones con elementos teóricos de la línea de resolución de problemas o escuela anglosajona.

* *P. Barreiro*: Instituto de Educación Superior Nº 813 "Profesor Pablo Luppi", Argentina.
P. Leonian: Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina.
C. Zuliani: Instituto de Educación Superior Nº 813 "Profesor Pablo Luppi", Argentina.

Presentación de la tarea

Contexto: Los estudiantes han trabajado con ecuaciones lineales, tanto herramientas para la resolución de situaciones en contexto extramatemático como en su desarrollo intramatemático. Conocen las funciones lineales a partir de sus distintos registros. Identifican cuál es la pendiente y la ordenada al origen, y saben cómo influyen estos parámetros en su gráfico. Recurren al trabajo algebraico para establecer relaciones y determinar intersecciones en el plano. El trabajo en el aula se desarrolla usualmente tanto de manera individual como grupal, se utilizan softwares específicos y se promueve la argumentación de cada respuesta. Esta actividad está pensada para llevarse a cabo en el nivel medio de escolaridad, momento en el que se trabajan todos los contenidos anteriormente seleccionados. Para el desarrollo de la actividad se propone la modalidad individual de trabajo.

Objetivo: Que los estudiantes exploren, elaboren conjeturas y justifiquen sus afirmaciones en un contexto funcional.

Consigna:[2] Considerar la familia de funciones lineales cuya pendiente y ordenada al origen son números enteros consecutivos. Proponer características que podrían compartir los gráficos de esta familia y justificar las respuestas.

Resolución de la consigna sin uso de herramientas informáticas

Frente a esta consigna, uno podría plantearse distintas resoluciones hechas con *lápiz y papel* a través de un planteo algebraico. Dada la ecuación de una recta escrita en forma explícita, una opción sería pensar que la ordenada al origen es un número consecutivo al que representa la pendiente, obteniendo la expresión:

$$f(x) = y = ax + (a + 1), a \in Z \quad (1)$$

Operando algebraicamente, podemos obtener:

$$y = a(x + 1) + 1, a \in Z \quad (2)$$

[2] Esta consigna fue pensada a partir del trabajo final realizado por la estudiante Juliana Botta en 2015, de la materia Enseñanza de la Matemática I de la Universidad Nacional de General Sarmiento.

En esta manera de expresar la ecuación de una recta en el plano, se podría leer que todas las rectas de la familia pasan por el punto (–1; 1), independientemente del valor que tome el parámetro $a \in Z$.

Sin embargo, otra opción en la resolución de esta consigna podría ser no disponer de ese conocimiento y decidir trabajar con casos particulares de la familia de funciones dada. Por ejemplo, el estudiante puede recurrir a realizar algunos gráficos que permitan inferir la misma condición. En este último caso, sería necesario validar dicha afirmación, por ejemplo, reemplazando el punto (–1; 1) en cualquiera de las expresiones (1) o (2) anteriormente presentadas.

Cabe aclarar que una posible respuesta de los estudiantes al pensar en la resolución de la consigna es a través de características que ya conocen sobre las funciones lineales, por ejemplo, que "dado $a \in Z$ positivo, las rectas serán crecientes" aunque esta característica no pone en juego la relación particular que esta familia de funciones cumple, entre la pendiente y la ordenada al origen.

Otro planteo posible para la resolución de esta consigna podría surgir a partir de pensar que la pendiente es consecutiva (y mayor) de la ordenada al origen. De allí se desprende que

$$y = (a + 1)x + a \; con \; a \in Z \quad (3)$$

Análogamente, podemos llegar a conclusiones similares, aunque el desarrollo de la expresión (3) no permite una lectura directa acerca de cuál es el lugar del plano en el que se intersecan todas las rectas de esta familia de funciones: el punto (–1; –1).

