7. Relación entre expresiones algebraicas de funciones y sus representaciones gráficas desde una perspectiva cognitivista

*Cristina Camós y Lorena Guglielmone**

Introducción

En este capítulo se presenta una tarea sobre funciones de variable real que resolvemos con y sin TIC, con la intención de mostrar el uso significativo de ellas. Posteriormente, se realiza un análisis didáctico enmarcado en el enfoque cognitivista.

Presentación de la tarea

Contexto: Los estudiantes de profesorado conocen funciones elementales, entre las que se encuentran las polinómicas y sus características más comunes. Vienen trabajando con el software GeoGebra y utilizando diferentes herramientas, como el deslizador[1] y el rastro[2]. Esta consigna forma parte de una guía de ejercicios sobre el tema de funciones de variable real en la formación de profesores. El docente propone trabajar en grupos para favorecer el debate e intercambio de opiniones, finalizando la actividad con una reflexión individual.

* *C. Camós*: Universidad Abierta Interamericana, Argentina.
L. Guglielmone: Universidad Nacional de Entre Ríos, Argentina.

[1] Herramienta Deslizador: https://wiki.GeoGebra.org/es/Herramienta_de_Deslizador.

[2] Herramienta Rastro: https://wiki.GeoGebra.org/es/Rastreo.

Objetivos:

Que el estudiante…

- comprenda la relación entre las expresiones algebraicas de ciertas funciones polinómicas y sus representaciones gráficas;
- comprenda el rol que desempeña el parámetro *k* en las funciones planteadas;
- pueda resignificar las conclusiones a las que arriba y reflexionar sobre el trabajo realizado.

Consignas:

1. Sea *f* una función polinómica y *k* un número real entre 1 y 15, comparen, describan y justifiquen las características gráficas de las familias de curvas que resultan al variar el parámetro *k* en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x)+k$	b) $f(x)-k$	c) $f(x+k)$	d) $f(x-k)$
e) $kf(x)$	f) $\frac{1}{k}f(x)$	g) $f(kx)$	h) $f\left(\frac{1}{k}x\right)$

2. ¿Creen que las conclusiones arribadas en el punto anterior son extensivas a todas las funciones? ¿Por qué?
3. ¿Hay algo de lo realizado que les resultó difícil de comprender o aún no lo comprenden? ¿Pueden identificar las causas?

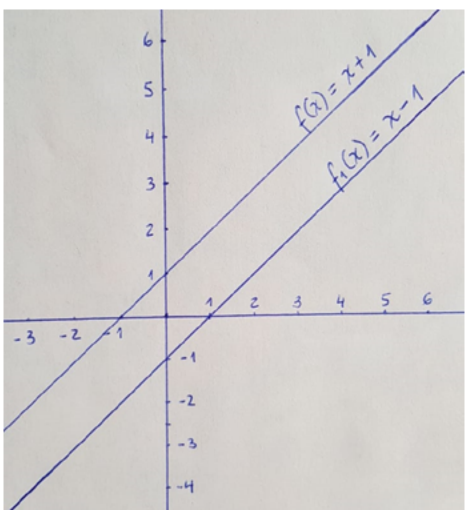
Resolución de la tarea

Consigna 1

Partimos de una tarea que cumple con las condiciones necesarias de *coherencia* entre sus partes (contexto, objetivo y consigna) para que la actividad matemática que realice el alumno sea valiosa.[3]

En una resolución con lápiz y papel, una forma de encarar la consigna puede ser comenzar con funciones sencillas (lineales o cuadráticas). Para graficar es probable que los estudiantes recurran a la construcción de tablas de valores. Seguramente los valores que tomen para el parámetro *k* sean enteros, incluyendo (o no) los extremos (1 y 15) de acuerdo con cómo interpreten la consigna. Si deciden trabajar con funciones lineales, puede resultarles dificultoso identificar los cambios que se producen en cada caso, pudiendo algunos resultar iguales. Por ejemplo, si se parte de $f(x) = x + 1$, no se observan diferencias en algunas traslaciones, como la que presentamos a continuación.

