8. Una situación para introducir un estudio general de las funciones homográficas

*Inés Casetta y Martín Chacón**

Introducción

En este capítulo presentamos una tarea, exhibimos sobre ella una resolución experta sin uso de TIC y un abordaje con uso de las TIC encuadrada en el contexto. Finalmente, pretendemos analizar la actividad desde la teoría de situaciones didácticas (TSD). Dado que proponemos esta tarea como una primera aproximación de los alumnos al contenido en cuestión, encontramos pertinente particularizar el análisis sobre las situaciones de acción, formulación y validación que Brousseau (2007) define.

Presentación de la tarea

Contexto: Los estudiantes han trabajado con funciones lineales y, en general, con funciones polinómicas. Factorizan polinomios y pueden identificar conjuntos de positividad y negatividad usando el teorema de Bolzano. Están acostumbrados a utilizar distintos softwares para graficar funciones particulares y observar características. Han trabajado, especialmente, en GeoGebra (GGB) con la variación de parámetros en la fórmula de funciones lineales y cuadráticas,

* *I. Casetta*: Universidad Abierta Interamericana, Argentina.
M. Chacón: Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina.

han explorado el estudio de estas funciones enlazando distintos registros de representación. Establecieron generalizaciones matemáticas válidas para familias de las funciones estudiadas. En el entorno dinámico usaron deslizadores. No trabajaron con límites ni derivadas.

Para el trabajo con la consigna, proponemos que el docente entregue únicamente el primer ítem en el comienzo. Posteriormente, se hace una puesta en común para presentar el proceso de conjeturación, argumentación y análisis a cargo de los grupos. Luego, se entregaría el segundo ítem si acaso no hubiera surgido lo que allí se propone. En caso de que el recorrido por los grupos o parejas de trabajo evidenciara que algunos establecen relaciones entre el gráfico y los parámetros y otros grupos no, ajustaríamos con intervenciones elaboradas *a priori* para propiciar dichas elaboraciones conceptuales.

Objetivo: Que los estudiantes elaboren conjeturas sobre características de las funciones racionales cuya expresión es un cociente de lineales.

Consigna: Consideren la expresión de la forma $f(x) = \frac{a\,x+b}{c\,x+d}$ para números reales a, b, c, d. Justifiquen las respuestas:

- ¿Pueden establecerse condiciones sobre los parámetros de la expresión para estudiarla como función? ¿Hay casos especiales? Si es así, ¿cuáles son? ¿Cómo son los gráficos?
- ¿Encuentran alguna relación entre los parámetros y las características del gráfico? Si es así, ¿cuáles?

Resolución experta sin TIC

Veamos características de estas funciones.

Dominio natural

La expresión de la función es el cociente $\frac{a\,x+b}{c\,x+d}$, por lo tanto, el denominador debe ser distinto de 0. Ello ocurre para todo x distinto de $-\frac{d}{c}$ con $c \neq 0$. En caso de que sea $c = 0$, d no puede ser 0, y no hay valores de x, para los cuales el denominador sea 0. Notemos que, en este caso, se trata de las funciones lineales $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$. No realizaremos un detalle del análisis porque sus características son bien conocidas.

En esta familia de funciones, los parámetros *c* y *d* no pueden ambos a la vez tomar el valor 0.

$$\text{Si } c = 0 \text{ y } d \neq 0, Dom(f) = \mathbb{R}$$
$$\text{Si } c \neq 0 \text{ y } d \neq 0, Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

Imagen

En caso de que sea $c = 0$, se trata de funciones lineales, de la forma $f(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$. Si $a = 0$, entonces se trata de funciones constantes, y por lo tanto la imagen estará conformada por un único número, $\frac{b}{d}$. En caso de que $a \neq 0$, la imagen estará conformada por todos los reales.

Si sucede que es $c \neq 0$, podemos plantear para cuáles $y \in R$, la ecuación $f(x) = y$ tiene solución con $x \in Dom(f)$.

$$\frac{ax + b}{cx + d} = y$$

Multiplicando ambos miembros por $cx + d$, que es distinto de 0, pues $x = -\frac{d}{c}$ no forma parte del dominio, tenemos:

$$ax + b = y\,(cx + d)$$

Distribuimos *y*, y reunimos los términos de variable *x* en un miembro, tenemos:

$$ax - cyx = -b + yd$$

Por propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma (realizada en esta dirección es también conocida como extracción del factor común *x*), queda:

$$x\,(a - cy) = -b + yd$$

Si $a - cy \neq 0$, multiplicamos miembro a miembro por $\frac{1}{a-cy}$, y tenemos:

$$x = \frac{-b + yd}{a - cy}$$

Por lo tanto, para que la ecuación tenga solución, debe ser $y \neq \frac{a}{c}$. Esto nos dice que, para cualquier valor de *y* distinto de $\frac{a}{c}$, existe un elemento del dominio que lo tiene por imagen.

Por otro lado, en el caso de que $ad = bc$, tenemos que $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{b}{d}\left(\frac{dax+bd}{bcx+bd}\right) = \frac{b}{d}$, multiplicando y dividiendo respectivamente por *b* y por *d*. Es decir, que la expresión del numerador es un "múltiplo" real del denominador. En ese caso, vale $f: \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R}: f(x) = \frac{b}{d}$. Es decir que f es constante en el dominio indicado. Finalmente, resumimos lo siguiente:

$$\text{Si } a = 0, c = 0 \text{ y } ad = bc, Im(f) = \left\{\frac{b}{d}\right\}$$

$$\text{Si } a \neq 0, c = 0 \text{ y } ad \neq bc, Im(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{Si } a \neq 0, c \neq 0 \text{ y } ad \neq bc, \ Im(f) = \ \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

Continuidad

Si $c = 0$, f es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$, pues $\lim_{x \to x_0} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x \to x_0} \frac{ax+b}{d} = \frac{ax_0+b}{d}$.

