6. Análisis ontosemiótico de la resolución de un problema geométrico

*María Laura Distéfano y Mario Álvarez**

Introducción

Las generaciones a las que pertenecen nuestros actuales estudiantes son nativas digitales, por lo que resulta casi imprescindible incorporar la tecnología a la actividad que se desarrolla en el aula, y en particular, en el aula de matemática. Esto nos conduce a un desafío como docentes, pues debemos repensar nuestra práctica, readaptando nuestras clases, definiendo estrategias y reflexionando sobre cuál es la manera más beneficiosa o más productiva de integrar la tecnología en cada caso.

Por otra parte, la tecnología se va tornando cada vez más accesible. Los estudiantes tienen a su alcance dispositivos e insumos ligados a ella, tales como computadoras, teléfonos móviles, conexión a internet en las instituciones educativas, software libre y aplicaciones de descarga gratuita.

El desafío que se nos plantea como docentes es rediseñar nuestras clases incorporando la tecnología, pero no como un complemento a lo mismo que ya hacíamos. El propósito es lograr formular problemas que nos permitan explotar

* *M. L. Distéfano*: Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina.
M. Álvarez: Universidad Tecnológica Nacional, Argentina.

en el aula el potencial de estos recursos tecnológicos, de modo que nuestras clases estén más focalizadas en analizar, interpretar, conjeturar y argumentar que en resolver actividades mecánicas o vacías de reflexión.

En este capítulo proponemos un problema geométrico referido a cuadriláteros, cuyo enunciado es lo suficientemente amplio como para que el estudiante decida con qué herramienta tecnológica trabajar y lo lleve a buscar estrategias de construcción, realizar observaciones, discutir posibilidades, formular preguntas, exponer conjeturas, y arribar a la necesidad de una demostración.

Presentamos una posible resolución, que es analizada con herramientas del enfoque ontológico y semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), desarrollado por los doctores Juan Godino, Carmen Batanero y Vicenç Font (2008, 2019). El EOS es un enfoque teórico de la educación matemática que provee no solo constructos teóricos, sino también metodológicos y permite abordar aspectos que hacen al diseño, desarrollo y evaluación de las trayectorias didácticas.

Presentación de la tarea

Contexto: La tarea propuesta está pensada para ser trabajada con estudiantes de primeros años de profesorados de matemática, pero también podrían ser de nivel medio. Para el momento de implementación de esta tarea se supone que los estudiantes conocen la clasificación y propiedades generales de triángulos y cuadriláteros, figuras semejantes, criterios de congruencia y simetría. Están familiarizados con representaciones gráficas de figuras y construcciones dinámicas a través del uso de algún software. Esta tarea se inserta en una fase de consolidación sobre el estudio de las propiedades de estas figuras. El docente espera que los estudiantes puedan formular conjeturas y reconocer la necesidad de validar formalmente lo que el software sugiera como patrones. La propuesta consiste en trabajar en grupos para intercambiar opiniones y criterios. La mediación del docente debería darse en intervenciones esporádicas que sirvan para guiar, ajustar o recuperar el trabajo que los estudiantes van haciendo.

Objetivo: Que el estudiante conjeture y valide propiedades de cuadriláteros.

Consigna: Sea ABCD un cuadrilátero cualquiera y EFGH el cuadrilátero que resulta de unir de manera continua los puntos medios de cada lado. Analizar y fundamentar las características del cuadrilátero EFGH que se pueden anticipar si conocemos las del ABCD.

La resolución

La forma de resolución del problema planteado no es única. Se presenta aquí una posible, y es la que se utilizará para hacer los análisis ontológicos y semióticos. Algunas de las conjeturas a las que se arriba en la resolución constituyen el denominado teorema de Varignon.