Figura 1. Gráficas de los casos f(x) – k y f(x – k) con k = 2



[3] Para profundizar sobre el análisis de la coherencia de tareas, se puede consultar Rodríguez (2017).

Una cuestión que puede presentarse al trabajar sin TIC es que realicen las gráficas en diferentes sistemas de ejes coordenados, lo cual complicaría la comparación y la visualización de los cambios. Si ello pasa, es probable que cuando busquen describir las transformaciones del caso considerado, den cuenta de la dificultad y decidan por sí mismos o a través de las sugerencias del docente pasar las gráficas a un solo sistema.

Algunos estudiantes podrían avanzar con la construcción de funciones cuadráticas ya que les puede ocasionar intriga los cambios que se den en estos casos, cuando varía el grado de la función polinómica *f*. Podrían mantener los mismos valores de *k* usados para la construcción de las rectas buscando facilitar las comparaciones posteriores. Suponiendo que grafiquen en un mismo sistema de ejes cartesianos las diferentes parábolas, no solo deberán compararlas con las rectas, sino también pensar qué ocurrirá si varían nuevamente *k*. Es evidente que todas estas construcciones implican muchísimo tiempo y la actividad se torna agotadora.

Resolver esta consigna utilizando TIC es muy diferente que hacerlo sin tecnología. Si los alumnos deciden usar alguna aplicación o software, como el GeoGebra, que vienen utilizando, seguramente manipularán funciones polinómicas más variadas, podrán hacer uso de las herramientas que vienen usando, como el deslizador, permitiendo que el parámetro recorra valores dentro del rango propuesto. También contarán con la precisión de las gráficas, que se muestran inevitablemente dentro de un único sistema de ejes coordenados. La exploración que pueden realizar con la ayuda de un software no solo habilita el planteo de hipótesis, sino también la consolidación de las mismas, favoreciendo la posterior justificación. Las características mencionadas nos permiten afirmar que no da lo mismo resolver la consigna con o sin tecnología, por lo que contamos con elementos suficientes para asegurar el criterio de imprescindibilidad de las TIC.

En un principio, es de esperar que se enfoquen en saber qué pasa con las gráficas al variar el parámetro *k*, sin buscar explicar esos cambios. La exploración de los primeros cuatro casos lleva a describir los desplazamientos verticales y horizontales.

Figura 2. Rastro de algunas familias de curvas para el caso *f*(x) + *k*

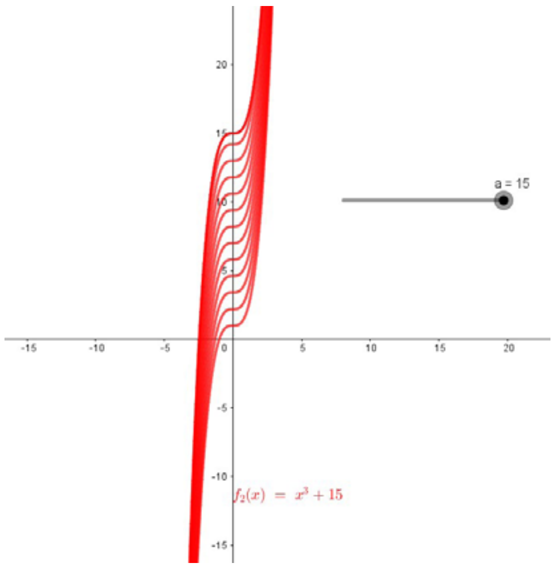
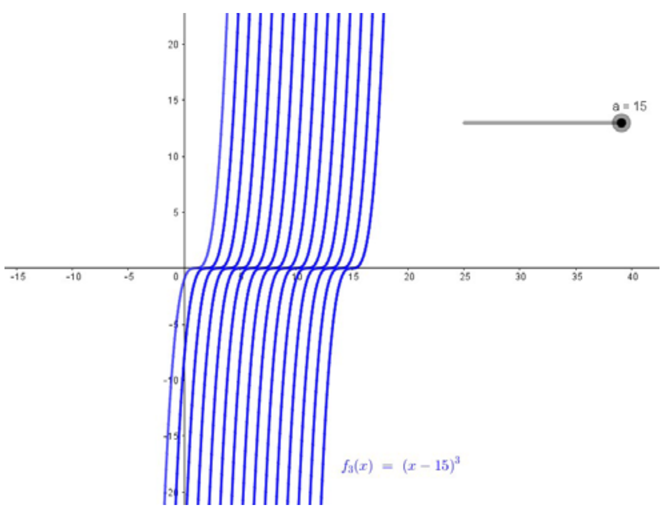