Si $c \neq 0$, f es continua en $x_0 \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, pues $\lim_{x \to x_0} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ax_0+b}{cx_0+d}$.

Por lo tanto, en todos los casos f es continua en su dominio.

Extremos

Si $c = 0$, entonces, f es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = \frac{a}{d}$, que es distinto de 0 en caso de que $a \neq 0$. Y, por lo tanto, f no tiene extremos. Si además es $a = 0$, se trata de la función constante de expresión $f(x) = \frac{b}{d}$.

Si $c \neq 0$, entonces, f derivable en $\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ y $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. Para que se verifique $f'(x) = 0$, debe ser $ad = bc$. Ahora bien, si esto se cumple, la expresión del numerador es un "múltiplo" real del denominador como hemos mencionado al analizar la imagen de f. En ese caso, vale $f: \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{b}{d}$. Es decir que f es constante en el dominio indicado. En otro caso distinto, f' no tiene ceros, y, por lo tanto, f no tiene extremos.

En resumen, si $ad = bc$ se trata de una función constante en su dominio y en caso contrario, f no tiene extremos.

Crecimiento

Si $c \neq 0$ y $ad \neq bc$, entonces, f' conserva signo en cada función de la familia, dado que $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, pues $(cx + d)^2 > 0$, para todo $x \neq -\frac{d}{c}$ y el signo de $ac - bc$ es el mismo para todo x. Por lo tanto, f es monótona en $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ y en $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$, siendo, o bien creciente en ambos intervalos, o bien decreciente en los dos.

Si $c \neq 0$ y $ad = bc$, mencionamos que se trata de $f: \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{b}{d}$, constante en su dominio.

Si $c = 0$, se trata de las funciones lineales de expresión $f(x) = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ y el crecimiento está dado por el signo de $\frac{a}{d}$.

Curvatura

Con $c \neq 0$, tenemos que $f''(x) = -\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}$ para todo $x \neq -\frac{d}{c}$. Supongamos $ad \neq bc$. Notemos que el signo de $-2c(ad - bc)$ no depende de x. Y que $(cx + d)^3$ cambia de signo en el mismo x que $cx + d$. Y que, además, $cx + d$, tiene distinto signo a izquierda y a derecha de $x = -\frac{d}{c}$; con lo cual, f tiene distinta curvatura en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ y $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$.

Asíntotas

Con $c = 0$ se trata de una función lineal no constante, a menos que sea $a = 0$.

Con $c \neq 0$ y $ad = bc$, se trata de una función constante en $\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Con $c \neq 0$ y $ad \neq bc$, tenemos lo siguiente.

Asíntota horizontal

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$$

Este último paso es consecuencia de la regla de L'Hôpital. Por lo tanto, f tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = \frac{a}{c}$.

Asíntota vertical

f es continua en su dominio, por lo tanto, el único candidato es $x = -\frac{d}{c}$ para el caso en que $-\frac{d}{c}$ no pertenezca al domino de f.

Sabemos que la condición para la existencia de asíntota vertical en $x = x_0$ es que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ resulte $+\infty$, $-\infty$ o ∞ y es suficiente que sea uno de los límites laterales.

En nuestro caso, vale que $\lim_{x\to -\frac{d}{c}} \frac{ax+b}{cx+d} = \infty$.

Notemos que $ax + b \neq 0$, pues si así no fuera, es decir, si valiera $ax + b = 0$, y dado que $ax + b = a \cdot \left(-\frac{d}{c}\right) + b$, tendríamos que $a \cdot \left(-\frac{d}{c}\right) + b = 0$.

Como $c \neq 0$ resulta $-a \cdot d + b \cdot c = 0$.

Luego $bc = ad$, y esto contradice las condiciones que estamos analizando.

Para terminar, notemos que $-\frac{d}{c}$ es raíz de la expresión lineal del denominador y que no lo es del numerador, y que dado que $c \neq 0$, la función lineal del denominador es creciente o decreciente. Por lo tanto, en las cercanías de $-\frac{d}{c}$, resulta que $\frac{ax+b}{cx+d}$ tiene distinto signo a izquierda y a derecha. Por lo tanto, se cumple que:

$$\lim_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x) = -\infty \text{ o } \lim_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} f(x) = -\infty$$

Simetría

Para mostrar simetría en el caso de que la gráfica no sea una recta (o parte de una) podemos acudir a la geometría analítica. Si $c \neq 0$ y $ad \neq bc$, podemos mostrar que la gráfica correspondiente a la ecuación $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ es simétrica respecto de la recta de ecuación $y = -\left(x - \left(-\frac{d}{c}\right)\right) + \frac{a}{c}$. Notar que esta recta tiene pendiente -1 y contiene al punto $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ que resulta ser el punto de intersección de las asíntotas.