El enunciado no especifica característica alguna del cuadrilátero ABCD, por lo que podría suponerse, *a priori*, que para la resolución se necesitará generar numerosas figuras para contemplar distintos casos que permitan inferir alguna conjetura. Este requerimiento puede inducir la idea de utilizar algún dispositivo tecnológico, pues realizar numerosas figuras –con una aceptable precisión en su construcción para que las observaciones sean plausibles– sería muy trabajoso de realizar en papel mediante el uso de instrumentos de geometría, como regla, escuadra, compás, transportador, etcétera. Esto pone en evidencia la necesidad de utilizar algún tipo de graficador. GeoGebra[1] resulta apropiado por permitir representaciones dinámicas, en las que se pueden variar selectivamente distintas características de los cuadriláteros ABCD a estudiar. Además, su gratuidad favorece el acceso y también permite ser instalado en teléfonos móviles.

Dado que no se explicitan características del cuadrilátero ABCD, el problema es abordable desde distintas perspectivas, suponiendo –como punto de partida– alguna característica de dicho cuadrilátero, por ejemplo, que se encuadre en algún tipo particular dentro de la clasificación de cuadriláteros, o suponer que se conoce su área o su perímetro o la medida de sus diagonales, entre otras. Por lo tanto, se podría comenzar por la construcción de distintos casos particulares, con la expectativa de poder observar alguna regularidad en el cuadrilátero EFGH.

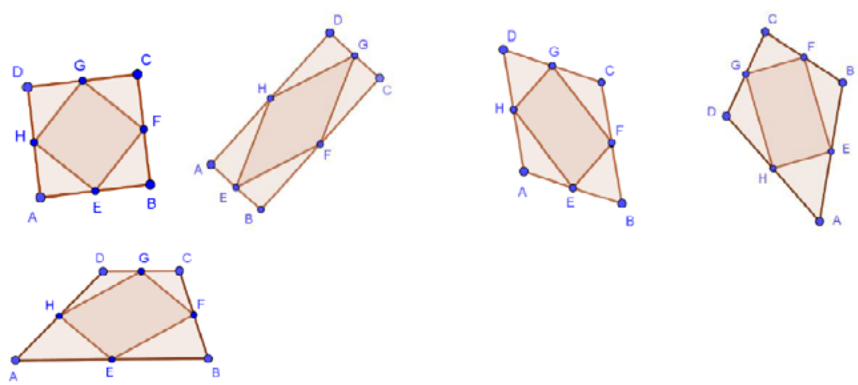
Una posibilidad es iniciar la exploración construyendo un *cuadrado* ABCD, para luego marcar los puntos medios de cada lado. Para esto último, es importante usar la herramienta que provee GeoGebra (o algún recurso equivalente) dado que, si se modifica la figura, que involucra múltiples formas de hacerlo, los puntos se mueven manteniendo su característica de punto medio. Si se los marcara de manera intuitiva es posible que, al mover la figura, el punto quede

[1] Disponible en: https://www.GeoGebra.org/download?lang=es

fijo en el lugar en que fue marcado (por no haber estado efectivamente sobre el lado) o que no se mantenga su condición de estar a igual distancia de los vértices (por no haberlo estado desde un comienzo). Una vez ubicados los cuatro puntos medios (E, F, G y H), es posible construir el cuadrilátero que los tiene como vértices. Lo que se observa en este caso es que EFGH es un cuadrado (figura 1).

Dado que GeoGebra no tiene, por defecto, comandos para la construcción de polígonos no regulares (como ciertos paralelogramos, trapecios o romboides[2]) se debe recurrir a las características y las propiedades de cada uno de ellos para construirlos, vía las herramientas pertinentes. Una vez construidos los distintos cuadriláteros ABCD, se procede a marcar los puntos medios para la construcción del cuadrilátero EFGH. En estos casos, el cuadrilátero EFGH se observa como un paralelogramo (figura 1).

Figura 1. Casos particulares del cuadrilátero ABCD

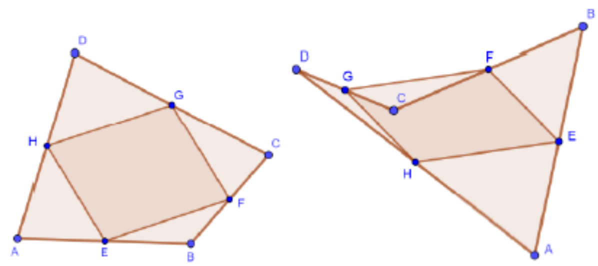


Para cualquiera de estos cuadriláteros especiales, la construcción dinámica permite arrastrar sus vértices, cambiando la posición y las dimensiones de las figuras y en todos los casos parece observarse que el cuadrilátero EFGH resulta un paralelogramo.