Figura 3. Rastro de algunas familias de curvas para el caso *f*(x – k)



En general, los corrimientos son los que resultan más fáciles de describir para los alumnos, haciendo uso de palabras cotidianas como "sube" o "baja" para los verticales, y "se corre a la derecha" o "se corre a la izquierda" para los horizontales.

En el análisis de esos desplazamientos, la justificación de las traslaciones verticales suele resultar sencilla por su vínculo con el signo del parámetro k. Como k toma valores positivos, la gráfica "sube" para $f(x) + k$, y "baja" para $f(x) - k$. Sin embargo, los corrimientos horizontales suelen causar sorpresa en los estudiantes porque atentan contra la intuición, ya que el signo del parámetro pareciera indicar lo contrario a lo que ven en la pantalla. Recordando el valor positivo de k, es de esperar que las justificaciones sean hechas de acuerdo con el signo del parámetro observando que para $f(x + k)$ la gráfica "se corre a la izquierda" y para $f(x - k)$ la gráfica "se corre a la derecha", pero podría ocurrir que, a pesar de describir correctamente lo que aprecian, los alumnos sigan sin comprender por qué esas transformaciones se dan así.

Si no lo hicieron hasta el momento, será importante poner en debate las diferencias entre las curvas desde cada expresión algebraica al variar los valores del parámetro k, poniendo en juego también la distancia de los desplazamientos. ¿Es necesario que los alumnos lleguen a expresar las descripciones tal cual aparecen en los textos? Definitivamente no. Lo importante será que los estudiantes logren darse cuenta de todas las diferencias que se ponen en juego, puedan analizarlas y expresarlas de manera correcta, sea usando lenguaje matemático, lenguaje natural o mixto. Esa es la riqueza de la actividad.

Respecto del resto de los casos (ítems e, f, g y h), son los más difíciles de describir, como veremos a continuación, pero la exploración que pueden hacer los alumnos usando un software o aplicación, es muy amplia y diversa, por lo que seguramente puedan notar los cambios que se producen para cada expresión propuesta.

Inicialmente, es de esperar que describan cada expresión de manera individual, observando las familias de curvas producidas al variar el parámetro en cada caso. De esta manera podría ocurrir que algunas de las descripciones terminen siendo iguales. Por ejemplo, si analizan por separado los casos $kf(x)$ y $f(kx)$, podrían decir para ambos que las gráficas "se hacen más angostas", "se acercan al eje y", etcétera.

Figura 4. Rastro de algunas familias de curvas para el caso *kf*(*x*)