$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{2d}{c} \\ 0 & -1 & \frac{2a}{c} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de simetría respecto de la recta indicada en coordenadas homogéneas. Aplicada al punto genérico de la curva (en coordenadas homogéneas) $\begin{pmatrix} x \\ \frac{ax+b}{cx+d} \\ 1 \end{pmatrix}$ obtenemos el punto $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - \frac{2d}{c} \\ \frac{2a}{c} - \frac{ax+b}{cx+d} \\ 1 \end{pmatrix}$. Despejando x en la igualdad de la primera coordenada y reemplazando en la igualdad de la segunda coordenada, obtenemos la ecuación $y' = \frac{ax'+b}{cx'+d}$ que es equivalente a la de la primera curva. Esto significa que al aplicar la simetría a los puntos de la primera curva se obtienen puntos sobre la misma curva. Como la inversa de la simetría axial es ella misma, resulta que ambas curvas son iguales y, por lo tanto, la curva correspondiente a la gráfica de las funciones cuya expresión es de la forma $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ con $c \neq 0$ y $ad \neq bc$ es simétrica respecto de la recta de ecuación $y = -\left(x - \left(-\frac{d}{c}\right)\right) + \frac{a}{c}$.

Resolución con TIC enmarcada en el contexto

Recordemos las preguntas:

- ¿Pueden establecerse condiciones sobre los parámetros de la expresión para estudiarla como función? ¿Hay casos especiales? Si es así, ¿cuáles son? ¿Cómo son los gráficos?
- ¿Encuentran alguna relación entre los parámetros y las características del gráfico? Si es así, ¿cuáles?

La consigna propuesta y el contexto descripto nos hacen suponer que el uso de TIC está totalmente habilitado. Probablemente, los alumnos usarán GGB o algún graficador. En caso de usar GGB, es posible ingresar la fórmula de una función y utilizar lo que se conoce como deslizador para los parámetros. Según el manual *online* de GGB, un deslizador es "una representación gráfica de un número libre o ángulo libre", es decir que con el puntero del mouse podemos "mover" el deslizador y algún parámetro asociado a este va cambiando de valores. Para trabajar con esto, dependiendo de la versión, podemos directamente ingresar en la barra de entrada $f(x) = (a*x+b)/(c*x+d)$ y el software nos pregunta si crea algún deslizador para *a*, *b*, *c y d* y aceptamos la sugerencia.

Un primer acercamiento para iniciar el análisis puede ser mover los deslizadores. Esto remitirá a encontrar rectas horizontales u oblicuas o curvas no conexas de tipo hiperbólicas, o bien podrán no encontrar ninguna traza en la vista gráfica.

Presentamos un camino posible de los estudiantes, en las elaboraciones por el uso de los deslizadores, y sus decisiones en lo matemático. Es probable que decidan establecer una organización en dos grupos: A) La vista gráfica presenta rectas o ningún trazo; B) La vista gráfica muestra dos curvas no conexas.

A) La vista gráfica en GGB nos muestra:

i. Ninguna traza. Es posible notar que esto sucede cuando los deslizadores de *c* y *d* se detienen en cero, la expresión que muestra GGB es $\frac{ax+b}{0}$ o $\frac{ax+b}{0x}$ dependiendo de la versión. Es posible que los estudiantes sepan que no se puede dividir por cero y concluir que entonces, los valores de *c* y *d* no pueden ser simultáneamente cero.

ii. Una recta no vertical. Los estudiantes podrían emprender la búsqueda de los valores de *a*, *b*, *c* y *d* de modo que la gráfica resulte ser una recta. Se puede probar con los deslizadores y es posible advertir que justo cuando c se ubica en cero y los otros tres no son cero se ve una recta. Al probar con las expresiones $\frac{3x+4}{2}$ o $\frac{-5x-7}{5}$, es posible advertir que la ecuación corresponde a una lineal de la forma $f(x) = \frac{3}{2}x + 2$, y, $f(x) = \frac{-5}{3}x - \frac{7}{3}$ respectivamente.

iii. Rectas horizontales. Al mover los deslizadores es posible encontrar una recta que parece horizontal. Al buscar los valores de a, b, c y d, puede ser complejo que los cuatro deslizadores en simultáneo determinen que el gráfico resulte ser una recta horizontal. Entonces, es posible que los estudiantes piensen que si este fuera el caso es porque se trata de una función constante. Como c y d no pueden ser cero, el cociente de lineales tiene que ser equivalente a un número para todo x. Es posible que los estudiantes prueben algunos casos, por ejemplo: $f(x) = \frac{x+4}{2x+8} = \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{5x+20}{x+4} = 5$. Los estudiantes podrían advertir que las expresiones lineales del numerador y del denominador difieren en un factor.

Una observación en (iii): la falta de definición del dominio junto con las limitaciones del entorno para mostrar el "agujero" en el punto de abscisa x para el que no se define $f(x)$ necesita ser confrontado con la elaboración analítica. Si no surgiera esta cuestión, nos parece prudente avanzar sobre el caso (B), sabiendo que en las curvas no conexas se manifiesta más claramente la necesidad de modificar el dominio.

Luego de los acuerdos, se inicia un nuevo proceso de trabajo sobre la consigna, con condicionamientos en los valores de los parámetros.

Suponemos que luego de las elaboraciones en (A) se modificará la consigna, de modo que estén en condiciones de estudiar el caso (B): curvas no conexas. Entendemos que los estudiantes tienen claro que el denominador debe ser distinto de cero, pero puede ser que aún se centren solo en los valores c y d representados por los deslizadores.

Si aún no identificaran que el denominador puede anularse por el cero de $cx + d$, para el cual no está definida la función, es probable que aceptemos, como parte de sus saberes en construcción, que estudien las funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

B) La vista gráfica muestra dos curvas no conexas

Pensamos una posible presentación de los alumnos. Si en la vista gráfica de GGB encontramos "dos" curvas, podemos probar variando los deslizadores. Para ver el efecto de cada uno, es ideal probar los cambios variando no todos a la vez. También es posible simplificar el análisis dejando uno de los parámetros con el valor 0. Por ejemplo, al dejar el parámetro $a = 0$, "eliminamos" la variable x del numerador.