[2] Denominamos *romboide* al cuadrilátero no regular con dos pares de lados consecutivos congruentes, siendo el primer par de lados diferente al segundo par de lados. Debe tenerse en cuenta que esta figura recibe nombres distintos en otros países, tales como *deltoide*, *cometa* o *trapezoide simétrico*.

Pero la potencialidad de la construcción hace que se pueda considerar un cuadrilátero ABCD convexo genérico e incluso uno que sea cóncavo. En estos casos genéricos aún se mantiene con fuerza la conjetura de que efectivamente EFGH es un paralelogramo, como puede verse en la figura 2.

Figura 2. Casos genéricos del cuadrilátero ABCD



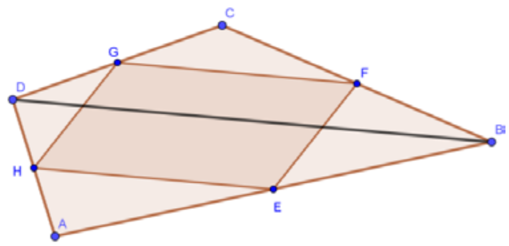
Conjetura 1: cualquiera sea el cuadrilátero ABCD, el cuadrilátero EFGH –que resulta de unir de manera continua los puntos medios de cada lado– es un paralelogramo.

Llegados a este punto, es probable que los estudiantes acepten como válida la conjetura basados en su observación visual, tal como anticipan Barreiro, *et al.* (2017):

> Al admitir el uso de tecnología es muy probable que nuestros alumnos se convenzan de la validez matemática de algo, "porque lo ven", "porque la pantalla lo muestra", "porque es la respuesta que da la calculadora", etcétera. Es una validación externa, diríamos en términos didácticos. El alumno "cree" lo que ve, como si fuera una cuestión de fe más que de convicción con fundamentos matemáticos (p. 67).

Resulta entonces un desafío de interés particular poner en evidencia la necesidad de validar la conjetura y encontrar la forma de efectuar dicha validación. Nuevamente el software puede facilitar esta iniciativa, trazando líneas auxiliares para explorar distintos razonamientos que conduzcan a una demostración formal. Una de esas líneas auxiliares podría ser una de las diagonales del ABCD, para considerar los dos triángulos que se forman, como se observa en la figura 3.

Figura 3. Representación genérica para validar la propiedad del polígono EFGH



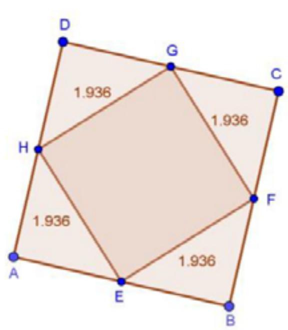
Para probar la conjetura basta con probar el paralelismo de los lados opuestos del cuadrilátero EFGH.

Como se observa en la figura 3, la diagonal DB determina los triángulos DBC y DAB. En ellos, los segmentos GF y HE son las bases medias respectivas. Dado que la base media de un triángulo es paralela al lado con el que no tiene puntos en común, resulta que GF // DB y que DB // HE. Por transitividad, tenemos que GF // HE. Análogamente se puede probar el paralelismo de los lados GH y EF, considerando los triángulos ACD y ABC.

Una vez confirmado que es posible anticipar que el cuadrilátero EFGH es un paralelogramo, cabe indagar en qué casos particulares del ABCD se podría también anticipar el *tipo* de paralelogramo. Se presentan a continuación distintos casos.

Si ABCD es un *cuadrado*, podemos construir algunos casos particulares y, por ejemplo, medir los lados con la herramienta “Distancia o Longitud”, como se observa en la figura 4. Asimismo, es necesario medir los ángulos, con la herramienta “Ángulo” para decidir que es un cuadrado.