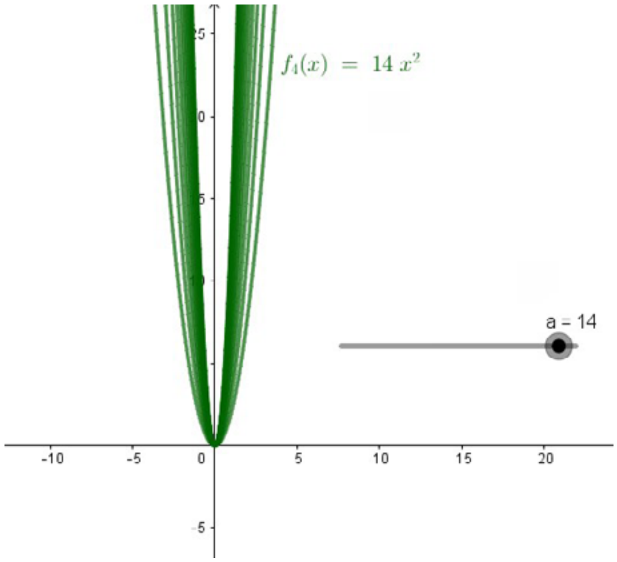
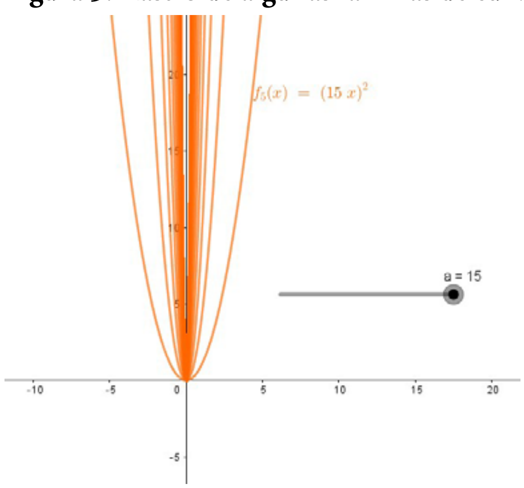
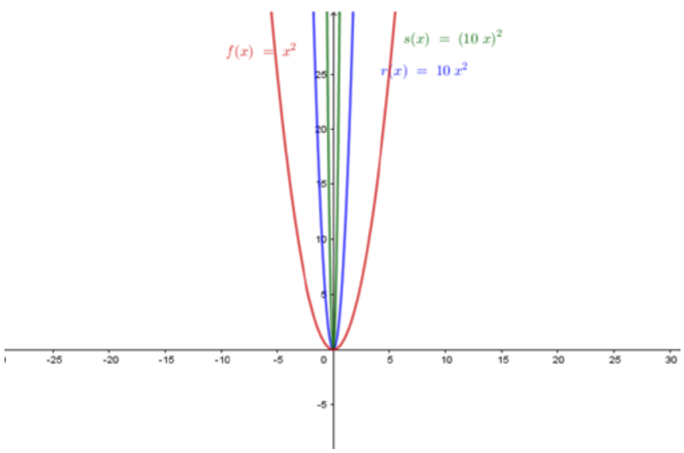


Figura 5. Rastro de algunas familias de curvas para el caso *f*(*kx*)



Los alumnos deberán advertir que, si bien las descripciones que realizaron son iguales, los cambios no son los mismos. De esto podrían darse cuenta observando que las expresiones algebraicas son diferentes y a través de la visualización conjunta de las gráficas de algunas funciones para los mismos valores del parámetro *k*, entendiendo que la descripción individual no les permitió notar las diferencias. También podría entrar en juego el análisis de algunas tablas de valores.

Figura 6. Gráfico que permite asegurar diferencias en los casos *kf*(*x*) y *f*(*kx*)



La dificultad que se puede presentar es en lograr descripciones que diferencien las transformaciones producidas, ya que los alumnos no conocen de dilataciones y contracciones. Más allá de que logren el objetivo buscado, el debate que ello puede generar dentro de cada grupo es matemáticamente muy rico.

Algunas otras conjeturas esperables son las relacionadas con las expresiones que deforman la gráfica de la función original considerada y las que no lo hacen. Es decir, dar cuenta de que entre las transformaciones propuestas están aquellas que son rígidas (cuatro primeras expresiones) y las que no lo son (últimas cuatro). También podrían surgir presunciones relacionadas a la variación (o no) de las intersecciones con los ejes coordenados y, por qué no, algunas vinculadas a valores diferentes de los propuestos para el parámetro, por la simple curiosidad de saber qué pasará, por ejemplo, si *k* tomase valores negativos. Si bien no es parte de la consigna, los alumnos podrían probar fácilmente con otros valores y observar otro tipo de transformaciones. ¿Está mal que ello pase? ¡Para nada!, ya que estaría mostrando el interés de los alumnos por conocer más, y el docente lo podría tener en cuenta para el diseño de nuevas tareas.