Presentamos a continuación algunas posibles conjeturas que los estudiantes podrían proponer al trabajar con la consigna. Las organizamos por casos, en función de elecciones sobre los valores de los parámetros. Es esperable que su formulación presente las imprecisiones propias de quien se está aproximando a un tema.

Entendemos que hay dos rasgos de las curvas que surgirán en todos los casos: que se obtiene una curva que no es conexa y la simetría entre sus ramas, expresado probablemente de un modo informal: se trata de dos curvas, las curvas no se tocan, la gráfica está separada en "dos ramas", hay dos partes que no se tocan, hay simetría sin dar precisiones respecto de qué, etcétera. Evitamos repetir esta anticipación en los ejemplos que siguen.

Caso 1

$a = 0$, b parámetro variable distinto de 0, c y d fijos y distintos de cero.

En GGB se puede mostrar el rastro para ver muchos ejemplos con distintos valores de b. Es posible observar la diferencia entre $b > 0$ y $b < 0$. Las siguientes capturas muestran la pantalla de GGB en cada uno de estos dos casos con $c = 2$ y $d = 6$.

Figura 1. Captura de pantalla del rastro ($a = 0$, $c = 2$, $d = 6$ y $b > 0$)

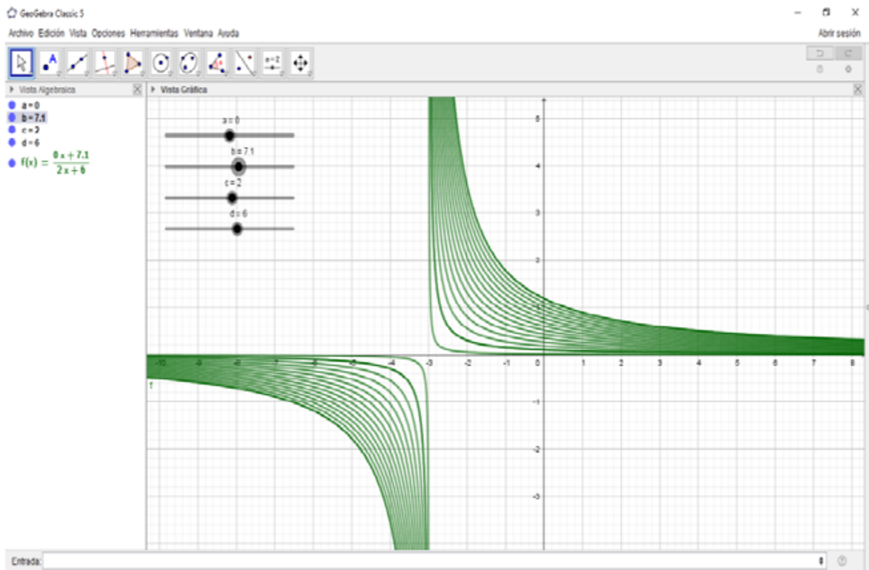
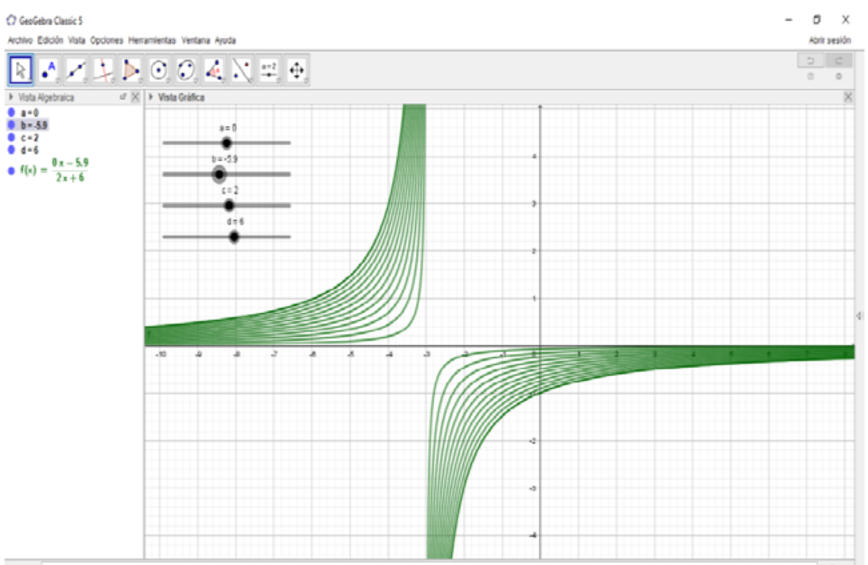


Figura 2. Captura de pantalla del rastro ($a = 0$, $c = 2$, $d = 6$ y $b < 0$)



Algunas conjeturas posibles en este caso pueden ser:

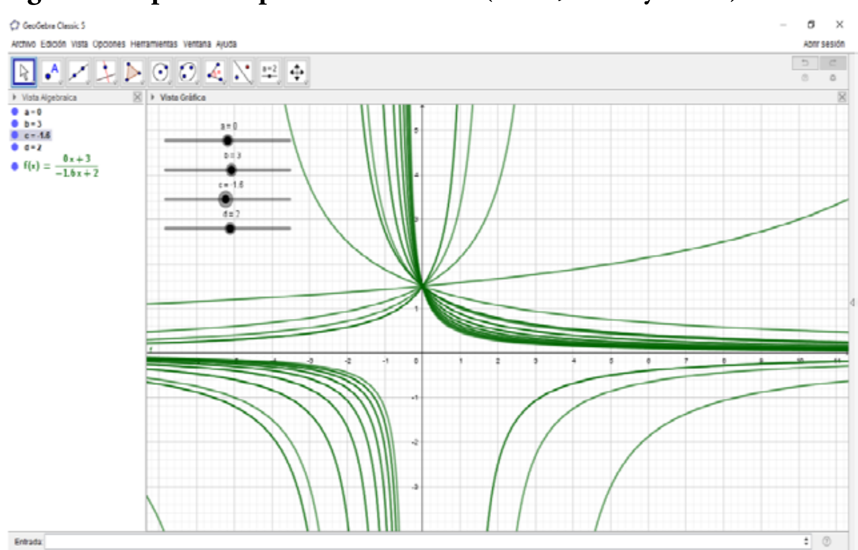
- Si $b > 0$, con valores de b cada vez más grandes (tienden a $+\infty$) las ramas se alejan entre ellas.
- Si $b < 0$, con valores de b cada vez más chicos (tienden a $-\infty$) se repite el alejamiento entre las ramas.
- La curva no cruza el eje *x*.
- Una rama cruza el eje de ordenadas, y cambia el punto del cruce cuando se desliza b.

Cabe aclarar que el cuadrante en el que aparecen las ramas de la gráfica respecto de las asíntotas no depende solo del signo de *b*. Esto podría no ser advertido por los estudiantes si solo prueban con un caso para *c* y *d* fijos. Para advertirlo, deberían también probar con valores negativos. Es posible proceder de la misma forma en otros casos.

Caso 2

$a = 0$, *c* parámetro variable distinto de 0, *b* y *d* fijos y distintos de cero. La siguiente es la captura de pantalla de GGB para este caso con $b = 3$ y $d = 2$.

Figura 3. Captura de pantalla del rastro ($a = 0$, $b = 3$ y $d = 2$)



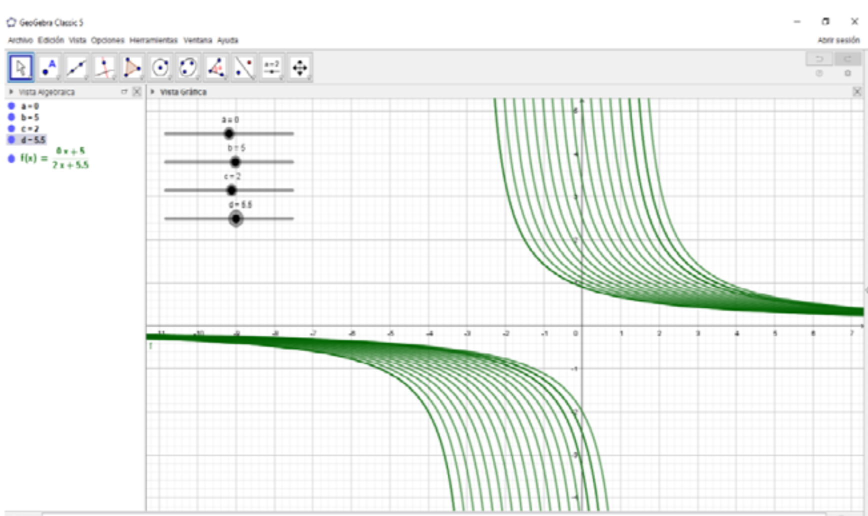
Algunas conjeturas que pueden obtenerse.

- Si $c > 0$, con valores de c cada vez más grandes (tienden a $+\infty$), las ramas se aproximan entre ellas.
- Si $c < 0$, con valores de c cada vez más chicos (tienden a $-\infty$), se repite la aproximación entre las ramas.
- No existe intersección con el eje de abscisas, lo que muestra que no tiene ceros o raíces.
- Corta al eje de ordenadas, y si variamos c no se modifica la intersección con el eje de ordenadas.
- La intersección de la gráfica con el eje de ordenadas parece ser el punto $\left(0, \frac{b}{d}\right)$. Es posible convencerse de esta conjetura variando b y d. Además, es posible chequearlo analíticamente en forma general sin mayores esfuerzos.

Caso 3

$a = 0$, d parámetro variable distinto de 0, b y c fijos y distintos de cero. La siguiente captura muestra este caso con $b = 5$ y $c = 2$.

Figura 4. Captura de pantalla del rastro ($a = 0$, $b = 5$ y $c = 2$)



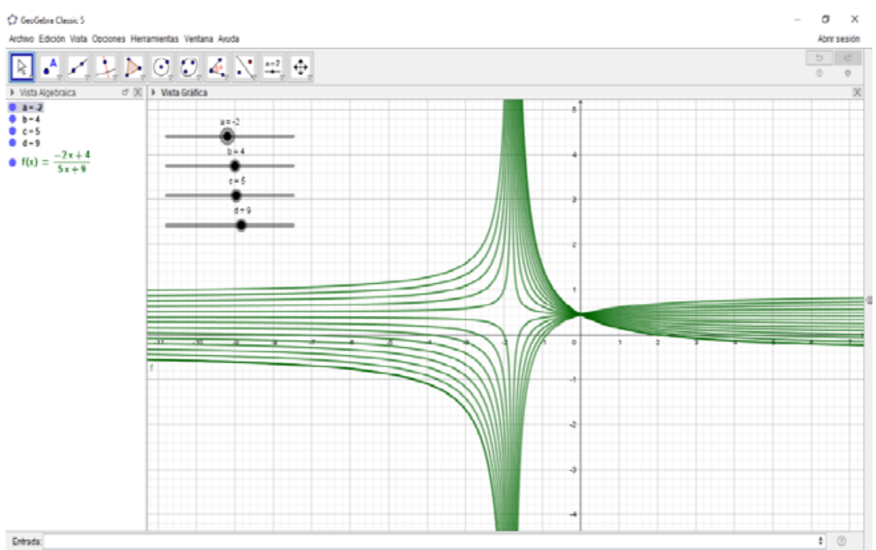
Posibles conjeturas.