Figura 4. Caso particular en el que ABCD es un cuadrado



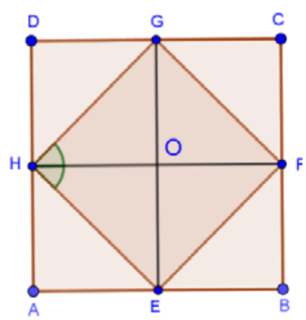
De esta instancia de exploración surge la siguiente conjetura:

Conjetura 2: si el cuadrilátero ABCD es un cuadrado, el cuadrilátero EFGH también lo es.

Desde ya que el hecho que el software evidencia las mismas longitudes y los cuatro ángulos rectos, no alcanza para garantizar que este hecho sea cierto siempre y nuevamente surge la necesidad de probar formalmente la conjetura establecida, necesidad que muchas veces debe estar promovida por el docente.

Ya se probó que EFGH es un paralelogramo, ahora se debe probar que sus lados son congruentes y que sus ángulos interiores son rectos. En la figura 5 se tiene una representación general cuando ABCD es un cuadrado. En ella se observa que las diagonales de EFGH son las bases medias del cuadrado ABCD, por lo tanto, son perpendiculares y se cortan en sus puntos medios. Por consiguiente, los triángulos rectángulos EOF, FOG, GOH y HOE son congruentes, y en particular los lados EF, FG, GH y HE. Respecto de los ángulos internos de EFGH, se puede considerar el triángulo rectángulo EOH que resulta isósceles (pues EO es congruente con OH), luego el ángulo OHE mide 45°, pero dado que los ángulos HOG y EOH son congruentes, resulta que el ángulo GHO también mide 45°. Por suma de ángulos consecutivos se prueba que el ángulo GHE es recto.

Figura 5. Representación genérica para ABCD cuadrado

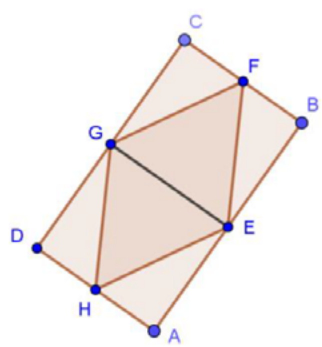


Si ABCD es un *rectángulo*, después de explorar varios casos particulares y medir con herramientas de GeoGebra los lados y los ángulos de EFGH, es posible formular la siguiente conjetura.

Conjetura 3: si el cuadrilátero ABCD es un rectángulo, el cuadrilátero EFGH es un rombo.

Nuevamente, es necesario validar esta conjetura. Tal como se observa en la figura 6, al construir el EFGH quedan determinados los triángulos rectángulos FCG, EBF, GDH y EAH, que resultan ser congruentes (por criterio de comparación "lado – ángulo (recto) – lado"). Por lo tanto, los lados EF, FG, GH y HE resultan ser congruentes. De esta forma se concluye que los lados de EFGH son congruentes entre sí.

Figura 6. Representación genérica para ABCD rectángulo



De manera análoga a los procedimientos anteriores se puede continuar suponiendo la tipología del cuadrilátero ABCD y conjeturar la tipología del EFGH correspondiente. Es decir, mediante una fase de exploración se puede arribar a la formulación de las conjeturas que se presentan a continuación, cada una de las cuales deberá ser validada formalmente (no lo hacemos aquí para agilizar la lectura del capítulo), y son ilustradas en las figuras 7 y 8, respectivamente.

Conjetura 4: si el cuadrilátero ABCD es un trapecio isósceles, el cuadrilátero EFGH es un rombo.

Conjetura 5: si el cuadrilátero ABCD es un romboide, el cuadrilátero EFGH es un rectángulo.