A lo largo de todo este proceso en que los alumnos son los principales actores, el docente va generando diferentes debates y puestas en común. La buena gestión de la clase es esencial para entender lo que hicieron los estudiantes e intervenir desde allí.[4] Debemos tener en cuenta que es muy importante que incentivemos a nuestros alumnos a que participen en cada clase, no solo para que expresen las soluciones a las que arriban, sino también para que comenten aquello que no comprenden o los errores que cometen en la resolución de las actividades propuestas. Cabe aclarar que estos últimos constituyen una fuente muy valiosa para la comprensión de los procesos cognitivos de los alumnos.[5]

Retomando el análisis de los criterios de pertinencia y significatividad del uso de TIC, ya expresamos que se cumple claramente el criterio de imprescindibilidad. Por otro lado, el pedido de justificaciones para las descripciones que realizan los alumnos hace que la actividad cumpla con el criterio de favorecer la búsqueda de pruebas matemáticas. Además, en ningún momento se pierde de vista el objetivo matemático, y se da libertad para apelar a las TIC y seleccionar cuál recurso tecnológico utilizar.

Consigna 2

Probablemente los alumnos exploren con funciones no polinómicas para visualizar sus gráficas al variar el parámetro k en cada uno de los casos, y analicen los cambios observados. El debate que se puede generar dentro de cada grupo y entre los diferentes grupos, es potencialmente rico porque las transformaciones no siempre son fáciles de visualizar desde cualquier función. Es de esperar que se concluya que, en cada caso, sea cual fuese la función elegida, la trasformación es la misma. Es importante que adviertan que esas conclusiones quedan en el nivel de conjetura. Esto resulta muy relevante en el contexto trabajado, ya que los alumnos son futuros profesores que deberán tener claro que, a pesar de que hayan analizado muchos casos, eso no es suficiente para concluir algo de validez general, es decir, para enunciar una proposición que sea verdadera.

El docente podrá trabajar sobre la importancia de las demostraciones en matemática para validar las hipótesis que consideramos verdaderas, como en este caso en que puede resultar una obviedad que las trasformaciones son las

[4] Para profundizar sobre criterios para intervenciones en el aula, se puede consultar Rodríguez (2017).

[5] Para profundizar sobre el tema, se puede consultar Abrate, Pochulu y Vargas (2006).

descriptas verbalmente, pero son los argumentos deductivos los que permiten validar las conjeturas planteadas.

Se podría cerrar esta actividad mostrando cómo se suelen describir las transformaciones trabajadas usando lenguaje matemático y dejando claro que esas descripciones no constituyen demostraciones. De esta manera, los alumnos contarían con la descripción formal de cada transformación, pero habiendo realizado un recorrido que es de esperar los ayude en la comprensión de dichas descripciones.

Consigna 3

La tercera consigna está pensada para que las dudas y complejidades que hayan surgido en el desarrollo de la actividad sean expresadas por escrito. El propósito de la pregunta puede ser visto desde dos perspectivas, la del alumno y la del docente. Para el estudiante representa volver y reflexionar sobre lo hecho, advertir y tomar conciencia de los obstáculos que se le presentaron, y poder expresarlos en palabras. Es decir, el alumno debe realizar un proceso de metacognición. Para el profesor representa conocer las dificultades a las que se enfrentaron sus alumnos y que, posiblemente, sean diferentes de las que haya previsto.

Esto será enriquecedor no solo para el alumno, sino también para el docente, ya que le permitirá comprender mejor los errores y dificultades que enfrentaron sus alumnos, y los podrá tener en cuenta para el diseño de nuevas tareas.

Análisis didáctico en el marco del enfoque cognitivista

El enfoque cognitivista, como campo de la educación matemática, está basado en una visión constructivista del conocimiento y tiene como rasgo distintivo que busca determinar el funcionamiento cognitivo que subyace a los procesos de pensamiento matemático. Desde ese lugar, centramos el análisis en los textos de Arcavi y Hadas (2003) y Duval (2016). Del último autor consideraremos los conceptos principales de su teoría sobre registros de representación semiótica, que fueron abordados de manera sintética por Colombano, Formica y Camós (2012).