- *d* hace que las ramas se desplacen horizontalmente, y es posible notar que varía el valor en el que las ramas no se conectan (el valor fuera del dominio). Ese valor cambia en *x*, se desplazan las ramas y con ellas se desplaza el valor de la separación.
- No existe intersección con el eje de abscisas, lo que muestra que no tiene ceros o raíces.
- Aquí es posible confirmar que el punto de intersección es $\left(0, \frac{b}{d}\right)$.

Caso 4

a, parámetro variable distinto de 0; *b*, *c* y *d* fijos y distintos de cero. La siguiente es una captura con los valores fijos $b = 4$, $c = 5$ y $d = 9$.

Figura 5. Captura de pantalla del rastro ($b = 4$, $c = 5$ y $d = 9$)



Posibles conjeturas.

- *a* hace que las ramas se desplacen verticalmente, y el valor en el que las ramas no se conectan es el que da cero en el denominador, que en este caso es fijo.
- Existe un punto de intersección con el eje *x* que cambia al mover *a*. Si se marca el punto en la vista gráfica se observa el cambio, se mueve sobre el eje *x* en una rama y luego en la otra. El punto es el cero o raíz, se ve también el cambio en la vista algebraica al mover *a*, pero para conocerlo en forma exacta es necesario realizarlo analíticamente. Esto no supone mayor complejidad, dado que un cociente es 0 si el numerador lo es y el denominador no. Para este tipo de funciones dará $x = -\frac{b}{a}$.
- La gráfica corta al eje *y* en el mismo punto para todos los casos. Esto es coherente con lo visto anteriormente, teniendo en cuenta que el punto es $\left(0, \frac{b}{d}\right)$.
- El valor de *a* para el cual las ramas de las curvas cambian de cuadrante (respecto de las asíntotas) no es 0. Es posible advertir que a medida que los valores de *a* se acercan a un cierto número las ramas se acercan a las asíntotas. Además, hay un valor de *a* para el cual la gráfica que se observa es una recta horizontal. Se puede conjeturar que el valor de *a* para el cual las ramas cambian de cuadrante (respecto de las asíntotas) es el que hace que las expresiones del numerador y denominador de la función resulten ser "múltiplo".

Hasta aquí hemos presentado probables procesos de los alumnos en forma de conjeturas, ensayos, comprobaciones visuales basadas en el entorno dinámico y algunas hipótesis. La forma en que los estudiantes pueden formular estas conjeturas puede variar considerablemente respecto de la formulación que nosotros realizamos aquí.

Entendemos que en esta propuesta el uso de GGB u otro entorno similar permite potenciar los procesos de conjeturación de los estudiantes. La posibilidad de trabajar con los valores de los parámetros simultáneamente, elegir sus combinaciones y los extremos de variación habilita un análisis del cociente de lineales que quedaría limitado sin el recurso. En ese sentido, creemos que el entorno aporta al trabajo matemático del alumno. Por otro lado, resaltamos que el recurso tiene sus limitaciones, por ejemplo, en el momento de (no) mostrar los "agujeros" en las gráficas o los valores exactos en algunos casos.

Esto hace que sea necesaria la vuelta al papel y lápiz. Es importante destacar que es muy posible que el estudiante no advierta estas limitaciones y que el docente es quien deberá arbitrar los medios para ponerlas en evidencia y que sea posible su contrastación.

Análisis de la actividad desde la mirada de la TSD

Posicionados en este modelo teórico proponemos un análisis de la consigna enlazada con las probables elaboraciones de los alumnos. La TSD es una de las líneas didácticas de mayor abordaje en la formación de profesores, sin embargo, si el lector necesitara revisar sus conceptos le sugerimos la lectura del capítulo 1 de Pochulu y Rodríguez (2015).

Los datos que surgen de las posibles anticipaciones de resoluciones de la consigna propuesta, con y sin TIC, hace que no sea pertinente considerar algunos elementos teóricos de la TSD (por ejemplo, los que solo pueden verse en clases, contrato didáctico, adidacticidad, institucionalización, entre otros). En cambio, consideramos posible seleccionar para el análisis las situaciones de acción, formulación y validación y el concepto de *medio*.

Es importante que dejemos constancia de que las tres situaciones recién mencionadas, tal como las define Brousseau (2007), conforman un modelo teórico que permite analizar o explicar parte de lo ocurrido en una clase, así como son elementos para planificarla. Sin embargo, al observar el trabajo real de los alumnos podremos encontrarnos con que: no es claro en cuál de las situaciones están, hay solapamientos entre ellas, alguna está ausente, hay avances y retrocesos entre ellas, etcétera.

La consigna propone un estudio, el de cociente de lineales, como una relación en la que fue necesario establecer condiciones para que una expresión se establezca como la ley de correspondencia de una función. Advertimos que intencionalmente no definimos la terna de la función para que el alumno se vea obligado a proponerla.