Teniendo en cuenta el trabajo realizado, llegamos a una instancia en la que nos preguntamos si el desarrollo que llevamos a cabo nos impide o dificulta ver alguna otra regularidad o característica de esta familia de funciones lineales. Hemos respondido la consigna, pero no estamos en condiciones de responder a esta última inquietud.

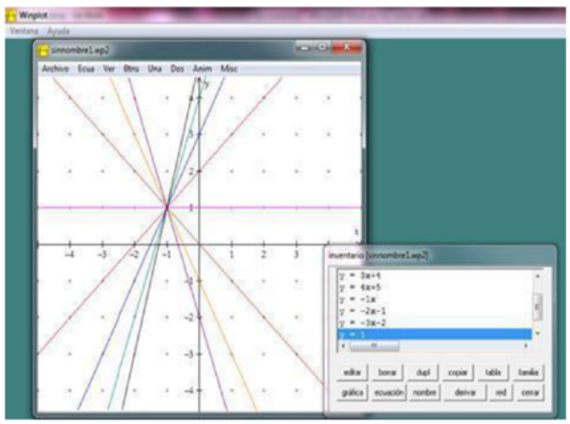
Resolución y análisis de la consigna utilizando TIC

Recurriendo a distintos recursos informáticos, por un lado, podemos seleccionar un software estático[3] (en nuestro ejemplo utilizamos el Winplot) en el cual graficamos varias de las funciones de la familia que cumplan con la condición

[3] A diferencia del software dinámico, este no admite arrastre.

mencionada en la consigna, obteniendo así una imagen como la que se muestra en la figura 1.

Figura 1. Gráficos variados usando Winplot



De la observación de esta figura, estamos en condiciones de realizar las mismas afirmaciones que surgen en el desarrollo hecho con lápiz y papel mencionados en el apartado anterior. La diferencia ahora se centra en que más allá de haber observado una regularidad, se deberá incluir un tipo de validación que no dependa del software utilizado (desarrollo algebraico).

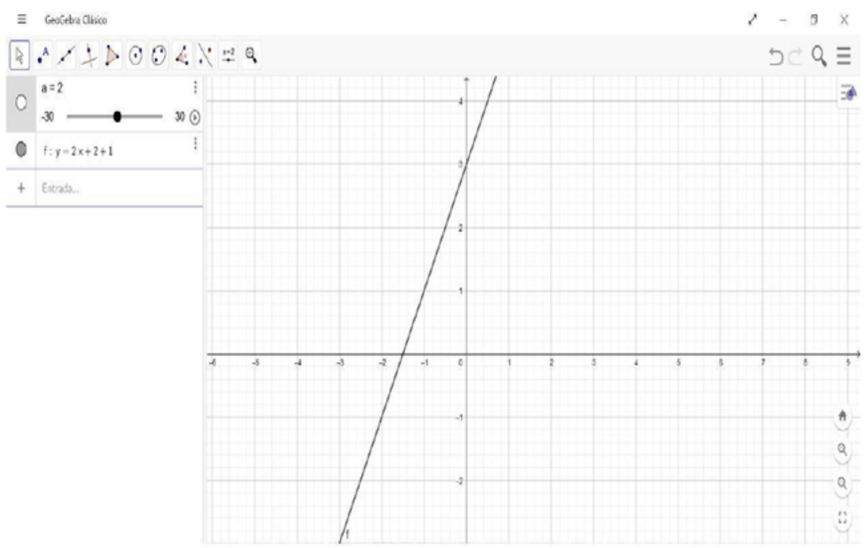
Por lo que hemos mencionado hasta aquí, el desarrollo de la consigna con lápiz y papel, o un software estático, no presenta grandes diferencias en cuanto a la solución o respuestas, aunque, desde el punto de vista didáctico, se utilizaron diferentes registros de representación.

La pregunta que surge ahora es: ¿qué sucede si trabajamos con algún software dinámico? En nuestro caso, utilizaremos el GeoGebra para resolver la situación.