Figura 7. Representación genérica para ABCD trapecio isósceles

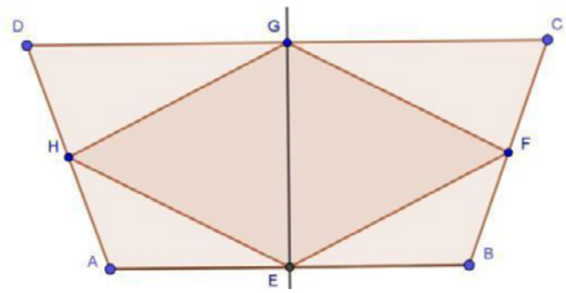
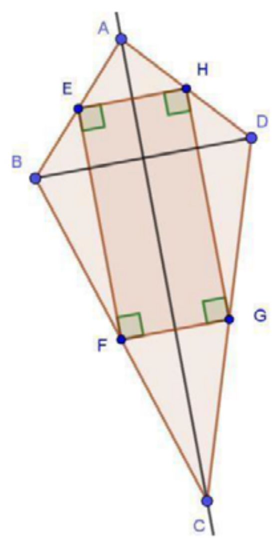


Figura 8. Representación genérica para ABCD romboide



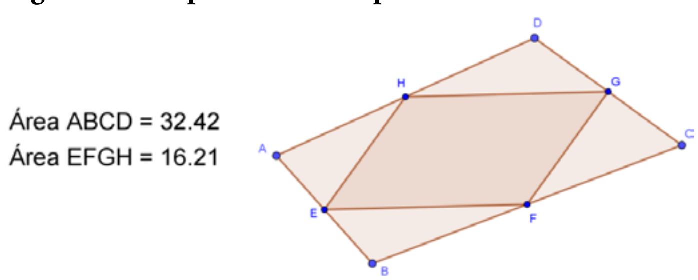
Hasta aquí se ha demostrado que determinadas características del cuadrilátero ABCD permiten anticipar el tipo de cuadrilátero que resulta EFGH.

Existen otras posibles relaciones a explorar vinculadas a determinadas magnitudes, como, por ejemplo, entre las áreas de los dos cuadriláteros o entre el perímetro de EFGH y las longitudes de las diagonales de ABCD. Es posible que la iniciativa de realizar estas exploraciones no sea espontánea ni evidente en los estudiantes y que requiera de una pertinente intervención docente para inducir una indagación en estas relaciones.

Para una primera exploración se puede sugerir el uso de la herramienta "Área" de GeoGebra. Se puede trabajar sobre un cuadrilátero ABCD genérico y el correspondiente EFGH, obtener sus respectivas áreas y desplazar los vértices del ABCD para obtener múltiples cuadriláteros observando simultáneamente el comportamiento de los valores correspondientes a cada área. Esta tarea sería sumamente dificultosa de realizar construyendo mediante el uso de lápiz y papel y calculando cada área en particular, además de insumir muchísimo tiempo. Nuevamente la herramienta tecnológica permite explorar sobre una inmensa cantidad de casos en apenas unos minutos.

Al mover libremente uno de los vértices, se van actualizando los valores determinados por el software para cada una de las áreas, como se ejemplifica en la figura 9.

Figura 9. Caso particular de exploración numérica sobre las áreas



De estas observaciones surge la siguiente conjetura:

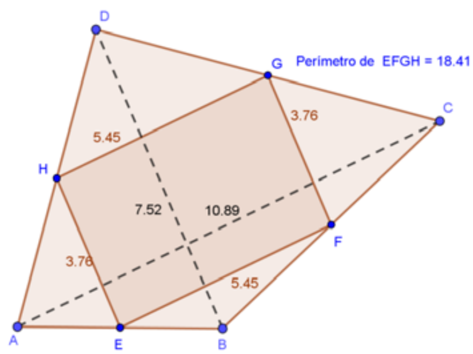
Conjetura 6: el área del cuadrilátero ABCD es el doble de la del cuadrilátero EFGH.

Aparece una observación importante en esta fase exploratoria debido a la limitación del recurso utilizado: en determinadas posiciones, al arrastrar y modificar las figuras, los valores de las áreas no siempre reflejan exactamente que uno es el doble del otro, solo se cumple en forma aproximada. Por lo tanto, se constituye con más fuerza el hecho de que la observación solo permite aproximarse a una conjetura.