La resolución experta aborda como primer concepto el dominio natural, en el reconocimiento de que una ecuación en la que la variable dependiente resulta cociente de expresiones lineales es uno de los elementos de una función si se identifican los conjuntos dominio y codominio.

Analicemos ahora las probables elaboraciones de los alumnos en relación con la necesidad matemática de definir el dominio. Iniciamos con las agrupadas en (A). Por tratarse de las primeras posibles interacciones del alumno con el problema, decidimos vincularlo con el concepto de situación de acción: en la *situación de acción* el alumno pone en diálogo los conocimientos que posee y los reorganiza para interpretar la propuesta (ver el capítulo de Barreiro y Casetta en Pochulu y Rodríguez, 2015). Presentamos en forma de tabla información que utilizamos en el análisis. En ella, el lector podrá encontrar dos planos de trabajo. Las primeras columnas refieren al juego dinámico entre la acción del alumno sobre el entorno, los conocimientos que pone en juego y las relaciones que logra producir. En otro plano, la última columna contiene una interpretación en términos de la teoría.

Tabla 1. Datos para el análisis

Datos	**Conocimientos**	**Relación establecida**	**Interpretación**
- No encuentra ningún gráfico mediante la manipulación de deslizadores. - Identifica que los deslizadores de c y d están en cero.	- La división no es posible si el divisor es cero. - El dominio en las funciones polinómicas es el conjunto de los números reales.	- Asegura que c y d no pueden ser simultáneamente cero.	En este caso, el trabajo realizado habilitó adjudicar condiciones para los parámetros, pero no produjo la advertencia sobre la modificación del dominio respecto de las funciones polinómicas.
- Encuentra una recta no vertical en la manipulación de los deslizadores. - Identifica que el deslizador de c está en cero y el resto de los valores distintos de cero.	- Modificación del registro para ejemplificar los casos.	- Asegura que si $c = 0$ se obtiene una función lineal.	En este caso, restringe los valores inhabilitando un valor para un parámetro.
- Encuentra rectas horizontales en la vista gráfica. - Restricción en la manipulación de los deslizadores para obtener distintas rectas horizontales.	- La función constante. - Elaboración de ejemplos con condiciones.	- El cociente de expresiones lineales equivalentes entre sí es una función constante.	En este caso, la restricción está dada por $ax + b \neq k(cx+d)$, $k \in Z$.

El problema después de este primer acercamiento ha sido modificado por la necesidad de descartar casos según los valores de los parámetros. Es importante identificar que se trata de una manifestación del medio.

Siguiendo las elaboraciones de Sadovsky (2005), el *medio* es considerado como el o los problemas propuestos, junto con un conjunto de relaciones esencialmente matemáticas que se modifican a medida que el alumno avanza en la producción de conocimiento y transforma así la realidad con la que interactúa. Estas modificaciones que surgen al realizar trabajo matemático le imprimen al medio un aspecto dinámico que es de nuestro interés resaltar aquí y es donde focalizamos en los análisis que incluimos a continuación.

Recordemos que la consigna propone estudiar el cociente de funciones lineales. En cada interacción del alumno con ella, este aporta saberes y concepciones que en su reorganización le permiten interpretarla y lo conducen a descartar casos según los valores de algunos parámetros (A). El medio se ha modificado porque en el juego de interacciones, el problema ahora tiene condiciones habilitadas por ellas. Queda constancia de esto en el mismo apartado cuando se hipotetiza: "Luego de los acuerdos se inicia un nuevo proceso de trabajo sobre la consigna, con condicionamientos en los valores de los parámetros".

Avanzando en las posibles elaboraciones de los alumnos, encontramos nuevas interacciones con el medio, analizaremos sobre ellas la situación de formulación ([B]1, 2, 3, 4).

En la *situación de formulación* el alumno elabora conjeturas basadas en las acciones sobre el problema y necesita comunicarlas. Esto le exige formular explícitamente las ideas que derivan de la confrontación de los conocimientos implícitos y el medio. Modifica, reelabora y crea un lenguaje (ver el capítulo de Barreiro y Casetta, en Pochulu y Rodríguez, 2015). En la siguiente tabla es posible observar el proceso dinámico de la formulación. El alumno, a través del lenguaje, despliega la intención de poner a disponibilidad las elaboraciones propias y simultáneamente el paso por distintas etapas de conjeturación.

Tabla 2. Proceso dinámico de formulación

Concepto	Proceso de formulación		
Si $c \neq 0$, $Dom(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$	La gráfica está separada en dos ramas, no se tocan.	Notamos que varía el valor en el que las ramas no se conectan.	No puede trazarse una única curva, se marca una que se acerca, sin llegar al valor que deja en cero el denominador y después se traza otra del lado opuesto a una línea que pasa por ese valor.
Inexistencia de ceros en la función: cociente de lineales.	La curva no cruza al eje *x*.	No existe intersección con el eje de abscisas.	O sea, no tiene ceros o raíces.
Existencia de ceros en la función: cociente de lineales (2).	Existe un punto de intersección con el eje *x*, pero cambia al mover *a*.	Si se marca el punto en la vista gráfica se observa el cambio, se mueve sobre el eje *x* en una rama y luego en la otra. El punto es el cero o raíz.	Se ve también el cambio en la vista algebraica al mover *a*. Si lo querés saber exacto, tenés que igualar a cero.

En este sentido, la primera fila muestra el avance hacia identificar el dominio de la función distinto de $\mathbb{R}$, la existencia de asíntota vertical de la función, la continuidad de la función.