En una primera instancia, podríamos abordar la consigna de la misma manera que el caso anterior, graficando varios casos particulares en el mismo sistema de ejes coordenados. No trabajaremos aquí con esta resolución por ser similar a lo que anteriormente realizamos sin hacer uso de las potencialidades que otorga el programa.

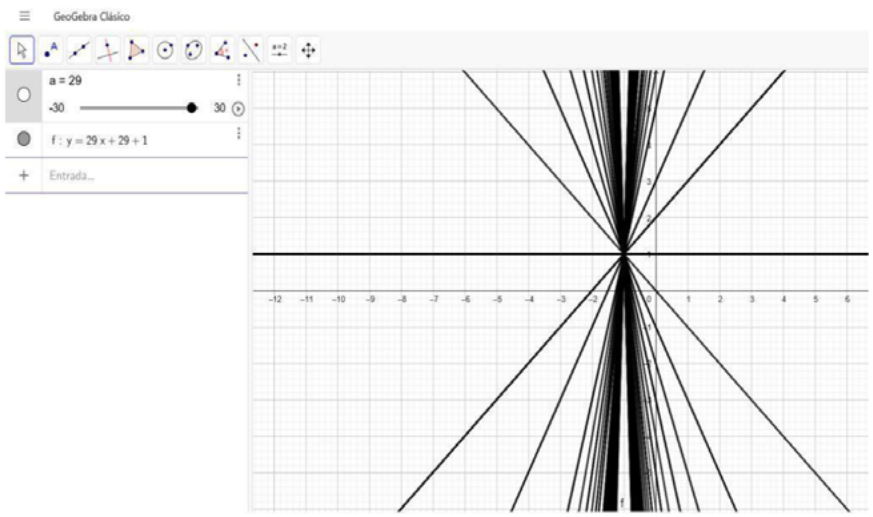
Entonces, podríamos crear un deslizador que nos permita visualizar muchos más casos particulares. Ajustando la configuración de dicho deslizador, tanto en rango como en incremento, obtenemos una variedad mayor de gráficos de funciones como las que estamos buscando, como podemos observar en la figura 2. Así, moviendo el deslizador, plantearíamos la misma conjetura que en los casos anteriores: “todas las rectas pasan por el punto (–1; 1)”.

Figura 2. Gráfica para un valor dado, con deslizador, pero sin activar el rastro



¿Qué nos aporta entonces el uso de este software? En esta nueva mirada a la resolución de la consigna utilizando el software dinámico, nos encontramos con una nueva herramienta que nos invita a preguntarnos otras cosas; usaremos la opción “mostrar rastro”, con ella al mover el deslizador se genera lo que se observa en la figura 3.

Figura 3. Mismo ejemplo anterior con el rastro activado



Esta representación, junto con la utilización de otras herramientas del programa que nos permiten acercar la imagen, nos invita a estudiar algunos aspectos de las raíces de las funciones representadas como, por ejemplo, el intervalo de pertenencia. Podemos conjeturar entonces que "las raíces de dichas funciones pertenecen al intervalo [–2; 0]".

Volviendo al caso en el que la ordenada al origen es un número consecutivo del que representa la pendiente, y mayor que él, con la expresión general

$$y = ax + a + 1 \; con \; a \in Z$$

obtenemos lo siguiente en el análisis de sus raíces:

- Si $a = 0$, $y = 1$, entonces la representación gráfica de la función es una recta paralela al eje x, por lo tanto, no tiene raíces.
- Si $a \neq 0$ $y = ax + a + 1$ ($a \in Z$), entonces