Por último, es posible anticipar el valor del perímetro de EFGH si se conocen las longitudes de las diagonales de ABCD. Se puede sugerir a los estudiantes que, mediante la herramienta "Distancia o Longitud", determinen la longitud de distintos segmentos (lados y diagonales) de ambos cuadriláteros y que obtengan distintas sumas para indagar alguna regularidad, desplazando los vértices del ABCD para obtener distintos cuadriláteros. Se espera que de esta exploración pueda surgir la siguiente conjetura, que se ilustra en la figura 10.

Conjetura 7: el perímetro del cuadrilátero EFGH es igual a la suma de las longitudes de las diagonales del cuadrilátero ABCD.

Figura 10. Relación entre perímetro del EFGH y suma de las diagonales del ABCD



Si bien para el caso de estas dos últimas conjeturas no se presenta explícitamente la correspondiente validación formal, para agilizar la lectura de este capítulo, es claro que la misma debe ser efectuada como parte del proceso de resolución.

Configuración epistémica y análisis

A continuación, se presenta el análisis de la resolución del problema a través de una configuración. Esta potente herramienta propuesta por el EOS permite un análisis minucioso de los objetos primarios que intervienen y las relaciones que se establecen entre ellos (Font y Godino, 2006; Godino, Batanero y Font, 2008). Dado que la resolución presentada es experta, la configuración realizada es epistémica. Las configuraciones epistémicas constituyen una guía para el análisis de las configuraciones cognitivas que se realicen a partir de las resoluciones de los estudiantes. En la tabla 1 se detallan los objetos primarios que intervienen en este problema.

Tabla 1. Objetos primarios que constituyen la configuración epistémica del problema

Objetos primarios	Descripción
Situación problema	Sea ABCD un cuadrilátero cualquiera y EFGH el cuadrilátero que resulta de unir de manera continua los puntos medios de cada lado. Analizar y fundamentar las características del EFGH que se pueden anticipar si conocemos las del ABCD.
Lenguaje	• Coloquial • Figural • Notación de la geometría sintética
Definiciones/ Conceptos	• Cuadrilátero • Clasificación de cuadriláteros • Paralelismo • Punto medio de un segmento • Base media • Diagonales • Simetría (central y axial) • Congruencia • Perímetro • Área
Propiedades	• Propiedades que caracterizan a cada tipo de cuadrilátero. (Previa) • Propiedades de las bases medias. (Previa) • Transitividad del paralelismo. (Previa) • Criterios de congruencia de triángulos. (Previa) • Si se unen de manera continua los puntos medios de cada lado de un cuadrilátero cualquiera se forma un paralelogramo. (Emergente) • Si el cuadrilátero ABCD es un cuadrado, el EFGH también lo es. (Emergente) • Si el cuadrilátero ABCD es un rectángulo, el EFGH es un rombo. (Emergente) • Si el cuadrilátero ABCD es un trapecio isósceles, el EFGH es un rombo. (Emergente) • Si el cuadrilátero ABCD es un rombo, el EFGH es un rectángulo. (Emergente) • Si el cuadrilátero ABCD es un romboide, el EFGH es un rectángulo. (Emergente) • El área del cuadrilátero ABCD es el doble del área del EFGH. (Emergente) • El perímetro del paralelogramo EFGH es igual a la suma de las longitudes de las diagonales del ABCD. (Emergente)