En la fila 2, respecto de los ceros de la función, el lenguaje avanza desde leer de manera directa lo que muestra la vista gráfica de GGB, elegir terminología específica hasta aclarar con nombre y concepto la inexistencia de ceros o raíces de la función en las condiciones estudiadas ([B] 1, 2, 3).

Finalmente, en la fila 3, respecto de ceros o raíces, elabora mensajes para especificar su existencia según el valor de un parámetro, vincular registros y anticipar la necesidad del cálculo algebraico para obtenerlo ([B] 4).

En la *situación de validación*, el alumno queda inmerso en un intenso proceso de comunicación, la presentación de las conjeturas, de los argumentos propios, de responder a las refutaciones, de reformular al aceptarlas, para establecer finalmente la verdad o falsedad de sus elaboraciones.

El trabajo que presentamos con las hipótesis de elaboraciones de los alumnos no habilita a realizar un análisis de la situación de validación. Sin embargo, nos interesa mostrar lo que hemos identificado como acciones del alumno que tendrán implicancia en la validación y que entendemos pueden pensarse en el solapamiento de las situaciones.

En la siguiente tabla proponemos ejemplos de acciones que entendemos están implicadas en el proceso de validación. Nos referenciamos en el trabajo de Barreiro, Falsetti, Formica, Marino y Mellincovsky citado en el capítulo 1 de Pochulu y Rodríguez (2015). Los autores sostienen que existen determinadas acciones del alumno que constituyen un proceso hacia la validación.

Tabla 3. Ejemplos de acciones del proceso de validación

Proposición	**Acciones**
Si $b > 0$, con valores de b cada vez más grandes (tienden a $+\infty$) las ramas se alejan entre ellas. Si $b < 0$, con valores de b cada vez más chicos (tienden a $-\infty$) se repite el alejamiento entre las ramas. ([B] 1)	Generaliza por observar una regularidad.
No existe intersección con el eje de abscisas, lo que muestra que no tiene ceros o raíces. ([B] 3)	Formula un razonamiento simple. Propone el contrarrecíproco de: *si la función tiene ceros o raíces en su dominio, entonces la curva interseca al eje de abscisas*.
El punto es el cero o raíz, se ve también el cambio en la vista algebraica al mover *a* pero si lo querés saber exacto tenés que igualar a cero. ([B] 4)	Reconoce que las herramientas empleadas no son suficientes para garantizar la validez de esta proposición. Inclusive en este caso sabe qué necesita para ello.

Hemos adaptado en la fila 1 la categoría A4, pero entendemos que esta manifestación es precedida por otras acciones; por ejemplo, hacer ensayos (A1) (consideramos aquí la denominación de las acciones de validación A1, A2, etcétera. que pueden verse en Pochulu y Rodríguez, 2015).

En la fila 2 utilizamos la categoría A21, que ha sido precedida por la observación de la vista gráfica junto con la manipulación de los deslizadores que resultan indicadores de ensayos, de ejemplos (A1, A6).

En la fila 3 la categoría A22, la interpretamos como una acción que es anticipatoria de la necesidad de buscar elaboraciones que garanticen la validez y además enuncia la herramienta que será necesario utilizar. Se expone también aquí el dar explicaciones (A1).

Reflexiones finales

En este capítulo hemos intentado trabajar el cociente de lineales, para avanzar, entre otras cuestiones, en las condiciones de la terna que define la función. Se trata de una elección por pensar la disrupción respecto de tener rutinizado el dominio $\mathbb{R}$ y las gráficas conexas.

Consideramos la resolución experta como parte del cuerpo de saberes hacia el que el alumno avanzará en un proceso que nosotros pretendemos como autónomo.

Dentro de ese proceso nos propusimos únicamente el primer acercamiento, con una consigna que dé la oportunidad de trabajar con elaboraciones propias y en este caso con un recurso TIC que potencie las indagaciones, las conjeturas y sea un apoyo para elaborar argumentaciones sobre ellas.

En el análisis bajo la línea de la TSD hicimos centro en las situaciones de acción y formulación pues se manifestaban con cierto énfasis en la propuesta de elaboraciones de los alumnos utilizando GGB. Nos pareció pertinente hacer referencia a las manifestaciones del medio, y a las sucesivas modificaciones a raíz de las vinculaciones del alumno con el o los problemas. Esto nos permite enfatizar un rasgo del concepto de medio, que es su dinámica. Finalmente, nos resultó relevante pensar en algunas acciones para el proceso hacia la validación, tanto por el aprendizaje del alumno en torno a la argumentación como para el docente que hace un registro mental para acompañar al alumno a proponerlas en las discusiones grupales si acaso no las tuviera presentes o las descartara sin someterlas a la mirada de sus compañeros.

Con la tarea propuesta solo pretendemos ejemplificar la potencialidad de exploración, conjeturación y validación en conjunto con un uso pertinente y significativo de las TIC de una consigna del estilo a la dada. Para aprovechar la riqueza debe estar enmarcada en una propuesta de enseñanza que la potencie.

Referencias bibliográficas

Barreiro, P., Falsetti, M., Formica, A., Marino, T. y Mellincovsky, D. (2009). Formulación de algunas categorías de análisis cualitativo para estudiar la validación en matemática a partir de protocolos de clase. *Epsilon (72)*, 39-60.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (Comps.) (2015). *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Ediciones UNGS y EDUVIM.

Rodríguez, M. (Comp.) (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática*. Ediciones UNGS.

Sadovsky, P. (2005). La teoría de las Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En H. Aliaga, A. Bressan y P. Sadovsky (Eds.), *Reflexiones teóricas para la educación matemática* (pp. 13-65). Libros del Zorzal.