$$0 = ax + a + 1$$

Operando algebraicamente, obtenemos que sus raíces tienen la forma

$$x = -1 - \frac{1}{a} \; (a \in Z - \{0\})$$

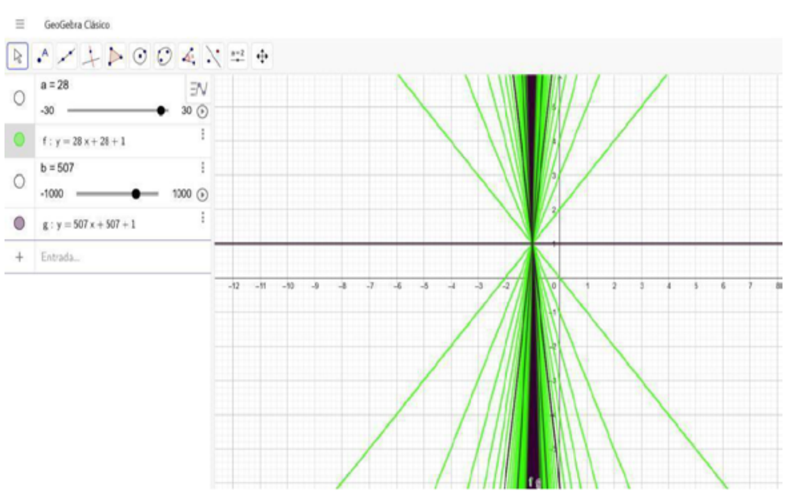
Analizando esta expresión, en las condiciones dadas, podemos afirmar que las raíces de estas funciones son números racionales que pertenecen al intervalo [– 2; 0], toman el valor –2 cuando *a* es igual a 1, el valor 0 cuando *a* es igual a –1, y nunca podrán tomar el valor –1 ya que $-\frac{1}{a}$ debería ser igual a 0 y ello resulta imposible. En la tabla 1 podemos ver el detalle.

Tabla 1. Raíces según posibles valores del parámetro

$x = -1 - \frac{1}{a}$			
$a \leq -1$	$a = -1$	$a = 1$	$a > 1$
$-1 \leq x \leq 0$	$x = 0$	$x = -2$	$-2 \leq x \leq -1$

Una variación a este trabajo podría suceder si la exploración se realiza con otras herramientas que brinda el programa o bien por una elección diferente de parámetros. En el caso de generar dos funciones con las mismas características que las anteriores, pero eligiendo deslizadores en un rango entre –30 y 30 en un caso, y en un rango entre –1000 y 1000 en el otro, activando el rastro en ambos casos y la animación del deslizador, obtendremos un gráfico como el que se muestra en la figura 4.

Figura 4. Rastros para dos rangos diferentes



Seguramente el lector hizo aquí una pausa para realizar la construcción en el GeoGebra y observar la dinámica de estas familias de rectas… ¡esperamos que se haya sorprendido tanto como nosotras!

Esta exploración plantea dos casos en simultáneo, que podrían surgir de propuestas separadas y, eventualmente, habilitar el planteo de conjeturas diferentes. Por un lado, a partir de la construcción en la que el rango del deslizador varía entre –30 y 30, podría conjeturarse que las raíces pertenecen al intervalo [–2; 0]. Por otra parte, desde la otra construcción, la conjetura podría establecer que las raíces pertenecen a un cierto intervalo más reducido que el [–2; 0].

Ahora bien, si se deja correr la animación del rastro en GeoGebra de modo de aumentar considerablemente la cantidad de casos particulares, se advertiría que la última conjetura es falsa. ¿Por qué? Porque se visualizarían las rectas extremas de ese haz que intersecan al eje x una en –2 y otra en 0.

Después del análisis algebraico que detallamos en párrafos anteriores no tenemos dudas de que las limitaciones son del programa, pero ¿cuáles son? Si bien el deslizador está configurado para que su incremento sea de 1 en 1 pasando por todos los números enteros entre –1000 y 1000, la velocidad predeterminada de la animación no permite que quede registro del rastro de todas y cada una de las rectas. Podemos reflexionar entonces, acerca de las potencialidades y las limitaciones del GeoGebra para la tarea propuesta y cómo ellas pueden promover la discusión matemática en el aula.