A diferencia de otras ciencias, en matemática los objetos no son directamente accesibles si no es a través de sus representaciones semióticas. Por lo que las representaciones semióticas resultan absolutamente necesarias para poder trabajar con ellos. Esto conlleva a lo que Duval (1993) llama paradoja cognitiva del pensamiento matemático: por un lado, las representaciones posibilitan la actividad sobre los objetos matemáticos, y por otro, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual. La imposibilidad de acceder de forma directa a los objetos matemáticos hace que los estudiantes suelan confundirlos con sus representaciones semióticas, por lo que la distinción entre un objeto y su representación es fundamental para el aprendizaje de la matemática. De acuerdo con Duval (2016), la paradoja cognitiva permite plantear la siguiente hipótesis:

> … la comprensión en matemáticas supone la coordinación de al menos dos registros de representación semiótica. Y desde ya se puede plantear una primera pregunta: ¿esa coordinación de registros llega naturalmente a los estudiantes en el contexto de la enseñanza matemática? (p. 77).

Esa pregunta está vinculada a la primera consigna trabajada. La familia de curvas que se genera al variar el parámetro *k* de cada expresión algebraica posee características gráficas matemáticamente relevantes. Para su resolución, los alumnos deben hacer uso de por lo menos tres registros de representación, y la coordinación es fundamental para llegar a responder lo pedido. En el caso de la resolución sin TIC, inicialmente los estudiantes deberán lograr una efectiva coordinación entre los registros simbólico y numérico, para luego pasar al registro gráfico. Los alumnos que deciden resolver la consigna usando TIC, en principio no deberán hacer uso del registro numérico, ya que las conversiones entre los registros algebraico y gráfico serán realizadas por la aplicación o software que utilicen.

El uso de TIC para la resolución de la consigna lleva a los alumnos a recorrer algunas de las etapas descriptas por Arcavi y Hadas (2003), como las de visualización y de experimentación. Dichos autores aseguran que los ambientes computarizados dinámicos juegan un papel significativo en el aprendizaje de la matemática siempre que estén acompañados por adecuadas prácticas de aula y materiales curriculares.

Si los alumnos utilizan el software GeoGebra –con el que ya vienen trabajando–, las variaciones dinámicas del parámetro *k* y las correspondientes familias de curvas visualizadas en la pantalla, son ejemplos de conversiones mediadas por tecnología. De acuerdo con Fischbein (citado en Arcavi y Hadas, 2003), la visualización “no solo organiza los datos disponibles en estructuras significativas, sino que también es un factor importante que orienta el desarrollo analítico de una solución" (p. 25).

Desde la visualización dinámica, los estudiantes van aprendiendo a experimentar. Para cada expresión algebraica propuesta, los alumnos deben explorar lo que ocurre en las gráficas asociadas si el parámetro toma, por ejemplo, valores extremos del intervalo propuesto, valores medios, etcétera. Como afirman Arcavi y Hadas (2003), esa información obtenida desde la visualización puede representar un paso para la enunciación de conjeturas y generalizaciones.

Estando en esta etapa de experimentación, los estudiantes deben ir realizando conversiones del registro gráfico al registro verbal para ir expresando las hipótesis que van surgiendo. Esas conversiones no las resuelve la tecnología y su complejidad reside en no ser congruentes. Una conversión es considerada *no congruente* cuando no es posible establecer una correspondencia término a término entre las unidades significantes (símbolos, palabras o rasgos visuales) de las dos representaciones semióticas que intervienen en registros diferentes. Como dice Duval (2016, p. 85), "las conversiones no congruentes son para muchos estudiantes una barrera infranqueable en su comprensión de las matemáticas y, por tanto, para su aprendizaje". De esta manera, si para la resolución de la consigna hacen uso de TIC, el registro verbal resulta ser el protagonista de toda la actividad matemática, haciendo explícito un recurso que, a decir de Duval, se tiende a marginar en la enseñanza, en la que se suele permanecer dentro de los registros monofuncionales, como el gráfico y el simbólico.

Como se mostró en la resolución, es de esperar que los mayores obstáculos se presenten al realizar las conversiones de las transformaciones no rígidas, por ejemplo, desde la observación de las familias de curvas provenientes de las expresiones $kf(x)$ y $f(kx)$. Respecto de cómo distinguir lo que es matemáticamente relevante en el registro gráfico, Duval (2006) plantea:

> La distinción visual de los gráficos no es en manera alguna obvia, en particular cuando se ven muy similares en la forma y el contenido. De hecho, la capacidad de distinguir lo que es relevante matemáticamente en cada uno, depende de la construcción implícita de una red cognitiva (p. 87).