Objetos primarios	Descripción
Procedimientos	• Construcción de cuadriláteros mediante herramientas de GeoGebra. • Determinación de puntos medios mediante herramientas de GeoGebra. • Desplazamiento arbitrario de uno o varios vértices del cuadrilátero original (ABCD) para obtener distintos cuadriláteros. • Determinación de las características del cuadrilátero EFGH según los distintos tipos del cuadrilátero ABCD. • Obtención de la medida de ángulos interiores, segmentos y áreas utilizando las herramientas correspondientes de GeoGebra. • Construcción de la demostración formal de las propiedades emergentes a través de propiedades y postulados propios de la geometría sintética.
Argumentos	• Argumentaciones que están implícitas o tácitas en las construcciones de las figuras confeccionadas para poder efectuar la exploración. A modo de ejemplo se detallan las que intervendrían en una posible construcción del rectángulo: ◊ Tranzando dos rectas paralelas (m y n) y una perpendicular a ellas (p), los ángulos que se forman entre m y p, y entre n y p, son rectos. ◊ Si se traza de una recta q paralela a p, también es perpendicular a m y a n, pues los ángulos correspondientes entre paralelas (p y q) cortadas por una transversal (m) son congruentes. El mismo análisis vale para las rectas p y q cortadas por la transversal n. ◊ Se forma un cuadrilátero con vértices en las intersecciones de las rectas. Ese cuadrilátero es un rectángulo pues tiene dos pares de lados paralelos y sus ángulos interiores son rectos. • Argumentaciones que intervienen en la validación formal de las conjeturas formuladas. A modo de ejemplo, se presentan las que intervienen en la prueba de la conjetura 1: ◊ Probar la conjetura implica probar que el cuadrilátero EFGH es un paralelogramo. ◊ Para probar que un cuadrilátero es un paralelogramo basta con probar que los lados opuestos son paralelos pues esa es la definición de paralelogramo. ◊ Como cada base media de un triángulo es paralela al lado con el que no tiene puntos en común, es apropiado dividir al cuadrilátero ABCD en dos triángulos trazando cada diagonal, para utilizar la propiedad de la base media. ◊ Cada par de lados opuestos del cuadrilátero EFGH es paralelo al mismo segmento (la diagonal respectiva) entonces, por transitividad, son paralelos entre sí.

La *situación problema* planteada es lo suficientemente amplia como para no inducir al estudiante a ningún tipo particular de metodología de resolución. Esa característica podría llevarlo a trabajar de una manera intuitiva y en forma exploratoria. Como consecuencia de prever que dicha exploración requiere de numerosos casos, debería advertir la ventaja de trabajar con un software de geometría dinámica, pues puede proporcionar todas las figuras que el usuario desee con un mínimo de trabajo previo, es decir, todo lo contrario de un trabajo "a mano". En este último caso no solo se requeriría de mucho más tiempo sino que, además, para que cada figura esté correctamente construida se requiere de instrumentos de geometría como regla, compás, escuadra y transportador. Además, las mediciones efectuadas mediante estos instrumentos no tendrán la precisión de aquellas realizadas por el software. La obtención de gran cantidad de gráficos representando casos muy diversos permitirá abordar la etapa de análisis y elaboración de conjeturas. Además del análisis, en el enunciado se pide una *fundamentación*, lo cual debe conducir a la búsqueda de pruebas matemáticas que confirmen o refuten las conjeturas formuladas.

El *lenguaje* utilizado en la resolución involucra lenguaje figural, lenguaje coloquial y lenguaje simbólico. El primero está presente en la fase exploratoria mediada por el software, así como también en las posibles figuras de análisis que se construyan en el momento de efectuar la demostración formal. El enunciado está formulado en el registro coloquial. Este registro también es el que predomina en las demostraciones formales, en las que además aparecen algunas representaciones simbólicas con relación a las figuras. Esta preponderancia del lenguaje coloquial podría estar determinada por el hecho de trabajar en el contexto de la geometría sintética.

Con relación a las *definiciones/conceptos*, puede observarse que, si bien parece que el problema está circunscripto a los cuadriláteros, interviene un gran número de definiciones o conceptos de otros objetos, que deben ser ya conocidos por los estudiantes para poder alcanzar un nivel de resolución como el presentado. Esto pone en evidencia la complejidad de la tarea propuesta.

Entre las *propiedades* que intervienen en la resolución, se puede observar que algunas de ellas son previas y participan en la construcción de las demostraciones formales. Otras serán un objeto emergente, provenientes de alguna conjetura formulada durante la exploración en GeoGebra, y serán las que requieran de una demostración formal.