Tomando como referencia los criterios para el análisis de la pertinencia y significatividad de uso de TIC (Rodríguez, 2017), podemos observar que en la resolución de la consigna no resulta indistinto su uso. En este sentido, hemos visto que el uso del recurso promueve la elaboración de mayor cantidad de conjeturas porque no solo da indicios sobre la posibilidad de encontrar un punto que pertenece a toda una familia de funciones lineales con ciertas características, sino que también nos invita a pensar en condiciones que cumplirán sus raíces. Por otro lado, también nos permite definir y fundamentar nuevas cuestiones. En este sentido, podemos decir que el uso de TIC resulta *imprescindible* (en el sentido explicitado en Rodríguez, 2017). Cabe resaltar que la validación requiere de argumentos que vayan más allá de lo perceptivo que el software muestra. Se requieren argumentos algebraicos.

Por otro lado, podemos observar que el foco de la tarea está puesto en el análisis y resolución de una cuestión matemática, y no en el uso del software dinámico específico, por lo que decimos también que se cumple el criterio de *no perder de vista el objetivo matemático*.

Considerando estos dos aspectos, en el texto mencionado se considera que el uso de TIC es valioso en cuanto a su pertinencia y significatividad. Sin embargo, agregan otros criterios que enriquecen esta valoración. A continuación, detallamos brevemente algunos de ellos.

- Podemos decir que la consigna *favorece la búsqueda de pruebas matemáticas*. Esto se debe a que para justificar las conjeturas planteadas y las razones de por qué es válido lo planteado, se pueden poner en juego distintos recursos algebraicos, entre ellos: elección adecuada de símbolos, interpretación del significado simbólico de "cortar al eje *x*", la necesidad de apelar al álgebra para argumentar sobre un conjunto infinito de casos, etcétera.
- La consigna no indica que la resolución debe incluir uso de TIC, los estudiantes deberán decidir si lo realizan "a mano" o si les es útil usar algún software específico. De esta manera, se cumple el criterio de *libertad para apelar a las TIC*.
- En caso de que el estudiante quiera utilizar TIC para el desarrollo de la consigna, debe decidir qué software emplear. Esto implica que tiene la *posibilidad de elección de qué recurso tecnológico utilizar*.

Por todo lo que mencionamos anteriormente, podemos decir que la tarea incluye un uso pertinente y significativo de TIC.

Análisis de la tarea en términos de la línea didáctica de resolución de problemas

Además de la riqueza que la tarea conlleva en cuanto al uso de TIC, consideramos que la consigna elegida para la tarea podría resultar un *problema*, en términos de la línea teórica de Resolución de Problemas (Pochulu y Rodríguez, 2015), considerando estudiantes que respondan a los conocimientos planteados en el contexto que desarrollamos en la primera página de este capítulo. Esto podemos afirmarlo ya que la consigna no implica un camino obvio de resolución, hay cierta complejidad que va a ser resuelta a partir del desarrollo de estrategias por parte de los estudiantes, lo que implica que cada uno "explore, experimente, analice sus avances, cambie de rumbo, reflexione sobre lo hecho, advierta cómo está pensando y encarando la tarea, etc." (Rodríguez, 2017: 154) y así, se pongan en juego diversas estrategias heurísticas tanto en el momento de entender la consigna como de abordar su resolución. A continuación, mostramos algunas de las heurísticas que se ponen en juego en el desarrollo de la consigna, en función del trabajo que hemos detallado anteriormente.