El tener que hacer un análisis comparativo de las gráficas para visualizar las diferencias entre los casos, observar y comprender que las expresiones algebraicas son diferentes o tener que recurrir a tablas de valores para confirmar las diferencias, es una muestra de la complejidad en la distinción visual de la que habla el autor.

A medida que avanzan con el desarrollo de la actividad, los alumnos también deben realizar diversos tratamientos en el registro verbal, al tener que ir mejorando las descripciones realizadas por no mostrar de manera completa y correcta las transformaciones observadas. Esto no es usual en las clases de matemática, ya que se habla en lenguaje natural, pero se suele escribir en símbolos, "como si las explicaciones verbales pudieran volver transparente cualquier tratamiento simbólico" (Duval, 2016, p. 75). En esta actividad el registro verbal está presente durante todo su desarrollo, buscando que los alumnos no solo hablen, sino también escriban en lengua natural, dejando en manos de la tecnología los procedimientos algorítmicos. De esta manera, los estudiantes van desarrollando la expresión escrita, habilidad que, en general, no suele ser trabajada en las clases de matemática, pero que es fundamental en la formación docente.

Retomando el texto de Arcavi y Hadas (2003), queremos detenernos en "la sorpresa" de la que hablan los autores y su posibilidad de promover un aprendizaje significativo. Para que una actividad produzca sorpresa, se debe realizar un pedido explícito de predicciones sobre la acción que los alumnos están a punto de abordar, y esa anticipación tiene que resultar contradictoria respecto de lo que muestre la tecnología utilizada. Como afirman los autores, ese desconcierto "puede ser el detonador para nutrir la propia necesidad de los estudiantes de reanalizar su conocimiento y predicciones, estableciendo las oportunidades para un aprendizaje significativo" (p. 26). En la consigna propuesta, se podría aprovechar el desconcierto que puede generar en los alumnos los casos $f(x + k)$ y $f(x - k)$, habiendo ya experimentado con los casos $f(x) + k$ y $f(x) - k$, agregando un pedido explícito para que los estudiantes anticipen lo que creen que sucederá al trabajar con esos casos, previo a habilitarles el uso de las TIC para explorar.

Para el segundo punto de la consigna, los alumnos deben reconocer los registros gráfico y verbal como registros que promueven el pensamiento y facilitan la construcción de conjeturas, pero no permiten demostrarlas. Si bien no es objetivo de la actividad que los alumnos demuestren sus conjeturas, es necesario que les quede claro que el sistema de representación simbólico –como parte del lenguaje matemático–, constituye *el* registro a través del cual se pueden formalizar las generalizaciones, como las que probablemente hayan llegado a enunciar en el primer punto.

En relación con las preguntas metacognitivas personales, propuestas en el tercer punto de la consigna, las respuestas de cada estudiante pueden resultar altamente significativas desde el enfoque abordado. La posibilidad de contar con información que le permita al docente conocer las dificultades que tuvieron los alumnos al trabajar con registros, y lo que aún no llegan a comprender, es una oportunidad para seguir trabajando desde nuevas tareas que busquen abordar esas dificultades. Como plantea Duval (2016), creemos que el cambio de registro de representación es el *umbral* de la comprensión matemática en cada etapa del currículo, y es lo que buscamos poner en juego desde la tarea propuesta. En concordancia con el autor, entendemos que el gran reto que tenemos como educadores consiste en desarrollar en los alumnos la capacidad para cambiar de registro de representación, reconociendo que en la sociedad digital en la que nos encontramos inmersos, las TIC pueden ser grandes aliadas para ese objetivo.

Referencias bibliográficas

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática*. EDUVIM.

Arcavi, A. y Hadas, N. (2003). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5, 25-45.

Colombano, V., Formica, A. y Camós, C. (2015). Enfoque cognitivista. En M. Pochulu, y M. Rodríguez (Comps.), *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 115-152). Ediciones UNGS y EDUVIM.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de Science Cognitives,* (5), 37-65.

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval y A. Sáenz-Ludlow, *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 61-94). Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Rodríguez, M. (Coord.) (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Ediciones UNGS.