Los *procedimientos* aparecen predominantemente en dos momentos de la resolución: los que están ligados a las construcciones dinámicas (que son guiadas por las definiciones y las propiedades de cada tipo de cuadrilátero) y los requeridos por las demostraciones formales (por ejemplo, trazado de rectas auxiliares).

Los *argumentos* se ponen en evidencia en las mismas fases que los procedimientos: en el momento de construir cuadriláteros con determinadas características (en este caso podrían estar implícitos en las decisiones de los pasos a seguir en la construcción y en la elección de las herramientas adecuadas entre aquellas que provee GeoGebra) y durante la construcción de las demostraciones formales.

Algunas reflexiones finales

El uso de la herramienta informática en este problema geométrico aparece en un momento diferente del tradicional. Los gráficos no se realizan de manera ilustrativa para alguna propiedad que se haya enunciado o como figura de análisis que sea soporte de una demostración. Aquí aparece en una fase exploratoria, en la que los estudiantes no saben *a priori* qué van a obtener a partir de la búsqueda y de la inspección visual. Además, las características dinámicas de las representaciones logradas facilitan que los casos a observar puedan ser realmente numerosos.

Como puede apreciarse en las figuras intercaladas en el texto, para la resolución presentada se trabajó con la ventana gráfica de GeoGebra, pero sin ejes ni cuadrícula. Esta característica orienta el uso de herramientas de geometría sintética. Pero debe tenerse en cuenta que si se hubiera utilizado la ventana gráfica con los ejes visibles (y, eventualmente, también la cuadrícula), el trabajo podría haberse encaminado al contexto de la geometría analítica, generando otra forma de resolución en la que habrían intervenido otros conceptos como el de pendiente, o el uso de coordenadas. También se observaría una diferencia en el lenguaje utilizado en la resolución, pues se tornaría más simbólico y menos coloquial. Es decir que una misma herramienta tecnológica puede potenciar distintas formas de trabajo para un mismo problema.

La construcción de una configuración epistémico-cognitiva permite analizar de manera minuciosa los conceptos, las propiedades y los procedimientos que están involucrados en una tarea, cuáles son los objetos matemáticos previos y cuáles serán los emergentes. Eso puede dar lugar a potenciar algunas prácticas matemáticas que nos interesen particularmente, poniendo énfasis en determinados aspectos de la tarea, o agregar/quitar preguntas en función de la dirección que deseamos darle, o reformularla a futuro para ser utilizadas con estudiantes de próximas cohortes. El desagregado que aparece en la configuración también evidencia la complejidad que la tarea involucra, lo que puede resultar de suma utilidad para analizar si está al alcance de las posibilidades de nuestros estudiantes o para programar el tiempo que puede requerir su resolución. Asimismo, permite realizar un análisis más riguroso de las posibles respuestas o producciones de los estudiantes, así como también clasificar o categorizar los posibles errores, retroalimentando la formulación de la tarea o permitiendo el diseño de otras que favorezcan la realización de las prácticas matemáticas que se detectaron como menos afianzadas o logradas por los estudiantes.

Es necesario destacar que la resolución de este problema pone en evidencia la necesidad y la relevancia de la *demostración* en matemática. El trabajo exploratorio, que está ampliamente facilitado por el software de geometría dinámica, debería generar en los estudiantes la pregunta respecto de si las regularidades que se van observando en el cuadrilátero EFGH (ser un paralelogramo, tener la mitad del área, etcétera) son invariantes, en *cualquier caso*, aún en los que no se hayan representado durante la exploración. Precisamente, en esa instancia se pone de manifiesto la necesidad de realizar la demostración formal que valide la conjetura formulada a partir de la exploración.

La implementación en el aula de este problema probablemente requerirá de la mediación del docente en distintos momentos, para orientar alguna acción, para recuperar los objetos emergentes, para poner de manifiesto la necesidad de la demostración en matemática como requerimiento básico del quehacer matemático, entre otras.

Referencias bibliográficas

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, 8 (1), 67-98.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *10*, 7-37.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39* (1), 37- 42.

Rodríguez, M. (Coord.) (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Ediciones UNGS.