- *Trabajar hacia adelante*: el estudiante puede construir la expresión $y = ax + (a + 1)$, para $a \in Z$, a partir de los datos que se dan en la consigna. Análogamente con el otro caso, en el que la expresión es $y = (a + 1)$ x $+ a$, para $a \in Z$.
- *Recurrir a casos particulares*: el estudiante puede hacer gráficos de rectas según las condiciones dadas, ya sea a mano o con un software específico, sin pretensión de exhaustividad. Hemos visto que esto sucede en el desarrollo "a mano" (con lápiz y papel), y en el que se utiliza un software específico no dinámico (figura 1). Por otro lado, también podría utilizar un software dinámico, como el GeoGebra, en el que distintas herramientas le permitan la elaboración de conjeturas, como, por ejemplo, el uso de deslizadores (figuras 2 y 3). En este último caso, hemos visto el uso de esta herramienta no solo como una forma de ampliación de la cantidad de casos particulares, sino también como disparador en el análisis de las condiciones de las raíces (ampliación del intervalo para el deslizador).
- *Realizar un análisis sistemático de casos*: al asignarle distintos valores a los parámetros en las expresiones de las familias de funciones dadas, el estudiante puede generalizar conclusiones sobre posibles características de las rectas, por ejemplo, que todas ellas pasan por el punto $(-1; 1)$, o bien que las raíces de las funciones son números racionales, o también podrían concluir que las raíces pertenecen al intervalo $[-2;1) \cup (-1;0]$.
- *Examinar la solución obtenida a través de otra representación*: una vez analizada la situación utilizando el recurso tecnológico, el estudiante podría emplear un desarrollo algebraico para complementar su resolución, de manera tal de validar las conjeturas realizadas en la primera instancia del trabajo. Esto podemos verlo cuando debe analizar la expresión obtenida de la raíz para concluir a qué conjunto numérico pertenece, o bien para decir que *la raíz nunca va a ser* -1 *porque para eso la expresión* $\frac{-1}{a}$ *tendría que valer* 0.

Teniendo en cuenta todo lo analizado, podemos decir que esta consigna puede ser considerada un *problema* en términos de la línea de Resolución de Problemas (Pochulu y Rodríguez, 2015) y que la misma es rica pensando en las heurísticas que habilita para su resolución.

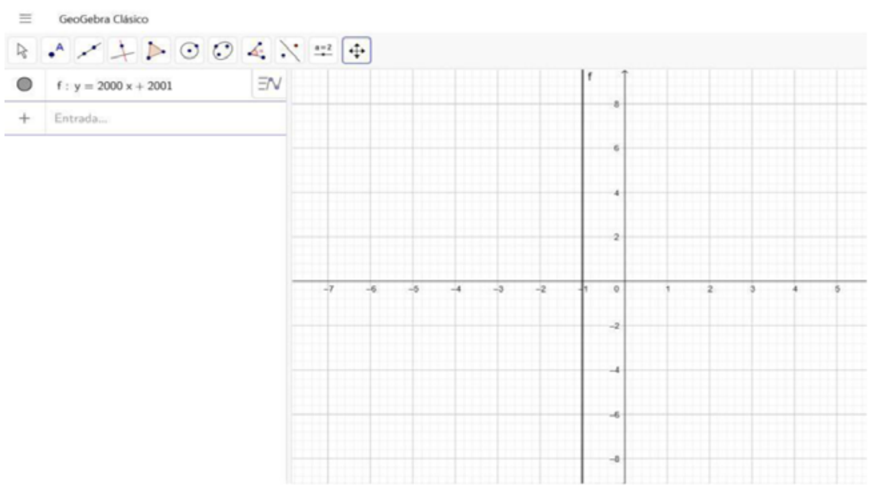
A modo de cierre

Intentamos fundamentar en este capítulo, que una tarea en la que resulta pertinente y significativo el uso de TIC puede analizarse también desde la resolución de problemas como línea didáctica. Así, una propuesta en la que el uso de recursos informáticos facilita elaborar nuevas conjeturas a partir de una exploración dinámica, puede resultar un problema en el que aparezcan distintas heurísticas en el proceso de resolución. En este punto, muchas veces nos preguntamos cómo darle continuidad a este tipo de trabajo en el aula. Intentando responder a ese interrogante, creemos que una alternativa posible, podría ser poniendo en tensión las afirmaciones surgidas a partir de lo que el estudiante observa en la pantalla de su computadora o celular, y su explicación matemática. De esta manera, una propuesta de tarea sería que, a partir del trabajo anterior como contexto, nos propongamos como objetivo que los estudiantes argumenten matemáticamente la validez de afirmaciones que evidencian las limitaciones del recurso. En este marco, les propondríamos como consigna:

> Juan pensó lo siguiente: "Si f(x) = 2000x + 2001, su gráfico es una recta vertical". Decidir si la afirmación de Juan es verdadera o falsa justificando adecuadamente la respuesta.

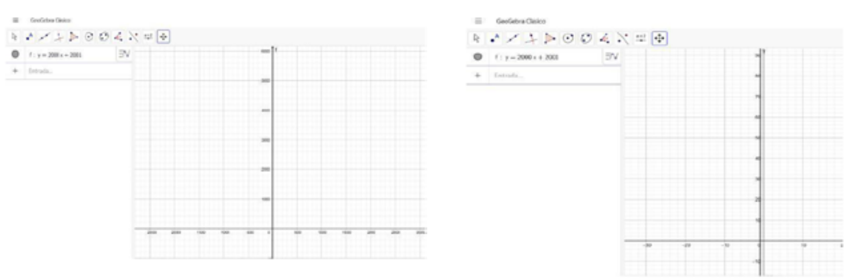
Dejamos a cargo del lector el análisis de la misma en términos de la *pertinencia* y *significatividad* de uso de TIC (Rodríguez, 2017), así como también del concepto de *problema*, según el trabajo de Pochulu y Rodríguez (2015). Solo a modo general, decimos que aquí lo visual impacta fuertemente tanto en la formulación de la conjetura como en una posible validación gráfica, que resulta incorrecta desde lo matemático. Observemos en la figura 5 qué sucede al ingresar en la barra de entrada del programa GeoGebra la fórmula de la función presentada.

Figura 5. Gráfico que muestra el GeoGebra



Si para intentar corroborar o bien refutar la conjetura, intentamos utilizar el zoom, obtenemos gráficos como los que se muestran en la figura 6. Se ve la recta cada vez más próxima al eje *y* en un caso, y hasta parecieran coincidir en otro.

Figura 6. Gráficos que muestran el GeoGebra al aplicar zoom



Creemos indispensable entonces, fomentar la necesidad de argumentar matemáticamente la validez de las afirmaciones que se planteen a partir del desarrollo de la consigna tal como se plantea en el objetivo, con la posibilidad, además, de trabajar las limitaciones del recurso.

De manera similar, y sumando al contexto de la tarea propuesta en este capítulo, otra opción podría estar orientada a profundizar el trabajo algebraico para establecer otras relaciones o nuevos significados. Entonces, con el objetivo de que los estudiantes resignifiquen afirmaciones surgidas de la tarea anterior modificando algunas condiciones, podríamos presentarle la siguiente consigna.

Sea $g:R \rightarrow R$ una familia de funciones lineales cuya pendiente y ordenada al origen son números enteros. Decidir qué condiciones deberían cumplir estos coeficientes para que los gráficos de estas funciones se intersecten en el punto (-1;2).

Como en el caso anterior, el análisis de la consigna queda a cargo del lector pues nuestra intención es dejar planteada la inquietud de cómo a partir de una propuesta pueden abrirse distintos caminos: uno orientado a poner énfasis en la validación y la argumentación en matemática con las potencialidades y limitaciones que nos ofrecen las TIC, y otro encaminado al estudio de otras regularidades que profundicen el trabajo algebraico a partir de la función lineal.

Referencias bibliográficas

Marino, T. y Rodríguez, M. (2009). Un estudio exploratorio sobre heurísticas en estudiantes de un curso de matemática de nivel pre-universitario. *Paradigma, 30(2)*, 159-178. http://revistas.upel.edu.ve/index.php/paradigma/article/viewFile/2019/884.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (Comps.) (2015). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Ediciones UNGS y EDUVIM.

Rodríguez, M. (Coord.) (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en Educación Matemática.* Ediciones UNGS.